



VORLESUNGEN

ÜBER

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

VON

DR. A. MEYER,
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU LÜTTICH.

DEUTSCH BEARBEITET

VON

EMANUEL CZUBER.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Vorrede.

Ueber Entstehung und Plan des vorliegenden Werkes mögen die folgenden Worte Aufschluss geben, welche Prof. Dr. F. Folie, Administrateur-Inspecteur der Universität Lüttich, der von ihm besorgten französischen Ausgabe voranschickte

„Während seiner letzten Krankheit hatte uns A. Meyer die Revision der Druckbogen seiner *Théorie analytique des probabilités à posteriori* übertragen.

Diesem Umstande ist es gewiss zu danken, dass die Witwe Meyer's so freundlich war, uns das Manuscript der Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuvertrauen, welche ihr Gatte in den Jahren 1849 bis 1857 an der Universität Lüttich abgehalten.

Wir gaben uns der Hoffnung hin, die königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Lüttich, welche schon früher hervorragende Arbeiten Meyer's in ihren Memoiren veröffentlicht hatte, werde auch bei der Herausgabe dieser hinterlassenen Schrift, wohl der bedeutendsten ihres Autors, ihre Mitwirkung nicht versagen. Zählt doch diese Gesellschaft ausser der Mehrzahl ehemaliger Collegen Meyer's von der Facultät mehrere seiner einstigen Schüler in ihrem Schosse; und alle, Collegen wie Schüler, haben diesen Gelehrten von so umfassendem Wissen, diesen edlen Mann, diesen seinem Berufe ergebenen Lehrer kennen und lieben gelernt. So würde denn die Herausgabe seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung keine Verzögerung erlitten haben, wären die Hilfsquellen der Gesellschaft zu-

reichend gewesen. Jedoch erst in der letzten Zeit gestatteten ihre finanziellen Verhältnisse, die Drucklegung des Werkes zu bewilligen.

Obgleich die Aufzeichnungen des Verfassers nahezu vollständig waren, indem sie nur in den auf die Entwickelung der Formeln bezüglichen Partien zuweilen keinen Text enthielten, war es doch nothwendig, sie etwas mehr in die Form eines zu veröffentlichenden Buches einzukleiden. Wir haben diese Arbeit, bei welcher uns ein ehemaliger Schüler Meyer's, unser Freund L. Perard, Professor an der Universität Lüttich, in verbindlicher Weise unterstützte, mit Vergnügen unternommen und dabei den Ideen unseres Lehrers durchwegs, und, so weit es angieng, auch dessen bündigem Stile Rechnung getragen. Ausser der Beseitigung einiger Rechenfehler und der Einschaltung einiger minder wichtigen Erklärungen haben wir nichts hinzugefügt.

Eine im Manuscript fehlende Partie konnte Dank der Gefälligkeit eines unserer ehemaligen Collegen, welcher mit uns die Vorlesungen Meyer's besucht hat, unseres Freundes A. Devivier, Professors der Universität Löwen, ersetzt werden, welcher so freundlich war, uns seine Anmerkungen, deren volle Genauigkeit wir zu würdigen wussten, zur Verfügung zu stellen.

Das Manuscript war in Vorlesungen von ungleichmässiger Länge eingetheilt. Wir hielten es in Rücksicht auf die didaktische Natur des Werkes für angemessener, dasselbe in Capitel und Paragraphen einzutheilen, um dem Leser das Nachsuchen zu erleichtern und ihn auf Paragraphen verweisen zu können, deren Kenntniss zum Verständniss des Textes gefordert wird.

Einige Partien glaubten wir aus dem eigentlichen Werke ausscheiden und an das Ende desselben verweisen zu sollen, indem sie als Entwickelungen gewisser specieller Fragen in die methodische Eintheilung des Buches nicht gehören.

Es trifft dies die beiden Fehlertheorien nach Laplace und Bienaymé, welche Meyer der im Buche vorgetragenen unmittelbar angeschlossen hatte; ferner eine Ausdehnung des Bernoulli'schen Theorems auf Factoriellen von Binomen, welche von Meyer herrührt und seine Vorzüge als Analytiker erkennen lässt; endlich einige Anmerkungen zur Erklärung der Formeln, deren er sich bedient.

Das vorliegende Werk Meyer's ist eine vollständige Zusammenfassung der bedeutendsten Arbeiten über Wahrscheinlichkeitsrechnung von Bernoulli, Moivre, Laplace, Poisson, Gauss, Encke, Bienaymé u. A., und man kann, unserer Meinung nach, kühn die Behauptung aufstellen, dass keine so umfassende Abhandlung mehr über diesen Gegenstand vorhanden ist, die *Théorie analytique des probabilités* ausgenommen.

Ganz besonders glauben wir die Aufmerksamkeit des Lesers auf die Verallgemeinerungen einiger Probleme lenken zu sollen, in welchen schöne Anwendungen der höheren Analysis und insbesondere der Rechnung mit endlichen Differenzen geboten werden; ebenso auf den Beweis des Bernoulli'schen Theorems und seine Verallgemeinerung; ferner auf den Rechnungsgang bei Entwickelung der Formeln von Laplace, die im Original so schwer zu lesen sind; endlich auf die zahlreichen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Bevölkerung und Versicherungswesen.

Das Theorem und Problem von Poisson, welche sich im Manuscript vorfanden, glaubten wir nicht ausscheiden zu sollen trotz der Zweifel, welche unser Lehrer in die Näherungsrechnungen des französischen Geometers gesetzt: die Aeusserung dieser Zweifel wird hinreichen, die Achtsamkeit des Lesers wachzurufen.

Die Bedeutung dieses Buches und der Nutzen, den man in den Anwendungen daraus wird ziehen können, haben uns veranlasst, dasselbe durch einen Auszug aus den neuen Sterblichkeitstafeln A. Quetelet's,

einer der hervorragendsten Autoritäten in diesem Fache, zu vervollständigen. Dieser berühmte Gelehrte hat uns hierzu freundlichst die Vollmacht ertheilt, wofür wir ihm unseren vollen Dank ausgesprochen haben; heute leider können wir nur mehr seinem Andenken die schuldige Ehrerbietung zollen.

Gewiss wird die Arbeit Meyer's von den Gelehrten mit dem lebhaftesten Interesse begrüsst werden und die zahlreichen Schüler und einstigen Freunde unseres vortrefflichen Lehrers mit Freude erfüllen; mit welcher Pietät aber wird sie vor allem von einer Familie aufgenommen werden, die ihn angebetet hat!

Diese hat uns beauftragt, ihre Dankbarkeit der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Lüttich und insbesondere jenen der ehemaligen Schüler Meyer's zu bezeugen, welche uns in der Vollendung unserer Aufgabe so freundlich unterstützt haben."

Die deutsche Bearbeitung hat die Grundlage des Originals beibehalten; in der Wahl, Anordnung und Behandlung des Stoffes wurden jedoch mehrfach Aenderungen vorgenommen, von welchen wir nur einige besonders anführen wollen.

Zunächst erfuhr das VIII. Capitel, welches die Ausgleichungsrechnung zum Gegenstande hat, eine durchgreifende Umarbeitung und Erweiterung; die Wichtigkeit dieses Capitels hat uns eben zu grösserer Vollständigkeit veranlasst, so dass es in seiner gegenwärtigen Form den praktischen Bedürfnissen für die gewöhnlichen Fälle Genüge leisten dürfte, während dem theoretischen Interesse durch die beiden im Anhange vorgetragenen Fehlertheorien Rechnung getragen ist. Den im Original behandelten Aufgaben wurde jene über Functionen direct beobachteter Grössen und ein Abschnitt über Ausgleichung bedingter Beobachtungen hinzugefügt; neben der Ableitung der vortheilhaftesten Werthe der Unbekannten haben wir auch der Genauigkeitsbestimmung und den Rechnungscontrolen Raum gegeben und den einzelnen Abschnitten vollständig durchgeführte Beispiele aus verschiedenen Gebieten der Anwendung angeschlossen.

In den Entwickelungen wurden nach Helmert's Vorgang die wahren Fehler von den plausibeln geschieden.

Auch das folgende, IX. Capitel, welches sich mit den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Sterblichkeit und ähnlichen Fragen beschäftigt, fand eine fast völlige Neubearbeitung; wir glaubten hier den in den letzten Jahren auf diesem Gebiete gemachten Fortschritten wenigstens so weit Rechnung tragen zu sollen, als es Umfang und Zweck des Buches erlauben. In der Einleitung wurden die Grundbegriffe nach Knapp und Zeuner's Vorgang erläutert, die Methode des Letzteren auch bei Ableitung der mittleren Lebensdauer befolgt. Bei Entwickelung der mittleren Dauer der Ehen, des Witwen- und Witwerstandes haben wir einen selbständigen Weg zu betreten versucht. Die im Original behandelte Euler'sche Theorie des Bevölkerungswechsels wurde, allerdings mehr des historischen Interesses halber, beibehalten; doch versuchten wir auch hier der neueren Auffassung Geltung zu verschaffen.

Dem richtigen Verständniss der Formeln und ihrer praktischen Verwendung kamen wir durch zahlreiche Beispiele entgegen und waren auch bei Ableitung derselben bemüht, Schwierigkeiten zu beseitigen. Der Correctheit des mitunter complicirten mathematischen Satzes haben wir alle Sorgfalt zugewendet und wurden dabei von der geehrten Verlagshandlung in freundlicher Weise unterstützt, welcher wir für die schöne Ausstattung des Buches unseren Dank aussprechen.

Prag, im August 1879.

E. Czuber.

Inhaltsverzeichniss.

IV. Capitel.

V. Capitel.

VI. Capitel.

VII. Capitel.

VIII. Capitel.

IX. Capitel.

X. Capitel.

XI. Capitel.

Anhang.

Anmerkungen.

Tafeln.

Berichtigungen.

Seite	29,	6. Z. v. u.	lies	polynomischer statt bolynomischer.
„	37,	16. Z. v. o.	„	Binomialcoefficienten statt Binominalcoefficienten.
„	58,	3. Z. v. u.	„	den Umfang statt des Umfang.
„	88,	2. Z. v. u.	„	wieder zu erlangen statt wieder erlangen.
„	94,	9. Z. v. u.	„	im Nenner $(i+1)!$ statt $i+1!$
„	96,	3. Z. v. u.	„	$+$ statt $\pm$.
„	109,	5. Z. v. o.	„	e^{γ^2} statt e^2_γ.
„	126,	3. Z. v. u.	„	$\frac{k_i k_i'}{2}$ statt $\frac{k_i k_i'}{3}$.
„	209,	2. Z. v. o.	„	$2i-1$ statt $2i+1$.
„	246,	12. Z. v. u.	„	im Exponenten von e $\frac{l^2-l}{2n}$ statt $\frac{l^2-l}{3n}$.
„	285,	6. Z. v. u.	„	$n = -S$ statt $n == S$.

Einleitung.*)

1. Jedes Ereigniss ist die Folge des Zusammenwirkens zweier Arten von Umständen; die einen, bekannt oder unbekannt, sind nothwendig zu seiner Hervorbringung, während die anderen stets unbekannten nur zufällig dazu beitragen.

Die Umstände der ersten Art nennt man Ursachen oder Chancen des Ereignisses; die anderen in ihrer Gesammtheit bilden das, was man als Zufall bezeichnet.

Beispiel. Besteht das Ereigniss in dem Ziehen einer weissen Kugel aus einer Urne, welche weisse und schwarze Kugeln enthält, so sind Ursachen oder Chancen für das Eintreffen einer weissen Kugel: die Gesammtzahl aller Kugeln und die Zahl der weissen; die Anordnung der Kugeln in der Urne sowie der Vorgang beim Ergreifen einer derselben fallen in den Bereich des Zufalls.

2. Jedem Ereigniss kann sein Gegensatz entgegengestellt werden, so zwar, dass das Eintreffen des einen jenes des andern ausschliesst; die dem einen günstigen Fälle sind dem andern zuwider. Als Gesammtzahl der Fälle bezeichnet man die Summe der einem Ereigniss günstigen und ungünstigen Fälle.

Enthält eine Urne unter zwölf Kugeln vier weisse, so sind dem Ziehen einer weissen Kugel vier Fälle günstig und acht ungünstig, und die Gesammtzahl der Fälle ist zwölf.

3. Handelt es sich um mehrere Ereignisse, von denen

*) Für Solche, denen der Gegenstand neu ist, bemerken wir, dass in der vorliegenden Einleitung zur besseren Erklärung der definirten Begriffe wiederholt Grundsätze in Anwendung gebracht werden, deren Begründung sich erst im Buche selbst vorfindet.

eines nothwendig eintreffen muss, so bildet, wenn man eines dieser Ereignisse heraushebt, die Gesammtheit der übrigen seinen Gegensatz.

4. Das Eintreffen eines Ereignisses ist *gewiss*, wenn kein Fall ihm zuwiderläuft; es ist ungewiss, wenn mehrere Fälle ihm ungünstig sind. Im letzteren Falle ist das Ereigniss mehr oder weniger *wahrscheinlich*, jenachdem sich mehr oder weniger Fälle für dasselbe vereinigen. Bleibt daher die Gesammtzahl der Fälle dieselbe, so *sind die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse den Anzahlen der ihnen günstigen Fälle proportional.*

Angenommen, zwei Urnen enthalten je zwölf Kugeln; in der ersten befinden sich acht weisse neben vier schwarzen, in der zweiten drei weisse neben neun schwarzen. Es ist unter diesen Verhältnissen wahrscheinlicher, aus der ersten Urne eine weisse Kugel zu ziehen als aus der zweiten, und die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten verhalten sich wie 8 zu 3.

5. Nachdem einem Ereigniss, das gewiss ist, alle Fälle günstig sind, so wird es leicht sein, das Mass für die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses zu finden, dem nur einige Fälle sich günstig erweisen.

Es sei u das Symbol für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, wenn dasselbe gewiss ist, und P die Wahrscheinlichkeit des nämlichen Ereignisses, wenn ihm unter $a + b = m$ Fällen nur a günstig sind; dann besteht die Proportion

$$P : u = a : m,$$

aus welcher

$$\frac{P}{u} = \frac{a}{m}$$

gefunden wird. Ist p der Werth dieses Verhältnisses, so wird p das Mass für die Wahrscheinlichkeit P abgeben, wenn man u als Einheit wählt; mithin hat man

$$p = \frac{a}{m}.$$

Demnach *ist das Mass für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ein Bruch, dessen Zähler die Anzahl der dem Ein-*

treffen günstigen und dessen Nenner die Gesammtzahl aller, der günstigen sowohl als der ungünstigen, Fälle ist.

In eben derselben Weise schliesst man, wenn Q die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass

$$Q:u = b:m,$$

woraus

$$\frac{Q}{u} = \frac{b}{m}$$

folgt. Setzt man

$$\frac{Q}{u} = q,$$

so wird

$$q = \frac{b}{m}$$

und

$$p + q = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} = 1.$$

Die Summe der Masszahlen zweier entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten kommt also stets der Einheit gleich, während die Summe zweier entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten die Gewissheit ergiebt; denn es ist

$$\frac{P}{u} + \frac{Q}{u} = p + q = 1, \quad \text{woraus } P + Q = u.$$

Weiter bemerken wir die Proportion

$$p:q = a:b = a:m - a.$$

6. Es sei k der mit einem Ereigniss verknüpfte Vortheil, wenn dessen Eintreffen gewiss ist, x und y dagegen seien die Vortheile, wenn das Eintreffen mit der Wahrscheinlichkeit p, beziehungsweise q zu erwarten steht; es bestehen dann offenbar die Proportionen:

$$1:p = k:x,$$
$$1:q = k:y,$$

aus welchen

$$x = kp, \qquad y = kq$$

gefunden wird.

Angenommen nun, das Eintreffen eines Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit p verschaffe einer Person A den Gewinn k, sein Nichteintreffen oder das Eintreffen des entgegengesetzten Ereignisses, wofür die Wahrscheinlichkeit q ist, bringe denselben Gewinn k einer Person B. Dieser Fall

tritt ein, wenn zwei Personen eine Summe zusammenlegen, welche nach der Entscheidung in das Vermögen des Gewinnenden übergehen soll.

Behält man die früheren Bezeichnungen bei, so sind vor der Entscheidung die Vortheile der Personen A und B beziehungsweise

$$x = kp, \qquad y = kq,$$

woraus

$$p:q = x:y = a:m - a.$$

Werden aber g Thaler auf das Eintreffen, g' Thaler auf das Nichteintreffen gewettet, so hat man $g = x$ und $g' = y$ zu nehmen; denn die Einsätze müssen den erwarteten Vortheilen gleichkommen; man hat also

$$p:q = g:g' = a:m - a.$$

Ist demnach

$$p = \frac{a}{m}$$

der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so kann man a gegen $m - a$ darauf wetten, dass das Ereigniss eintreffen werde.

7. Aus den Beziehungen

$$x = kp, \quad y = kq, \quad x + y = k(p + q) = k$$

folgt, dass das Anrecht eines Spielers auf den vollen Einsatz k dem Betrage kp gleichkommt, wenn für ihn die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, p ist, und er kann dieses Anrecht um eben den Betrag kp verkaufen, bevor über das Eintreffen des Ereignisses, von welchem Gewinn und Verlust abhängt, entschieden ist.

Das Product einer Summe k mit der Wahrscheinlichkeit p, sie zu gewinnen, wird *mathematische Hoffnung* oder *Erwartung* genannt.

Wir wollen die mathematische Hoffnung mit s bezeichnen. Führt das Eintreffen eines Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit p den Vortheil k herbei, so ist dem obigen zufolge

$$s = kp,$$

woraus

$$p = \frac{s}{k}$$

geschlossen wird.

Die mathematische Erwartung des Gegners, welchem das Nichteintreffen des Ereignisses den Gewinn k bringt, oder die mathematische Furcht des ersten Spielers, die Summe k zu verlieren, ist ausgedrückt durch das Product

$$(1 - p)\, k = q\, k.$$

Der Vor- oder Nachtheil in einem Spiele wird erhalten, indem man die geleistete Einzahlung von der mathematischen Hoffnung abzieht.

Beispiel. Ein Spieler A, welchem unter sechs Fällen vier Fälle günstig sind, erlegt fünf Francs, und B, welchem unter sechs Fällen nur zwei Fälle günstig sind, zahlt drei Francs ein; der volle Einsatz beträgt also acht Francs.

Demnach ist:

die Hoffnung für A . . . $8 \cdot \frac{4}{6} = 5\frac{1}{3}$,
„ „ B . . . $8 \cdot \frac{2}{6} = 2\frac{2}{3}$;
der Vortheil von A . . . $5\frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{3}$,
der Nachtheil von B . . $-(2\frac{2}{3} - 3) - \frac{1}{3}$.

Anmerkung. Man erhält den Vortheil eines Spielers auch in der Weise, dass man von der auf den möglichen Reingewinn bezüglichen Hoffnung die auf den möglichen Verlust bezügliche Furcht subtrahirt.

Die Hoffnung für A, 3 zu gewinnen, ist $3 \cdot \frac{4}{6} = 2$.

Die Furcht, die eingezahlten 5 Francs zu verlieren, wenn das erwartete Ereigniss nicht eintrifft, ist $5 \cdot \frac{2}{6} = 1\frac{2}{3}$. Der Vortheil ist also $2 - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

8. Die einem Ereigniss günstigen und ungünstigen Fälle können bekannt sein, sei es direct oder durch Gegebenheiten, welche deren Berechnung erlauben. In diesem Falle kann die dem Ereigniss entsprechende Wahrscheinlichkeit nach den im Weiteren vorzuführenden Regeln immer abgeleitet werden. Eine in solcher Weise gerechnete Wahrscheinlichkeit nennt man Wahrscheinlichkeit *a priori*.

Sind dagegen die Chancen eines Ereignisses unbekannt, dann lässt sich für seine Wahrscheinlichkeit nur ein Näherungswerth erzielen, und zwar mit Hilfe von Beobachtungen

oder von in grosser Zahl wiederholten Versuchen. Auf diesem Wege gelangt man zu einer Wahrscheinlichkeit *a posteriori.*

Der Vorgang bei dieser Rechnung beruht auf dem Grundsatze der grossen Zahlen, welcher lehrt, dass *in einer grossen Anzahl von Versuchen sich die verschiedenen Fälle im Verhältnisse ihrer Häufigkeit zutragen.*

Zieht man beispielsweise aus einer Urne, welche m Kugeln enthält, wovon a weiss und b schwarz sind, in einer grossen Anzahl von Malen je eine Kugel, wobei die gezogene Kugel immer wieder in die Urne zurückgelegt wird, und bezeichnen a' und b' die Anzahlen der zum Vorschein gekommenen weissen und schwarzen Kugeln nach einer grossen Zahl μ von Ziehungen, so werden die Verhältnisse $\frac{a'}{a'+b'}$, $\frac{b'}{a'+b'}$ um so weniger von den Wahrscheinlichkeiten $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a+b}$ des Eintreffens einer weissen und schwarzen Kugel auf jeden Zug abweichen, je grösser μ wird.

Die Wahrscheinlichkeiten sind im Allgemeinen von dreifacher Art:

1) **Objective Wahrscheinlichkeit.** Die Wahrscheinlichkeit ist objectiv, wenn es aus der Natur der Ereignisse selbst hervorgeht, dass sie in einem gegebenen Verhältnisse wahrscheinlich sind. So ist es bei dem Spiele Schrift und Wappen offenbar, dass Schrift und Wappen gleich wahrscheinlich sind.

2) **Subjective Wahrscheinlichkeit.** Die Wahrscheinlichkeit ist subjectiv, wenn sie aus der Betrachtung von Beweggründen sich ergibt, durch welche wir bestimmt werden können, uns über die Existenz des Ereignisses auszusprechen. Hat man beispielsweise kein Recht zu glauben, ein Spieler A sei geschickter als ein anderer B, so schliesst man daraus, dass A für ein einmaliges Gewinnen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ besitzt. Durch dieses Mittel erlangen wir nur einen von dem Zustande unserer Kenntnisse abhängigen und nicht den wirklichen Werth für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

3) **Wahrscheinlichkeit a posteriori.** Es ist dies jene Wahrscheinlichkeit, welche man durch in grosser Anzahl vorgenommene Wiederholung jenes Versuches erhält, welcher

das Ereigniss herbeiführen kann, indem man dabei untersucht, wie oft es wirklich eingetroffen ist; es kann dieses Mittel nur zu einem angenäherten Werthe der Wahrscheinlichkeit führen.

Unter den Umständen, welche an der Hervorbringung eines Ereignisses mitwirken, gibt es solche, die sich mit jedem Augenblicke ändern und deren Kenntniss uns gänzlich abgeht, wie etwa die Bewegung, welche die Hand den Würfeln ertheilt; die Vereinigung dieser Umstände ist es, was wir als Zufall bezeichnen.

Die anderen Umstände sind constant, wie etwa die Geschicklichkeit der Spieler, die Zahl der gleichen Seiten eines Würfels u. s. w. Diese führen die objectiven Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse herbei, und die mehr minder ausgebreitete Kenntniss, welche wir von ihnen besitzen, bestimmt deren subjective Wahrscheinlichkeiten. Allein die constanten Umstände reichen zur Hervorbringung der Ereignisse nicht hin, dazu ist vielmehr ihre Vereinigung mit den variablen Umständen erforderlich; sie können blos die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse vergrössern, ohne deren Eintreffen mit Nothwendigkeit herbeizuführen.

9. Feststellung der Aufgabe.

1) Sind die Wahrscheinlichkeiten der einfachen Ereignisse bekannt, so können jene der zusammengesetzten Ereignisse häufig mit Hilfe der *Combinationslehre* allein gefunden werden.

2) Die allgemeinste Methode besteht jedoch in der Beobachtung des Gesetzes der Aenderung, welche die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses durch Vermehrung der einfachen Ereignisse erfährt und in der Darstellung desselben durch eine Gleichung zwischen den vollständigen oder partiellen Differenzen; die Integration dieser Gleichung führt zu dem analytischen Ausdrucke für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Dieser Ausdruck wird häufig durch die grosse Zahl seiner Glieder und ihrer Factoren unbrauchbar; man muss dann zu Näherungsmethoden seine Zuflucht nehmen, um angenäherte Werthe zu erhalten.

3) In einer grossen Anzahl von Fällen, und es sind dies gerade die interessantesten, kennt man die Wahrscheinlichkeiten der einfachen Ereignisse nicht und muss in den vergangenen Ereignissen Anzeichen suchen, welche bei Vermuthungen über die Zukunft Anhaltspunkte bieten könnten.

Bei vielen Aufgaben sind die Anzahlen der Fälle unendlich gross. Dies würde beispielsweise eintreffen, wenn man beim Aufwerfen eines Münzstückes auf eine Fläche ermitteln wollte, wie oft der Mittelpunkt desselben auf einen näher bezeichneten Theil der Fläche zu liegen kommt. In dieser Aufgabe wäre die Zahl der günstigen Fälle durch den abgegrenzten Theil, die Gesammtzahl aller Fälle durch die ganze gegebene Fläche bezeichnet.

10. Man sagt, zwei Ereignisse seien unabhängig von einander, wenn das Eintreffen des einen jenes des andern nicht beeinflusst.

Hat man beispielsweise zwei Päckchen von je dreizehn Karten gleicher Farbe, so ist das Ziehen eines Ass aus dem ersten völlig unabhängig von dem Ziehen eines Ass aus dem zweiten Päckchen.

Zwei Ereignisse hängen von einander ab, wenn das Eintreffen des einen jenes des andern beeinflusst.

Dies wäre beispielsweise beim Ziehen einer Sieben aus einem Päckchen von dreizehn Blättern gleicher Farbe der Fall, nachdem das Ass bereits gezogen worden. Denn von den dreizehn ursprünglichen Fällen wären dann nur noch zwölf übrig. Während also die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ass $\frac{1}{13}$ war, würde sie für Sieben $\frac{1}{12}$ sein. Hätte man aber die gezogene Karte zurückgelegt, so wäre die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer Sieben im zweiten Zuge wieder $\frac{1}{13}$, und die beiden Ereignisse wären unabhängig.

Das Wort Ursache bedeutet in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Gesammtheit der Umstände, welche einem Ereigniss eine bestimmte Wahrscheinlichkeit ertheilen. Bliebe beispielsweise die mathematische Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt in einem Lande numerisch dieselbe, so würde man sagen, die Ursache oder die Ursachen einer Knaben-

geburt seien constant. So aufgefasst, ist Ursache nicht das, was einen Erfolg oder ein Ereigniss herbeiführt, sondern das, was einem Ereigniss die ihm eigenthümliche Wahrscheinlichkeit verleiht. Es sind dies die Chancen des Ereignisses an und für sich.

Ist die Ursache ungewiss, so kommt ihr eine grössere oder kleinere Wahrscheinlichkeit zu, jenachdem sie, wäre sie gewiss, dem beobachteten Ereigniss mehr oder weniger günstige Fälle zuweisen würde. Unter übrigens gleichen Umständen *sind* demnach *die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen oder Hypothesen proportional den günstigen Fällen, welche sie dem beobachteten Ereigniss ertheilen würden, wenn sie gewiss wären.*

Wir hätten z. B. drei Urnen A, B, C, von denen jede drei Kugeln enthält, und zwar A eine weisse und zwei schwarze; B zwei weisse und eine schwarze; C drei weisse. Besteht das beobachtete Ereigniss in dem Ziehen einer weissen Kugel, ohne dass man wüsste, aus welcher Urne sie herrührt, so ist die Ursache desselben ungewiss und kann in einer der folgenden drei Hypothesen bestehen:

1) Die Kugel wurde aus der Urne A,
2) aus der Urne B,
3) aus der Urne C gezogen.

Im ersten Falle ist die Wahrscheinlichkeit der Ursache der Zahl 1, im zweiten der Zahl 2, im dritten der Zahl 3 proportional, d. h. die Wahrscheinlichkeiten der drei Ursachen oder Hypothesen sind den günstigen Fällen proportional, welche das Ereigniss haben würde, wenn man gewiss wüsste, dass die gezogene Kugel aus der Urne A, oder der Urne B oder der Urne C herrührt.

11. Als *relative Wahrscheinlichkeit* wird eine Wahrscheinlichkeit bezeichnet, wenn sie sich auf eine Gruppe von Ereignissen bezieht, die man unter den erwarteten ausgewählt hat, das Eintreffen der übrigen gänzlich ausser Acht lassend.

Wird dagegen keines der Ereignisse ausser Acht gelassen, so spricht man von *absoluter Wahrscheinlichkeit.*

Will man in einem Piquetspiel nur die rothen Karten beachten und von dem Eintreffen der übrigen Farben gänz-

lich absehen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer bestimmten rothen Karte eine relative Wahrscheinlichkeit.

12. Die Wahrscheinlichkeit von n gleichzeitigen und unabhängigen Ereignissen

$$E_1, E_2 \ldots E_n$$

ist dieselbe wie jene von n aufeinanderfolgenden Ereignissen $E_1, E_2, \ldots E_n$; denn die Zeit ihrer Aufeinanderfolge kann auf die Wahrscheinlichkeit keinen Einfluss üben; man kann diese Zeit daher der Nulle gleich setzen.

Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit, die Summe s beim Aufwerfen von n gleichen Würfeln zu treffen, ist dieselbe wie jene, die gleiche Summe beim n-maligen Aufwerfen *eines* dieser Würfel zu erzielen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

I. Capitel.

Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Vollständige Wahrscheinlichkeit.

13. **Erste Regel.** *Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches auf mehrere verschiedene, unter einander unabhängige Arten eintreffen kann, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, die den einzelnen Arten zukommen.*

Beweis. Es seien

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}, \; p_2 = \frac{\alpha_2}{\mu}, \; \cdots p_m = \frac{\alpha_m}{\mu}$$

die Wahrscheinlichkeiten, welche den Ereignissen

$$E_1, \; E_2 \cdots\cdot E_m$$

zukommen, P die vollständige Wahrscheinlichkeit des Eintreffens irgend eines dieser Ereignisse. Die Zahl der günstigen Fälle wird

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$$

und die aller Fälle μ sein; demnach ist

$$P = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m}{\mu} = \frac{\alpha_1}{\mu} + \frac{\alpha_2}{\mu} + \cdots + \frac{\alpha_m}{\mu}$$

$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_m.$$

Beispiel. Es liegen μ Karten vor, wovon a_1 mit 1, a_2 mit 2, ... a_m mit m u. s. w. bezeichnet sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P, eine mit 1 oder 2 ... oder mit m bezeichnete Karte zu ziehen? Es ist

$$P = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{\mu} = \frac{a_1}{\mu} + \frac{a_2}{\mu} + \cdots + \frac{a_m}{\mu}$$

$$= p_1 + p_2 + \cdots + p_m.$$

Zusatz I. Seien $p_1, p_2, \ldots p_m$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $E_1, E_2, \ldots E_m$; wenn eines dieser Ereignisse nothwendig eintreffen muss, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass dies stattfindet, der Einheit oder Gewissheit gleich; daher ist dann

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Zusatz II. Sei p die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E, q jene seines Gegensatzes F; da eines dieser Ereignisse nothwendig eintreffen muss, so ist

$$p + q = 1, \quad q = 1 - p.$$

Anmerkung. Unter *relativer Wahrscheinlichkeit* versteht man jene Wahrscheinlichkeit, welche sich auf eine Gruppe von Ereignissen bezieht, die unter den erwarteten ausgewählt wurden, indem man das Eintreffen der übrigen, die zu dieser Gruppe nicht gehören, ausser Acht lässt.

Absolute Wahrscheinlichkeit nennt man die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ereignisses, wenn man von keinem der andern absieht.

14. **Zweite Regel.** *Die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich seiner absoluten Wahrscheinlichkeit, dividirt durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten jener Ereignisse, mit welchen es zusammengehalten werden soll.*

Beweis. Sei P die relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1, genommen in der Gruppe $E_1\ E_2\ E_3$ der Ereignisse $E_1\ E_2\ E_3\ E_4\ E_5$; ferner seien

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu},\quad p_2 = \frac{\alpha_2}{\mu},\quad p_3 = \frac{\alpha_3}{\mu},\quad p_4 = \frac{\alpha_4}{\mu},\quad p_5 = \frac{\alpha_5}{\mu}$$

die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit P ist dieselbe, welche man haben würde, wenn nur $E_1\ E_2\ E_3$ vorhanden wären; folglich ist

$$P = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{\frac{\alpha_1}{\mu}}{\frac{\alpha_1}{\mu} + \frac{\alpha_2}{\mu} + \frac{\alpha_3}{\mu}} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3}.$$

Beispiel. Es liegen μ Karten, mit $1, 2, \ldots i, \ldots m$ bezeichnet, vor; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i \ldots \alpha_m$ sind die Anzahlen der Blätter jeder Sorte; man verlangt:

1) Die relative Wahrscheinlichkeit, eine mit i bezeichnete Karte zu ziehen, wenn das Eintreffen von Karten ausser Acht gelassen wird, welche höher als mit i bezeichnet sind.

2) Die relative Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer von 1 bis i bezeichneten Karte.

3) Die relative Wahrscheinlichkeit, irgend eine der mit 1 bis $g < i$ bezeichneten Karten zu ziehen.

Es ist

$$1)\ P = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_i},$$

$$2)\ P = \frac{p_1 + \cdots + p_i}{p_1 + \cdots + p_i} = 1,$$

$$3)\ P = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_g}{p_1 + p_2 + \cdots + p_i}.$$

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

15. **Dritte Regel.** *Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, welches aus zwei aufeinanderfolgenden oder gleichzeitigen, unter einander unabhängigen Ereignissen zusammengesetzt ist, kommt gleich dem Producte der einfachen Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.*

Beweis. Es seien E_1, E_2 zwei von einander unabhängige, aufeinanderfolgende oder gleichzeitige Ereignisse, welchen beziehungsweise α_1 und α_2 günstige Fälle unter μ und ν Fällen überhaupt zukommen; es ist ohne weiteres klar, dass dem zusammengesetzten Ereigniss $F = (E_1\ E_2)$ unter $\mu\ \nu$ Gesammtfällen $\alpha_1\ \alpha_2$ Fälle günstig sein werden; daher ist

$$P = \frac{\alpha_1\ \alpha_2}{\mu\ \nu} = \frac{\alpha_1}{\mu} \cdot \frac{\alpha_2}{\nu} = p_1\ p_2.$$

Erste Anmerkung. Die Vereinigung der zweiten und dritten Regel führt häufig leichter zur gesuchten Wahrscheinlichkeit als die directe Rechnung.

Beispiel. Wir hätten mehrere Ereignisse $e_1, e_2 \cdots e_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \cdots p_m$. Die Gesammtzahl aller Fälle sei μ; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ mögen die bezüglichen An-

zahlen der günstigen Fälle sein. Die Wahrscheinlichkeit von e_i ist $p_i = \frac{\alpha_i}{\mu}$.

Dies wäre die directe Rechnung von p_i. Dieselbe ist nicht immer die einfachste; häufig erscheint es vortheilhafter, das Ereigniss e_i von dem Zusammentreffen zweier anderen abhängig zu machen, nämlich:

1) Von dem Eintreffen von e_i in der Gruppe $e_1, e_2, \ldots e_i$; die relative Wahrscheinlichkeit für dieses Eintreffen ist (Nr. 14)

$$P' = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_i}.$$

2) Von der Wahl eines der Ereignisse der Gruppe $e_1, e_2, \cdots e_i$; die Wahrscheinlichkeit dieser Wahl ist

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_i;$$

daher hat man

$$p_i = P P'.$$

Zweite Anmerkung. Besteht das zusammengesetzte Ereigniss in dem Zusammentreffen mehrerer aufeinanderfolgender Ereignisse $E_1, E_2, \cdots$, deren jedes von dem ihm vorausgehenden abhängig ist, so wird man die Wahrscheinlichkeit jedes derselben bilden unter der Voraussetzung, dass alle ihm vorausgehenden eingetroffen sind, und sodann die in solcher Weise bestimmten Wahrscheinlichkeiten multipliciren.

$E_1, E_2, \cdots E_{n-1}, E_n$ seien mehrere Ereignisse, von denen E_1 als erstes, E_2 als zweites, $\cdots E_n$ als $n$tes eintrifft; ist p_1 die Wahrscheinlichkeit von E_1, p_2 jene von E_2, nachdem E_1 eingetroffen ist, $\cdots p_n$ jene von E_n nach dem Eintreffen von $E_1, E_2, \cdots E_{n-1}$, so ist die Wahrscheinlichkeit P des Zusammentreffens dieser Ereignisse

$$P = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Eine Urne enthalte beispielsweise a weisse und b schwarze Kugeln; die Wahrscheinlichkeit des Treffens einer weissen Kugel im ersten Zuge ist $p_1 = \frac{a}{a+b}$; unter der Voraussetzung, dass im ersten Zuge eine weisse Kugel zum Vorschein kam und nicht wieder zurückgelegt wurde, ist die

Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer weissen Kugel im zweiten Zuge $p_2 = \frac{a-1}{a+b-1}$.

Handelt es sich jetzt um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P für das zusammengesetzte Ereigniss, bestehend in dem Eintreffen einer weissen Kugel auf den ersten und zweiten Zug, vorausgesetzt, dass die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wurde, so giebt es $a(a-1)$ günstige unter $(a+b)(a+b-1)$ Fällen überhaupt; daher ist

$$P = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} = p_1 p_2.$$

16. *Sind also zwei Ereignisse in solcher Weise mit einander verknüpft, dass das Eintreffen des ersten auf die Wahrscheinlichkeit des zweiten Einfluss übt, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses, indem man* 1) *die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses und* 2) *die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass nach dem Eintreffen dieses das zweite stattfindet.*

Dieser Grundsatz lässt sich leicht in folgender Weise begründen:

Es sei μ die Anzahl aller Fälle, worunter a dem ersten Ereigniss günstig sind. Befinden sich unter diesen a Fällen b dem zweiten Ereigniss günstige, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des letzteren, wobei auch das erste stattfindet, offenbar $\frac{b}{\mu}$. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses $\frac{a}{\mu}$; die Wahrscheinlichkeit des zweiten nach dem Eintreffen des ersten ist $\frac{b}{a}$, denn nachdem einer der a Fälle eintreffen muss, brauchen auch nur diese beachtet zu werden.

Thatsächlich ist

$$\frac{b}{\mu} = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{b}{a}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Beispiel I. Die Wahrscheinlichkeit, ein Ass aus einem in zwei gleiche Päckchen getheilten Spiele von 32 Blättern zu ziehen, setzt sich zusammen:

1) Aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{16}{32}$, die Hand auf eines der Päckchen zu legen.

2) Aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{16}$, ein Ass aus diesem Päckchen zu ziehen.

Daher ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{16}{32} \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{8}$.

Beispiel II. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit, zweimal nach einander eine weisse Kugel aus einer Urne mit vier weissen und sechs schwarzen Kugeln zu ziehen, wenn die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird.

1) Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{10} = \frac{36}{90}$ des Ziehens einer weissen Kugel im ersten Zug;

2) Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{9} = \frac{12}{36}$ des Ziehens einer weissen Kugel im zweiten Zug.

Daher die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{36}{90} \cdot \frac{12}{36} = \frac{2}{15}$.

17. E, E' seien zwei Ereignisse, (EE') das aus ihrem gleichzeitigen Eintreffen hervorgehende zusammengesetzte Ereigniss; ferner bedeute

P die Wahrscheinlichkeit von (E, E'),
p „ „ „ E,
ϖ „ „ , dass indem E stattfindet,

auch E' gleichzeitig besteht; es ist dann (Nr. 16)

$$P = p\varpi, \text{ woraus } \varpi = \frac{P}{p};$$

die ganze Theorie der Wahrscheinlichkeit von Ursachen und künftigen Ereignissen, gefolgert aus vergangenen Ereignissen, beruht auf dieser Formel.

Man erhält also ϖ, indem man a priori die Wahrscheinlichkeit von (EE') bestimmt und diese durch die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses dividirt.

Verschiedene Beispiele zur Anwendung der vorangehenden Regeln.

Erstes Beispiel. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, es*

werde Ass beim ersten oder zweiten Wurf mit einem gewöhnlichen Würfel von sechs Seiten zum Vorschein kommen.

1) Die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens im ersten Wurf $= \frac{1}{6}$.

2) Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{5}{6}$.

3) Die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens im zweiten Wurf $= \frac{1}{6}$.

4) Die Wahrscheinlichkeit, dass es im ersten Wurf nicht, dagegen im zweiten eintreffen werde, $= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

5) Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens im ersten, und wenn dies nicht, im zweiten Wurf, $P = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

Zweites Beispiel. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit zwei Würfeln in zwei Würfen einmal die Summe sechs oder sieben zu werfen.*

Die Anzahl aller Fälle bei zwei Würfeln ist $6 \cdot 6 = 36$.

Die Summe sieben hat sechs günstige Fälle; ihre Wahrscheinlichkeit ist daher $\frac{6}{36}$.

Die Summe sechs hat fünf günstige Fälle; ihre Wahrscheinlichkeit ist demnach $\frac{5}{36}$.

1) Die Wahrscheinlichkeit, sechs oder sieben auf den ersten Wurf zu treffen, ist $\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

2) Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

3) Die Wahrscheinlichkeit, sechs oder sieben im zweiten Wurf zu treffen, ist $\frac{11}{36}$.

4) Die Wahrscheinlichkeit sechs oder sieben im ersten Wurf nicht, dagegen im zweiten Wurf zu treffen, ist $\frac{25}{36} \cdot \frac{11}{36} = \frac{275}{1296}$.

5) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit setzt sich zusammen

aus der Wahrscheinlichkeit, sechs oder sieben das erste mal, und aus jener, dies das zweitemal zu werfen, ist daher $\frac{11}{36} + \frac{275}{1296} = \frac{671}{1296}$.

Drittes Beispiel. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, in drei Würfen wenigstens einmal Ass zu treffen.*

1) Die Wahrscheinlichkeit Ass in zwei Würfen wenigstens einmal zu werfen, ist dem ersten Beispiel zufolge $\frac{11}{36}$.

2) Die Gegenwahrscheinlichkeit ist $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

3) Die Wahrscheinlichkeit, Ass im dritten Wurf zu treffen, wenn es in den beiden ersten nicht erschienen ist, beträgt $\frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{216}$.

4) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kommt gleich der Summe jener 1) und 3), ist also $\frac{11}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216}$.

Viertes Beispiel. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, in drei Würfen zweimal Ass zu treffen.*

Wir bezeichnen die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit P. Das fragliche Ereigniss kann in zweifacher Art zu Stande kommen:

1) Es fällt ein Ass im ersten, das andere in einem der beiden folgenden Würfe; die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses sei p_1.

2) Im ersten Wurf fällt Ass nicht, beide erscheinen in den beiden folgenden Würfen; wir nennen die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses p_2. Es ist dann

$$P = p_1 + p_2.$$

Bestimmung von p_1.

1] Die Wahrscheinlichkeit, Ass im ersten Wurf zu treffen, ist $\frac{1}{6}$.

2] Die Wahrscheinlichkeit, ein Ass in einem der beiden folgenden Würfe zu treffen, ist $\frac{11}{36}$ (3. Beisp.).

3] Die Wahrscheinlichkeit, ein Ass im ersten und eins

in den beiden darauffolgenden Würfen zu treffen, ist $p_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{216}$.

Bestimmung von p_2.

1] Die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Wurf Ass nicht erscheint, ist $\frac{5}{6}$.

2] Die Wahrscheinlichkeit, in den zwei folgenden Würfen zweimal Ass zu treffen, ist $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

3] Die Wahrscheinlichkeit, Ass im ersten Wurf nicht, dagegen in den beiden folgenden Würfen zu werfen, ist $p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{216}$. Demnach ist

$$P = \frac{11}{216} + \frac{5}{216} = \frac{16}{216}.$$

Fünftes Beispiel. *Sei p die einfache Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und q seine Gegenwahrscheinlichkeit; man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss in n Versuchen l-mal eintreffen werde.*

Die verlangte Wahrscheinlichkeit soll mit $P_{n,\,l}$ bezeichnet werden. Nun kann das fragliche Ereigniss in zweifacher Art zu Stande kommen:

1) Das einfache Ereigniss trifft im ersten Versuche und dann $(l-1)$mal in den folgenden Versuchen ein.

2) Es erscheint im ersten Versuche nicht, dagegen l-mal in den übrigen.

Erste Art. 1] Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen im ersten Versuch ist p.

2) Die Wahrscheinlichkeit des $(l-1)$maligen Eintreffens in den folgenden Versuchen ist $P_{n-1,\,l-1}$.

3] Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss einmal im ersten und $(l-1)$mal in den darauffolgenden Versuchen stattfinden werde, ist $p \cdot P_{n-1,\,l-1}$.

Zweite Art. 1] Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss das erstemal nicht eintrifft, ist q;

2] dass es in den folgenden Versuchen einmal stattfindet, $P_{n-1,\,l}$.

3] Die Wahrscheinlichkeit, dass es im ersten Versuche

nicht, dafür l-mal in den folgenden Versuchen eintrifft, ist $q \cdot P_{n-1,l}$. Demnach hat man

$$P_{n,l} = p\,P_{n-1,\,l-1} + q\,P_{n-1,\,l}.$$

In gleicher Weise bestimmt man die Glieder der rechten Seite und fährt so weiter fort.

Sechstes Beispiel. *A und B spielen miteinander; beide haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, einen Stich zu gewinnen; A hat nur noch einen Stich nothwendig zum Gewinnen des Spieles, B braucht deren zwei; welches sind ihre Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen?*

Mit zwei weiteren Stichen wäre das Spiel zu Ende; macht nämlich A seinen Stich beim ersten Wurf, so endet das Spiel; verliert er das erstemal, so macht B einen seiner Stiche; gewinnt A seinen Stich im zweiten Wurf, so endet das Spiel, macht er ihn nicht, so gewinnt B seinen zweiten Stich und das Spiel endet auch.

A braucht also in zwei Würfen nur einmal zu gewinnen; die Wahrscheinlichkeit, das erstemal zu gewinnen, ist $\frac{1}{2}$; jene, das erstemal nicht, dagegen das zweitemal zu gewinnen, ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist also $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

B müsste zwei auf einanderfolgende Stiche gewinnen; die Wahrscheinlichkeit für ihn, einmal zu gewinnen, ist $\frac{1}{2}$, jene zweimal nach einander zu gewinnen, ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Siebentes Beispiel. *Eine Urne enthält $\mu = \alpha_1 + \alpha_2$ Kugeln; davon sind α_1 mit 1, α_2 mit 2 bezeichnet. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass, indem zweimal nacheinander gezogen wird, 1) zwei mit 1 bezeichnete Kugeln; 2) das erstemal eine mit 1, das zweitemal eine mit 2 bezeichnete Kugel zum Vorschein kommt. Die gezogene Kugel wird nicht zurückgelegt.*

Bezeichnet p_1 die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer Kugel 1 in der ersten Ziehung, so ist $p_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}$.

Bedeutet ferner p_1' die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweitemal eine Kugel 1 erscheinen werde, so ist

$$p_1' = \frac{\alpha_1 - 1}{\mu - 1}.$$

Demnach ist 1) die Wahrscheinlichkeit P_1 des Ziehens einer Kugel 1 in beiden Ziehungen

$$P_1 = \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{\mu(\mu - 1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, das zweitemal eine Kugel 2 zu treffen, ist

$$p_2' = \frac{\alpha_2}{\mu - 1};$$

daher ist 2) die Wahrscheinlichkeit, das erstemal eine Kugel 1, das zweitemal eine Kugel 2 zu ergreifen,

$$P_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\mu(\mu - 1)}.$$

Achtes Beispiel. *Eine Urne enthält a weisse und b schwarze Kugeln, c Kugeln im Ganzen; welches ist die Wahrscheinlichkeit P, in m + n Ziehungen m weisse und n schwarze Kugeln in einer bestimmten Ordnung hervorzuholen, vorausgesetzt, dass die jeweilen gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wird?*

Diese Wahrscheinlichkeit ist (Nr. 15)

$$P = \frac{a(a-1)\cdots(a-m+1)\cdot b(b-1)\cdots(b-n+1)}{c(c-1)\cdots(c-m-n+1)}.$$

Neuntes Beispiel. $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *seien Urnen, wovon die erste* m_1 *Kugeln, darunter* α_1 *weisse, die zweite* m_2 *Kugeln, darunter* α_2 *weisse enthält, u. s. w.;* $p_1, p_2, p_3 \cdots$ *mögen die Wahrscheinlichkeiten sein, dass man die Urne* $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *ergreifen werde; welches ist die Wahrscheinlichkeit P für das Ziehen einer weissen Kugel, wenn man blindlings in eine der Urnen greift?*

Lösung. Sind $p', p'', p''' \cdots$ die Wahrscheinlichkeiten, dass eine weisse Kugel aus der Urne $A_1, A_2, A_3 \ldots$ beziehungsweise gezogen werde, so hat man

$$P = p' + p'' + p''' + \cdots$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Urne A_1 zu treffen, ist p_1; jene, eine weisse Kugel daraus zu ziehen,

$$\varpi_1 = \frac{\alpha_1}{m_1},$$

woraus

$$p' = p_1 \varpi_1.$$

In derselben Weise ergibt sich

$$p'' = p_2 \varpi_2 \text{ u. s. w.},$$

daher ist

$$P = p_1 \varpi_1 + p_2 \varpi_2 + p_3 \varpi_3 + \cdots$$

Zusatz. Ist m die Zahl der Urnen und

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = \frac{1}{m},$$

so folgt

$$P = \frac{1}{m}(\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \cdots).$$

18. Anmerkung. Die Wahrscheinlichkeit P des zusammengesetzten Ereignisses $(E_1, E_2 \cdots E_m)$ ist, wenn $p_1, p_2, \cdots p_m$ die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten der einfachen Ereignisse vorstellen (Nr. 15), $P = p_1\, p_2 \cdots p_m$. Daraus ergibt sich

$$P < p_1 < p_1 p_2 < \cdots;$$

die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses vermindert sich also mit der Zahl der einfachen Ereignisse.

Zusatz I. Für $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = p$ wird

$$P = p^m.$$

Zusatz II. Sei p die Wahrscheinlichkeit von E, q die seines Gegensatzes F, so dass $p + q = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, dass E in $m + n$ Versuchen m mal in gegebener Ordnung eintreffen wird, lautet

$$P = p^m q^n.$$

Zusatz III. Unter den gleichen Voraussetzungen ist die Wahrscheinlichkeit P, dass E in n Versuchen mindestens einmal eintrifft,

$$P = 1 - q^n = 1 - (1 - p)^n. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Denn nachdem $Q = q^n$ die Wahrscheinlichkeit für die $n$malige Wiederholung von F vorstellt, so ist augenscheinlich

$$P + Q = 1, \text{ also } P = 1 - Q.$$

Aus Gleichung (a) folgt

$$n = \frac{\log(1 - P)}{\log(1 - p)}$$

als nöthige Anzahl von Versuchen, damit das mindestens einmalige Eintreffen von E eine gegebene Wahrscheinlichkeit P besitze.

Beispiel. Wie viele Versuche sind erforderlich, um 1 gegen 1 wetten zu können, dass E mindestens einmal eintrifft?

Hier ist

$$P = \frac{1}{2},$$

also

$$n = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log (1 - p)}.$$

Zusatz IV. Es seien p_1 und q_1 die Wahrscheinlichkeiten der entgegengesetzten Ereignisse A_1 und B_1; p_2 und q_2, p_3 und q_3, u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten der entgegengesetzten Ereignisse A_2 und B_2, A_3 und B_3, u. s. w., so dass

$$p_1 + q_1 = 1, \quad p_2 + q_2 = 1, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass A_1 oder B_1 mit irgend einem der andern Ereignisse A_2 und B_2, A_3 und B_3, u. s. w. zusammentreffen werde, ist

$$P = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) \cdots = 1. \quad \ldots \quad \text{(a)}$$

Denn, betrachten wir zunächst nur zwei Paare von Ereignissen, etwa A_1, B_1 und A_2, B_2, so können die zusammengesetzten Ereignisse

$A_1 A_2$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 p_2$,
$A_1 B_2$ „ „ „ $p_1 q_2$,
$B_1 A_2$ „ „ „ $q_1 p_2$,
$B_1 B_2$ „ „ „ $q_1 q_2$

entstehen, und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines derselben ist

$$P = p_1 p_2 + p_1 q_2 + q_1 p_2 + q_1 q_2 = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) = 1.$$

In gleicher Weise ergibt sich für eine beliebige Anzahl von Paaren A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3 u. s. w.

$$P = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2)(p_3 + q_3) \cdots = 1.$$

Anmerkung. Jedes Glied $p_1 p_2 q_3 \cdots$ des Productes (a) bedeutet die Wahrscheinlichkeit einer der Combinationen wie $A_1 A_2 B_3 \cdots$

Zehntes Beispiel. *Eine Lotterie besteht aus k Nummern; in jeder Ziehung werden l davon gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P, dass n dieser Nummern herauskommen werden?*

Bedeutet g die Zahl der günstigen, m die Zahl aller Fälle, so ist, wenn mit lC_n oder kC_n die Anzahl der Combinationen n^{ter} Classe von l, bezw. k Elementen bezeichnet wird,

$$g = l\,C_n = \frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{1\cdot 2\cdots n},$$

$$m = k\,C_n = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1\cdot 2\cdots n},$$

womit sich ergibt

$$P = \frac{g}{m} = \frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{k(k-1)\cdots(k-n+1)}.$$

Elftes Beispiel. *Es liegt eine gewisse Anzahl Paare $2i$ von Päckchen vor, deren jedes r Karten enthält; es sind nämlich*

r	*Karten*	*bezeichnet*	*mit*	$a_1\ b_1\ c_1 \cdots$ . . .	*1)*
r	„	„	„	$a_2\ b_2\ c_2 \cdots$ . . .	*2)*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
r	„	„	„	$a_{2i}\ b_{2i}\ c_{2i} \cdots$ . . .	*2i)*

Nachdem die Karten gemischt worden, bildet man aus denselben zwei gleiche Päckchen M und N von je ir Blättern. Nun wird, nachdem eine der Karten des Päckchens M umgewendet worden, nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass eine Anzahl n näher bezeichneter Karten einer der Gattungen 1, 2, $\cdots$ i (beispielsweise der Gattung i) in dem Päckchen M oder in jenem N enthalten ist.

Lösung. Es sei: g die Wahrscheinlichkeit, dass die umgewendete Karte eine der n bezeichneten ist;

g' die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit oder $g' = 1 - g$;

ϖ die Wahrscheinlichkeit, dass die n Karten im Päckchen M enthalten sind, wenn die umgewendete eine dieser n war;

ϖ' die Wahrscheinlichkeit, dass die n bezeichneten Blätter in eben demselben Päckchen M vorhanden sind, wenn die umgewendete nicht eine der n war;

P die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Päckchen die Karten enthält, nämlich $P = g\varpi + g'\varpi'$ . . (1);

ϖ_1 die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn die umgewendete Karte keine der n bezeichneten ist, das Päckchen N ihrer n enthält;

P' die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Päckchen die n Blätter enthält, nämlich $P' = g'\varpi_1$ . . (2).

Denn, nachdem die umgewendete Karte aus dem Päckchen M herrührt, so beeinflusst sie, wenn sie nicht eine von den bezeichneten ist, die Wahrscheinlichkeit, dass das Päckchen N die n Blätter enthalte, nicht; diese besteht daher einzig und allein in $g'\varpi_1$.

Es sind nun die Grössen g, g', ϖ, ϖ' und ϖ_1 zu ermitteln.

Wir gehen zunächst an die Bestimmung von g und g'.

Da die n Blätter aus der Gruppe i von r Karten genommen sind, so ist g sowie g' eine relative Wahrscheinlichkeit, also

$$g = \frac{n}{r} \quad \text{und} \quad g' = 1 - \frac{n}{r} = \frac{r-n}{r}.$$

Um weiter ϖ und ϖ' zu bestimmen, beachten wir 1), dass, sofern die umgewendete Karte eine von den n bezeichneten ist, die $ir - 1$ übrigen Blätter noch $n - 1$ der bezeichneten Karten enthalten müssen: dies kann auf so viele Arten geschehen, als $ir - 1$ Karten Combinationen $\overline{n - 1}^{\text{ter}}$ Classe geben, die Anzahl der günstigen Fälle ist also

$$(ir-1)\,C_{n-1} = \frac{(ir-1)(ir-2)\cdots(ir-1-(n-1)+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$
$$= \frac{(ir-1)(ir-2)\cdots(ir-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}.$$

Die Anzahl der Combinationen von $2ir - 1$ Blättern in der $\overline{n-1}^{\text{ten}}$ Classe oder die Zahl aller Fälle ist

$$(2ir-1)\,C_{n-1} = \frac{(2ir-1)(2ir-2)\cdots(2ir-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}.$$

Demnach ergibt sich

$$\varpi = \frac{(ir-1)\,C_{n-1}}{(2ir-1)\,C_{n-1}}.$$

2) Ist die umgewendete Karte keine von den bezeichneten, so müssen die $ir - 1$ noch übrigen Blätter alle die n Karten enthalten. Die Zahl aller hiefür günstigen Fälle ist

$$(ir-1)\,C_n = \frac{(ir-1)(ir-2)\cdots(ir-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cdot\frac{ir-n}{n}.$$

Die Zahl aller Fälle beträgt

$$(2\,ir-1)\,C_n = \frac{(2\,ir-1)(2\,ir-2)\cdots(2\,ir-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cdot\frac{2\,ir-n}{n}.$$

Demnach hat man

$$\varpi' = \frac{(ir-1)\,C_n}{(2\,ir-1)\,C_n} = \varpi\cdot\frac{ir-n}{2\,ir-n}.$$

Schliesslich bleibt noch ϖ_1 zu ermitteln. Befinden sich die n Blätter unter den ir Karten des Päckchens N, so hat man als Zahl der günstigen Fälle

$$ir\,C_n = \frac{ir}{n}\cdot\frac{(ir-1)(ir-2)\cdots(ir-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)},$$

als Zahl aller Fälle

$$(2\,ir-1)\,C_n = \frac{2\,ir-n}{n}\cdot\frac{(2\,ir-1)(2\,ir-2)\cdots(2\,ir-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}.$$

Folglich ist

$$\varpi_1 = \frac{ir\,C_n}{(2\,ir-1)\,C_n} = \varpi\,\frac{ir}{2\,ir-n}.$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werthe in die Ausdrücke P und P' erhält man

$$P = \frac{\varpi}{r}\left\{n + \frac{(r-n)(ir-n)}{2\,ir-n}\right\} = \varpi\,\frac{in+ir-n}{2\,ir-n},$$

$$P' = \frac{r-n}{r}\,\frac{ir}{2\,ir-n}\,\varpi = \varpi\,\frac{ir-in}{2\,ir-n}.$$

Zwölftes Beispiel. *Im Piquetspiele für den Kartengebenden die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass er mit dem aus drei Blättern bestehenden Talon mindestens ein Ass aufheben werde, wenn er noch kein Ass in der Hand hält.*

Sei $P = \frac{Z}{N}$ diese Wahrscheinlichkeit.

1) Aufsuchung von N. Da man 12 Blätter in der Hand hat, so bleiben noch $32 - 12 = 20$, worunter sich 4 Ass befinden; drei dieser Blätter bilden den Talon; daher ist die Anzahl N aller möglichen Arten der Zusammensetzung des Talons gleich der Anzahl der Combinationen von 20 Karten zu dreien, also $\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1440.$

2) Aufsuchung von Z. Die Zahl Z ist die Summe dreier Glieder, nämlich:

a_1, der Anzahl jener Fälle, wo ein Ass mit zwei andern Blättern zusammentrifft;

a_2, der Anzahl jener Fälle, wo zwei Ass mit einem andern Blatt zusammenkommen;

a_3, der Anzahl jener Fälle, wo drei Ass sich vereinigen.

Demnach ist

$$Z = a_1 + a_2 + a_3.$$

Im Ganzen besteht das Spiel aus 32 Blättern; folglich gibt es darunter $32 - 4 = 28$ Blätter, die kein Ass enthalten, von denen der Kartengebende zwölf in der Hand hält; es bleiben also noch 16.

1] Die Zahl der Fälle, ein Ass aufzuheben, ist 4.

Die Zahl der Fälle, zwei andere Blätter aufzuheben, ist $\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$. Demnach hat man

$$a_1 = 4 \cdot 120 = 480.$$

2] Die Zahl der Fälle, in welchen zwei Ass aufgehoben werden können, ist $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Die Zahl der Fälle, in welchen ein anderes Blatt aufgehoben werden kann, ist 16. Daraus folgt

$$a_2 = 6 \cdot 16 = 96.$$

3] Die Zahl der Fälle, drei Ass aufzuheben, ist $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$. Daher

$$a_3 = 4.$$

Folglich ist weiter

$$Z = 480 + 96 + 4 = 580.$$

Schliesslich findet man durch Division von Z durch N

$$P = \frac{580}{1440} = \frac{29}{57}.$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist

$$Q = 1 - \frac{29}{57} = \frac{28}{57}.$$

Man kann also 29 gegen 28 wetten, dass der Spieler zum mindesten ein Ass im Talon finden wird.

Anmerkung. *Ebenso bestimme man die Wahrscheinlichkeit für den, welcher die Vorhand hat, dass er mit den drei Blättern des Talons mindestens ein Ass aufheben werde, wenn er noch keins in der Hand hält.*

Durch einen ähnlichen Vorgang ergibt sich

$$P = \frac{232}{323} \text{ und } Q = \frac{91}{323}.$$

Dreizehntes Beispiel. *Die Wahrscheinlichkeit zu finden für den, welcher die Vorhand hat, dass er mit den fünf Blättern des Talons ein Ass und einen König aufheben werde, wenn er weder Ass noch König in der Hand hält.*

Im Talon können die folgenden Combinationen auftreten:

Nr. 1	1 Ass,	1 König,	3 andere Blätter,
„ 2	1 „	2 Könige,	2 „ „
„ 3	1 „	3 „	1 anderes Blatt,
„ 4	1 „	4 „	0 „ „
„ 5	2 „	1 König,	2 andere Blätter,
„ 6	2 „	2 Könige,	1 anderes Blatt,
„ 7	2 „	3 „	0 „ „
„ 8	3 „	1 König,	1 „ „
„ 9	3 „	2 Könige,	0 „ „
„ 10	4 „	1 König,	0 „ „

Unter diesen 10 Fällen haben die folgenden Paare gleichviel Chancen:

Nr. 2 mit Nr. 5,
„ 3 „ „ 8,
„ 4 „ „ 10,
„ 7 „ „ 9.

Es verbleiben daher nur sechs verschiedene Fälle, nämlich

Nr. 1	mit	$\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3} = 3520$	Chancen,
Nr. 2 und Nr. 5, jeder	„	$\frac{4}{1}\cdot\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{12\cdot11}{1\cdot2} = 1584$	„
„ 3 „ „ 8, „	„	$\frac{4}{1}\cdot\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{12}{1} = 192$	„
„ 4 „ „ 10, „	„	$\frac{4}{1}\cdot\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 4$	„

. Nr. 6 mit $\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{12}{1} = 432$ Chancen,

Nr. 7 und Nr. 9, jeder „ $\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 24$ „

Demnach ist

$$Z = 3520 + 2\cdot 1584 + 2\cdot 192 + 2\cdot 4 + 432 + 2\cdot 24 = 7560,$$

$$N = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 15504,$$

$$P = \frac{Z}{N} = \frac{7560}{15504} = \frac{315}{646}, \text{ woraus } Q = \frac{331}{646}.$$

Vierzehntes Beispiel. *Die Wahrscheinlichkeit für „cartes blanches" zu finden.*

$$P = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}$$

$$= \frac{323}{578956} = \frac{1}{1792}, \text{ woraus } Q = \frac{1791}{1792}.$$

II. Capitel.

Wahrscheinlichkeiten wiederholter Versuche.

19. In diesem Capitel soll die Theorie der Wahrscheinlichkeiten in ihren Beziehungen zu den Potenzen und Factoriellen von Polynomen und Binomen, dann zu den Producten binomischer und polynomischer Factoren betrachtet werden; daran mögen sich einige bemerkenswerthe Anwendungen dieser Lehren anschliessen.

I.

Potenzen und Factoriellen des Polynoms und Binoms, Producte binomischer und bolynomischer Factoren.

Den Ereignissen

$$a_1, a_2, \cdots a_l; \quad b_1, b_2, \cdots b_m; \quad c_1, c_2, \cdots c_n; \cdots$$

sollen beziehungsweise die Wahrscheinlichkeiten

$$p_1, p_2, \cdots p_l; \quad q_1, q_2, \cdots q_m; \quad r_1, r_2, \cdots r_n; \cdots$$

entsprechen.

Die Wahrscheinlichkeit P, dass diese Ereignisse in einer bestimmten Aufeinanderfolge zusammentreffen, ist (Nr. 15)

$$P = p_1 p_2 \cdots p_l \cdot q_1 q_2 \cdots q_m \cdot r_1 r_2 \cdots r_n \cdots$$

Wiederholt sich dagegen a_1 l mal, b_1 m mal, c_1 n mal, u. s. w., dann wird

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_l;\ b_1 = b_2 = \cdots = b_m;\ c_1 = c_2 = \cdots = c_n; \cdots$$

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_l;\ q_1 = q_2 = \cdots = q_m;\ r_1 = r_2 = \cdots = r_n; \cdots$$

woraus

$$P = p_1^l q_1^m r_1^n \cdots$$

Soll das zusammengesetzte Ereigniss, um das es sich handelt, bei beliebiger Ordnung der einfachen Ereignisse eintreffen, so wird

$$P = p_1^l q_1^m r_1^n + p_1^l q_1^m r_1^n + \cdots = k p_1^l q_1^m r_1^n;$$

darin bedeutet k, auf wie viele verschiedene Arten die Ereignisse geordnet werden können.

1. Potenzen des Polynoms.

20. Wenn eines der Ereignisse $A, B, C \cdots$, deren Wahrscheinlichkeiten beziehungsweise $p, q, r \cdots$ sind, in jedem Versuche nothwendig eintreffen muss, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eines derselben in einem der Versuche stattfindet,

$$P = p + q + r + \cdots = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich diese Ereignisse μ mal nach einander, gleichgiltig in welcher Ordnung, zutragen, ist

$$P = (p + q + r + \cdots)^\mu = \sum \frac{\mu!}{l!\,m!\,n!\cdots} p^l q^m r^n \cdots = 1. \quad (1)$$

$$\mu = l + m + n + \cdots \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Das allgemeine Glied

$$\varpi = \frac{\mu!}{l!\,m!\,n!\cdots} p^l q^m r^n \cdots \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass in μ Versuchen A l mal, B m mal, C n mal $\cdots$, in welcher Ordnung immer, sich wiederholen werde; denn $k = \frac{\mu!}{l!\,m!\,n!\cdots}$ stellt jetzt die

Anzahl der Permutationen von μ Buchstaben vor, worunter l gleich sind A, m gleich B, n gleich $C \cdots$

2. Potenzen des Binoms.

Sind nur zwei Ereignisse A und B vorhanden, dann drückt $P = p + q = 1$ die Wahrscheinlichkeit aus, dass sich A oder B in einem einzigen Versuche einstellt; die Wahrscheinlichkeit, dass sich diese Ereignisse μ mal nach einander, in welcher Ordnung und Combination immer, zutragen werden, lautet

$$P = (p + q)^\mu = \sum \frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\mu = m + n.$$

Das allgemeine Glied

$$\varpi = \frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} p^m q^n$$

drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass in μ Versuchen A m mal und B n mal in irgendwelcher Ordnung eintreffen werde; denn $k = \frac{\mu!}{m!\,n!}$ bedeutet jetzt die Anzahl Permutationen von μ Buchstaben, worunter m gleich sind A und n gleich B.

3. Factoriellen von Polynomen.

21. Eine Urne enthält im Ganzen s Kugeln, wovon a mit α, b mit β, c mit γ u. s. w. bezeichnet sind.

Es wird μ mal gezogen, ohne dass die gezogene Kugel wieder zurückgelegt würde; man verlangt die Wahrscheinlichkeit ϖ, dass in den μ Ziehungen m Kugeln α, n Kugeln β, l Kugeln γ u. s. w. in irgend welcher Ordnung zum Vorschein kommen; ferner die Wahrscheinlichkeit P, dass in den μ Ziehungen Kugeln $\alpha, \beta, \gamma \cdots$, gleichgiltig in welcher Ordnung und Zahl, gezogen werden.

Wir beginnen mit der Annahme, dass zuerst m Kugeln α, dann n Kugeln β, und endlich l Kugeln γ gezogen werden.

Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer Kugel α im 1. Zug,

p_2 die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer Kugel α im 2. Zug,

p_m die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer Kugel α im m^{ten} Zug.

Ebenso mögen $q_1, q_2, \cdots q_n$ die respectiven Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen einer Kugel β im 1., 2., $\cdots n^{\text{ten}}$ Zug und $r_1, r_2, \cdots r_l$ die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen einer Kugel γ im 1., 2., $\cdots l^{\text{ten}}$ Zug bedeuten.

Unter der Voraussetzung, dass die Kugeln in der bezeichneten Ordnung erscheinen, sind ihre einfachen Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = \frac{a}{s}, \quad p_2 = \frac{a-1}{s-1}, \quad \cdots p_m = \frac{a-m+1}{s-m+1};$$

$$q_1 = \frac{b}{s-m}, \quad q_2 = \frac{b-1}{s-m-1}, \quad \cdots q_n = \frac{b-n+1}{s-m-n+1};$$

$$r_1 = \frac{c}{s-m-n}, \quad r_2 = \frac{c-1}{s-m-n-1}, \quad \cdots r_l = \frac{c-l+1}{s-m-n-l+1};$$

. . . .

Da $\mu = m + n + l + \cdots$, so ist die Wahrscheinlichkeit p für das Zusammentreffen dieser Ziehungen in einer einzigen Ordnung

$$\begin{aligned} p &= p_1 p_2 \cdots p_m \cdot q_1 q_2 \cdots q_n \cdot r_1 r_2 \cdots r_l \cdots \\ &= \frac{a(a-1)\cdots(a-m+1)\cdot b(b-1)\cdots(b-n+1)\cdot c(c-1)\cdots(c-l+1)\cdots}{s(s-1)\cdots(s-\mu+1)} \\ &= \frac{a^{m|-1}\, b^{n|-1}\, c^{l|-1}\cdots}{s^{\mu|-1}}, \end{aligned}$$

demnach

$$\varpi = \frac{\mu!}{m!\,n!\,l!\cdots} \cdot \frac{a^{m|-1}\, b^{n|-1}\, c^{l|-1}\cdots}{s^{\mu|-1}} \quad \ldots \ldots (1)$$

die Wahrscheinlichkeit, m Kugeln α, n Kugeln β, l Kugeln $\gamma \cdots$ in irgend welcher Ordnung zu ziehen.

Ertheilt man den Grössen $m, n, l, \cdots$ alle mit der Gleichung $\mu = m + n + l + \cdots$ verträglichen Werthe von Null an, so drückt die Summe aller hieraus entspringenden Werthe von ϖ das gesuchte P aus, also ist

$$P = \sum \frac{\mu!}{m!\,n!\,l!\cdots} \cdot \frac{a^{m|-1}\, b^{n|-1}\, c^{l|-1}\cdots}{s^{\mu|-1}} \quad \ldots (2)$$

Der Werth von P kann auch auf folgendem Wege abgeleitet werden. Offenbar sind

$$\varpi_1 = \frac{a+b+c+\cdots}{s},$$

$$\varpi_2 = \frac{a+b+c+\cdots-1}{s-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varpi_\mu = \frac{a+b+c+\cdots-\mu+1}{s-\mu+1}$$

die einfachen Wahrscheinlichkeiten, dass in allen μ Ziehungen nur mit $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ bezeichnete Kugeln gezogen werden; die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens ist

$$P = \varpi_1 \varpi_2 \cdots \varpi_\mu = \frac{[a+b+c+\cdots]^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}}. \quad . . (3)$$

Aus der Vergleichung von (2) mit (3) folgt

$$\frac{[a+b+c+\cdots]^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}} = \sum \frac{\mu!}{m!n!l!\cdots} \frac{a^{m|-1} b^{n|-1} c^{l|-1} \cdots}{s^{\mu|-1}}. \quad (4)$$

4. Factoriellen von Binomen.

22. Sind nur zwei Arten von Kugeln mit den Bezeichnungen α und β vorhanden, so übergeht Formel (4) in

$$\frac{(a+b)^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}} = \sum \frac{\mu!}{m!n!} \frac{a^{m|-1} b^{n|-1}}{s^{\mu|-1}} = 1. \quad . . (5)$$

Anmerkung I. Wird die gezogene Kugel jedesmal in die Urne zurückgelegt, so verwandeln sich die Factoriellen $a^{m|-1}, \cdots$ in Potenzen und es wird

$$\frac{(a+b+c+\cdots)^\mu}{s^\mu} = \sum \frac{\mu!}{m!n!l!\cdots} \frac{a^m b^n c^l \cdots}{s^m s^n s^l \cdots}.$$

Mit

$$\frac{a}{s} = p, \quad \frac{b}{s} = q, \quad \frac{c}{s} = r \cdots$$

übergeht letztere Formel in

$$(p+q+r+\cdots)^\mu = \sum \frac{\mu!}{m!n!l!\cdots} p^m q^n r^l \cdots$$

Anmerkung II. Die entwickelte Formel (5) lautet:

$$\frac{(a+b)^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}}$$

$$= \frac{1}{s^{\mu|-1}} \left\{ a^{\mu|-1} + \mu a^{\mu-1|-1} b + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} a^{\mu-2|-1} b^{2|-1} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\mu!}{k!(\mu-k)!} a^{k|-1} b^{\mu-k|-1} + \cdots + \mu a b^{\mu-1|-1} + b^{\mu|-1} \right\} = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit R, in μ Ziehungen mindestens k mit a bezeichnete Kugeln zu treffen, ist hieraus

$$R = \frac{1}{s^{\mu|-1}} \left\{ a^{\mu|-1} + \mu a^{\mu-1|-1} b + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} a^{\mu-2|-1} b^{2|-1} \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{\mu!}{k!\,(\mu-k)!} a^{k|-1} b^{\mu-k|-1} \right\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit Q für das Eintreffen mindestens einer Kugel a ist

$$Q = 1 - \frac{b^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}}.$$

5. Product binomischer Factoren.

23. Es werden $\mu = m + n$ Versuche angestellt; im ersten Versuche haben die entgegengesetzten Ereignisse A und B die Wahrscheinlichkeiten p_1 und q_1, im zweiten die Wahrscheinlichkeiten p_2 und $q_2, \cdots$, im μten Versuche die Wahrscheinlichkeiten p_μ und q_μ; welches ist dann die Wahrscheinlichkeit P für die m-malige Wiederholung von A und die n-malige Wiederholung von B bei beliebiger Aufeinanderfolge dieser Ereignisse?

$p_1 + q_1, p_2 + q_2, \cdots p_\mu + q_\mu$ sind die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen von A oder B beziehungsweise im 1., 2., $\cdots$ μten Versuche; die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden Ereignisse in μ Versuchen in irgend welcher Combination zutragen werden, ist demnach

$$\varpi = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \cdots (p_\mu + q_\mu) \quad \ldots \ldots (1)$$

Die verlangte Wahrscheinlichkeit P wird also die Summe aller jener Glieder von ϖ sein, in welchen m der Factoren $p_1, p_2 \cdots p_\mu$ und n der Factoren $q_1, q_2, \cdots q_\mu$ vorhanden sind. Diese Glieder werden in p und q homogen sein, und zwar in p m, in q n Dimensionen enthalten; ersetzt man also die Buchstaben

$$p_1, p_2, \cdots p_\mu; \quad q_1, q_2, \cdots q_\mu$$

durch

$$p_1 u, p_2 u, \cdots p_\mu u; \quad q_1 v, q_2 v, \cdots q_\mu v,$$

so ergibt sich

$$(p_1 u + q_1 v)(p_2 u + q_2 v) \cdots (p_\mu u + q_\mu v) = \Sigma H u^k v^l.$$

Ist M der Coefficient jenes Gliedes dieser Summe, in welchem $k = m$, $l = n$, so hat man sofort $P = M$.

6. Product polynomischer Factoren.

24. Ein Würfel hat q mit $1, 2, \cdots q$ bezeichnete Seiten. Jede derselben hat ihre besondere, von einem Versuche zum andern variirende Wahrscheinlichkeit. Die obenhin gefallene Nummer wird nach jedem Wurfe notirt. Die eingeschriebenen Nummern werden nun nach μ aufeinanderfolgenden Würfen addirt und man verlangt die Wahrscheinlichkeit P, dass die so erhaltene Summe m sei.

Wir bezeichnen mit $p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \cdots p_1^{(q)}$ die Wahrscheinlichkeiten der Seiten $1, 2, \cdots q$ beim ersten Versuche, mit $p_2^{(1)}, p_2^{(2)}, \cdots p_2^{(q)}$ ihre Wahrscheinlichkeiten beim zweiten, endlich mit $p_\mu^{(1)}, p_\mu^{(2)}, \cdots p_\mu^{(q)}$ ihre Wahrscheinlichkeiten beim μten Versuche.

$$\varpi_1 = p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + \cdots + p_1^{(q)}$$

ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Fallen einer der Seiten $1, 2, \cdots q$ im ersten Wurfe,

$$\varpi_2 = p_2^{(1)} + p_2^{(2)} + \cdots + p_2^{(q)}$$

stellt dieselbe Wahrscheinlichkeit für den zweiten, u. s. w.,

$$\varpi_\mu = p_\mu^{(1)} = p_\mu^{(2)} + \cdots + p_\mu^{(q)}$$

für den μten Wurf vor.

Demnach schliesst

$$\varpi = \varpi_1 \varpi_2 \cdots \varpi_\mu = \left(p_1^{(1)} + p_1^{(2)} + \cdots + p_1^{(q)}\right)\left(p_2^{(1)} + p_2^{(2)} + \cdots + p_2^{(q)}\right) \cdots \left(p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)} + \cdots + p_\mu^{(q)}\right),$$

d. i. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse, die auf alle möglichen Summen bezüglichen Wahrscheinlichkeiten ein, welche in μ Würfen entstehen können.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit P ist folglich die Summe jener Glieder von ϖ, in welchen die Summe der oberen Zeiger m beträgt. Um diese Summe auszuscheiden, ersetzen wir das Product ϖ durch das folgende:

$$\varpi = \{p_1^{(1)} t^1 + p_1^{(2)} t^2 + \cdots + p_1^{(q)} t^q\}$$
$$\{p_2^{(1)} t^1 + p_2^{(2)} t^2 + \cdots + p_2^{(q)} t^q\}$$
$$\cdots \{p_\mu^{(1)} t^1 + p_\mu^{(2)} t^2 + \cdots + p_\mu^{(q)} t^q\} = \Sigma U_i t^i$$

und haben dann

$$P = U_m.$$

Anmerkung. Zerlegt man m auf alle möglichen Arten in μ Summanden kleiner als q, indem man auch auf die Ordnung derselben Rücksicht nimmt, so ergibt sich U_m. Ist nämlich

$$m = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots + \lambda_1,$$
$$m = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \cdots + \lambda_2,$$
u. s. w.

so wird

$$P = U_m = p_1^{(\alpha_1)} p_2^{(\beta_1)} p_3^{(\gamma_1)} \cdots p_\mu^{(\lambda_1)} + p_1^{(\alpha_2)} p_2^{(\beta_2)} p_3^{(\gamma_2)} \cdots p_\mu^{(\lambda_2)} + \cdots$$

II.
Verschiedene Anwendungen der vorangehenden Principien.

25. Lemma. Den Coefficienten k von ϖ^p in der Entwickelung

$$\left\{\varpi + \varpi^2 + \cdots + \varpi^q\right\}^n = \varpi^n \left\{1 + \varpi + \cdots + \varpi^{q-1}\right\}^n$$

zu suchen.

Wir setzen zu diesem Ende $p = n + \alpha$ und fragen nach dem Coefficienten von ϖ^α in der Entwicklung

$$\left.\begin{aligned} \{1+\varpi+\cdots+\varpi^{q-1}\}^n &= \frac{(1-\varpi^q)^n}{(1-\varpi)^n} = (1-\varpi^q)^n (1-\varpi)^{-n} \\ &= \left[1 - n\varpi^q + \frac{n^{2|-1}}{2!}\varpi^{2q} - \frac{n^{3|-1}}{3!}\varpi^{3q} + \cdots\right] \\ &\times \left[1 + n\varpi + \frac{(n+1)^{2|-1}}{2!}\varpi^2 + \frac{(n+2)^{3|-2}}{3!}\varpi^3 + \cdots\right] \end{aligned}\right\} \cdots (a).$$

Unter Beachtung, dass

$$0 + \alpha = \alpha$$
$$q + \alpha - q = \alpha$$
$$2q + \alpha - 2q = \alpha \quad \text{u. s. w.}$$

folgt, dass, um ϖ^α zu erhalten, das erste, zweite, dritte, $\cdots$

Glied des ersten Factors der Reihe nach mit denjenigen Gliedern des zweiten Factors multiplicirt werden müssen, die mit ϖ^{α}, $\varpi^{\alpha-q}$, $\varpi^{\alpha-2q}$ ... behaftet sind; nun lauten die letzterwähnten Glieder

$$(n+\alpha-1)\, C_{\alpha}\, \varpi^{\alpha},$$
$$(n+\alpha-q-1)\, C_{\alpha-q}\, \varpi^{\alpha-q},$$
$$(n+\alpha-2q-1)\, C_{\alpha-2q}\, \varpi^{\alpha-2q} \text{ u. s. w.;}$$

daher lautet das Glied mit ϖ^{α}

$$\{(n+\alpha-1)\, C_{\alpha} - n\, C_1 \cdot (n+\alpha-q-1)\, C_{\alpha-q} + n\, C_2 \cdot (n+\alpha-2q-1)\, C_{\alpha-2q} - \cdots\}\, \varpi^{\alpha},$$

folglich ist

$$k = (n+\alpha-1)\, C_{\alpha} - n\, C_1 \cdot (n+\alpha-q-1)\, C_{\alpha-q} + n\, C_2 \cdot (n+a-2q-1)\, C_{\alpha-2q} - \cdots \quad \text{(I).}$$

Vereinfachung von k.

Nachdem

$$(\alpha-\mu q)+(n-1) = n+\alpha-\mu q-1,$$

so folgt aus der Symmetrie der Binominalcoefficienten

$$(n+\alpha-\mu q-1)\, C_{\alpha-\mu q} = (n+\alpha-\mu q-1)\, C_{n-1}$$
$$= (p-\mu q-1)\, C_{n-1}.$$

Wird in dieser Formel der Reihe nach

$$\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

gesetzt, so findet sich

$$(n+\alpha-1)\, C_{\alpha} = (p-1)\, C_{n-1},$$
$$(n+\alpha-q-1)\, C_{\alpha-q} = (p-q-1)\, C_{n-1},$$
$$(n+\alpha-2q-1)\, C_{\alpha-2q} = (p-2q-1)\, C_{n-1}, \text{ u. s. w.}$$

Dadurch nimmt der Ausdruck für k folgende Gestalt an:

$$k = (p-1)\, C_{n-1} - n C_1 \cdot (p-q-1)\, C_{n-1} + n C_2 \cdot (p-2q-1)\, C_{n-1} - \cdots$$

$$= \frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)} - n\frac{(p-q-1)(p-q-2)\cdots(p-q-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{(p-2q-1)(p-2q-2)\cdots(p-2q-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)} \cdots$$

$$= \frac{(p-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} - n\,\frac{(p-q-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} + \frac{n^{2|-1}}{2!}\,\frac{(p-2q-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} - \cdots$$

Moivre's Problem.

26. *Eine Urne enthält q mit $1, 2, \cdots q$ bezeichnete Kugeln; man zieht eine Kugel, notirt ihre Nummer und legt sie wieder in die Urne zurück; in solcher Weise vollführt man n Ziehungen, addirt die eingeschriebenen Nummern und verlangt nun die Wahrscheinlichkeit Π, dass die so erhaltene Summe gleich p ist.*

Lösung. Erster Fall. *Die einfachen Wahrscheinlichkeiten sind ungleich.*

Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen einer Kugel

$$1, 2, \cdots q$$

mögen beziehungsweise

$$\varpi_1, \varpi_2, \cdots \varpi_q$$

sein.

Die Kugel 1 sei α_1 mal gezogen worden,
„ „ 2 „ α_2 „ „ „
. . . .
„ „ q „ α_q „ „ „

Es ist dann

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q = n \;\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + q\alpha_q = p \;\ldots\ldots\ldots (2)$$

Weiters sollen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \cdots = n \\ \alpha_2 + \beta_2 + \cdots = n \\ \alpha_3 + \beta_3 + \cdots = n \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} (3) \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_1 + 2\beta_1 + \cdots = p \\ \alpha_2 + 2\beta_2 + \cdots = p \\ \alpha_3 + 2\beta_3 + \cdots = p \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} (4)$$

alle möglichen Systeme von Grössen sein, die den Gleichungen (1) und (2) Genüge leisten.

Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Combinationen, die in den n Ziehungen stattfinden können, gibt die Entwickelung

$$(\varpi_1 + \varpi_2 + \cdots + \varpi_q)^n = \sum \frac{n!}{Q_1!\, Q_2! \ldots Q_q!} \varpi_1^{Q_1} \varpi_2^{Q_2} \cdots \varpi_q^{Q_q} \ldots (5)$$

Die fragliche Wahrscheinlichkeit Π wird die Summe jener Glieder dieser Entwickelung sein, in welchen die Grössen $Q_1, Q_2 \cdots Q_q$ den Gleichungen (1) und (2) Genüge leisten. Folglich ist

$$\Pi = N_1 \varpi_1^{\alpha_1} \varpi_2^{\beta_1} \cdots + N_2 \varpi_1^{\alpha_2} \varpi_2^{\beta_2} \cdots + N_i \varpi_1^{\alpha_i} \varpi_2^{\beta_i}. \; (6)$$

Zweiter Fall. *Die einfachen Wahrscheinlichkeiten sind gleich.*

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \cdots = \frac{1}{q}.$$

Der obige Ausdruck vereinfacht sich dann wie folgt:

$$\Pi = N_1 \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_1+\beta_1+\cdots} + N_2 \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_2+\beta_2+\cdots} + \cdots + N_i \left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha_i+\beta_i+\cdots} + \cdots$$
$$= (N_1 + N_2 + \cdots + N_i + \cdots)\frac{1}{q^n} = \frac{k}{q^n}.$$

Aus Gleichung (5) ist ersichtlich, dass die Coefficienten $N_1, N_2, \cdots N_i$ von $\varpi_1, \varpi_2 \cdots \varpi_i$ nicht abhängen und daher dieselben Werthe beibehalten, wenn man

$$\varpi_1 = \varpi,$$
$$\varpi_2 = \varpi^2,$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\varpi_i = \varpi^i$$

setzt. Es wird dann

$$\Pi = N_1 \varpi^{\alpha_1+2\beta_1+\cdots} + N_2 \varpi^{\alpha_2+2\beta_2+\cdots} + \cdots + N_i \varpi^{\alpha_i+2\beta_i+\cdots} + \cdots$$
$$= (N_1 + N_2 + \cdots + N_i + \cdots)\varpi^p = k\varpi^p.$$

Die linke Seite von (5) verwandelt sich durch vorgenannte Annahme in

$$(\varpi + \varpi^2 + \cdots + + \varpi^q)^n = \Sigma H \varpi^h;$$

demnach wird $k = H$ für $h = p$; mit andern Worten, k ist der Coefficient von ϖ^p in der Entwickelung von $(\varpi + \varpi^2 + \cdots + \varpi^q)^n$. Mit Hinblick auf Nr. 25 ist also

$$k = (p-1)\,C_{n-1} - n\,C_1 \cdot (p-q-1)\,C_{n-1} + n\,C_2 \cdot (p-2q-1)\,C_{n-1} - \cdots$$
$$= \frac{(p-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} - n\,\frac{(p-q-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} + \frac{n^{2|-1}}{2!}\cdot\frac{(p-2q-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} - \cdots$$

und durch Einsetzung dieses Werthes in den Ausdruck

$$\Pi = \frac{1}{q^n}\cdot k$$

ergibt sich die für den zweiten Fall geltende Wahrscheinlichkeit.

Zusatz. Dieselbe Formel löst auch folgendes Problem:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit n Würfeln von je q mit 1, 2, ⋯ q bezifferten Seiten die Summe p zu werfen?

27. *Specieller Fall der Moivre'schen Formel für $q = \infty$.*

In Nr. 26 wurde gefunden:

$$\Pi = \frac{1}{q^n}\left\{\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right.$$

$$-n\frac{(p-q-1)(p-q-2)\cdots(p-q-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{(p-2q-1)(p-2q-2)\cdots(p-2q-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{q}\left\{\frac{\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{2}{q}\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right.$$

$$-n\frac{\left(\frac{p}{q}-1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-1-\frac{2}{q}\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-1-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{\left(\frac{p}{q}-2-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-2-\frac{2}{q}\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-2-\frac{n}{q}+\frac{1}{q}\right)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-\cdots\right\}.$$

Wird nun $q = \infty, p = \infty, \frac{p}{q} = s, \frac{1}{q} = ds$ gesetzt, so ergibt sich

$$\Pi = ds\left\{\frac{(s-ds)(s-2ds)\cdots(s-\overline{n-1}\,ds)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right.$$

$$-n\frac{(s-1-ds)(s-1-2ds)\cdots(s-1-\overline{n-1}\,ds)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{(s-2-ds)(s-2-2ds)\cdots(s-2-\overline{n-1}\,ds)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-\cdots\right\},$$

woraus, wenn man die mit ds behafteten Glieder neben den endlichen unterdrückt, weiter folgt

$$\Pi = ds\left\{\frac{s^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-n\frac{(s-1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{(s-2)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-\cdots\right\}.$$

Integrirt man in Bezug auf s innerhalb der Grenzen $\frac{a}{q}$ und $\frac{b}{q}$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit P, dass p zwischen den Grenzen a und b enthalten ist, nämlich

$$P = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \left\{ \left[\left(\frac{b}{q}\right)^n - n\left(\frac{b}{q} - 1\right)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{b}{q} - 2\right)^n - \cdots \right] \right.$$
$$\left. - \left[\left(\frac{a}{q}\right)^n - n\left(\frac{a}{q} - 1\right)^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{a}{q} - 2\right)^n - \cdots \right] \right\}.$$

Beispiel. Unter der Voraussetzung, dass für jede Planetenbahn alle Werthe der Neigung zwischen 0^0 und 100^0 gleich möglich sind, die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass die Summe der Neigungen der zehn Planetenbahnen gegen die Ekliptik zwischen den Grenzen 0^0 und $91{\cdot}4187^0$*) eingeschlossen ist, wobei letztere Zahl die Summe der Neigungen, wie sie im Jahre 1801 bekannt waren, vorstellt.

Den rechten Winkel von 100^0 stelle man sich in eine unbeschränkte Anzahl q gleich grosser Theile eingetheilt, wodurch die Aufgabe auf das vorgenannte Problem zurügeführt erscheint, und zwar hat man $n = 10$, $a = 0$, $b = 91{\cdot}4187^0$, $\frac{b}{q} = \frac{91{\cdot}4187}{100}$, woraus

$$P = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots 10}\left(\frac{91{\cdot}4187}{100}\right)^{10} = \frac{1}{3628800}(0{\cdot}914187)^{10} = 0{\cdot}00000011235.$$

28. **Problem II.** *Eine Lotterie besteht aus s Nummern; davon sind a einziffrig, b zweiziffrig. In jeder Ziehung werden μ Nummern gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Nummern einer Ziehung einziffrig ist?*

Lösung. Diese Aufgabe führt darauf zurück, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, aus einer Urne mit s Kugeln, wovon a weiss, b schwarz sind, in μ Ziehungen mindestens eine weisse Kugel zu ziehen.

Die verlangte Wahrscheinlichkeit ist demnach (Nr. 22)

$$P = \frac{1}{s^{\mu|-1}} \left\{ a^{\mu|-1} + \mu\, a^{\mu-1|-1}\, b \right.$$
$$\left. + \frac{\mu^{2|-1}}{2!}\, a^{\mu-2|-1}\, b^{2|-1} + \cdots + \mu\, a\, b^{\mu-1|-1} \right\}$$
$$= 1 - \frac{b^{\mu|-1}}{s^{\mu|-1}}.$$

*) Die Angaben beziehen sich auf das Decimalmass.

In der gewöhnlichen Zahlenlotterie ist $s = 90$, $a = 9$, $b = 81$, $\mu = 5$, daher die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Ziehung mindestens eine einziffrige Nummer erscheint,

$$P = \frac{1}{90^{5|-1}} \left\{ 9^{5|-1} + 5 \cdot 9^{4|-1} \cdot 81 + 10 \cdot 9^{3|-1} \cdot 81^{2|-1} \right.$$
$$\left. + 10 \cdot 9^{2|-1} \cdot 81^{3|-1} + 5 \cdot 9 \cdot 81^{4|-1} \right\}$$
$$= 1 - \frac{81^{5|-1}}{90^{5|-1}} = 1 - 0{\cdot}582981 = 0{\cdot}417019.$$

Die einzelnen Glieder dieses Ausdruckes:

$$\frac{9^{5|-1}}{90^{5|-1}} = 0{\cdot}000\,003,$$
$$5\,\frac{9^{4|-1} \cdot 81}{90^{5|-1}} = 0{\cdot}000\,232,$$
$$10\,\frac{9^{3|-1} \cdot 81^{2|-1}}{90^{5|-1}} = 0{\cdot}006\,193,$$
$$10\,\frac{9^{2|-1} \cdot 81^{3|-1}}{90^{5|-1}} = 0{\cdot}069\,888,$$
$$5\,\frac{9 \cdot 81^{4|-1}}{90^{5|-1}} = 0{\cdot}340\,703,$$

sind die Wahrscheinlichkeiten von Ziehungen, welche beziehungsweise 5, 4, 3, 2, 1 einziffrige Nummer enthalten.

29. **Problem III.** *Eine berathende Versammlung besteht aus s Mitgliedern; a bilden die Majorität, b die Minorität. Nun werden μ Ziehungen gemacht, um eine μ gliedrige Commission zusammenzusetzen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zum Mindesten $\frac{\mu}{2} + 1 = k$ Namen gezogen werden, die der Majorität angehören?*

Lösung. Die Aufgabe kommt auf die Ermittelung der Wahrscheinlichkeit zurück, in μ Ziehungen mindestens $\frac{\mu}{2} + 1 = k$ weisse Kugeln aus einer Urne zu ziehen, welche s Kugeln enthält, wovon a weiss und b schwarz sind, vorausgesetzt, dass die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt wird.

Es genügt daher, zur Auflösung die vorhergehende Formel (Nr. 28) anzuwenden, dieselbe jedoch nur bis zum Gliede

$\frac{\mu!}{k!\,(\mu-k)!}\,a^{k|-1}\,b^{\mu-k|-1}$ fortzusetzen, wobei k den obigen Werth $\frac{\mu}{2}+1$ hat.

Pascal's Problem*).

30. *Die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, dass von zwei Spielern A und B der erste a, der zweite b Partien zur Beendigung eines Spieles gewinnen werde, in welchem jede Partie von einem der Mitspielenden gewonnen werden muss und wenn A hiefür die Wahrscheinlichkeit p, B die Wahrscheinlichkeit q besitzt.*

Lösung. Die fraglichen Wahrscheinlichkeiten mögen mit P und Q bezeichnet werden; es ist dann $P+Q=1$.

Das Spiel würde in höchstens $a+b-1$ Partien beendet sein; die Aufgabe läuft also darauf hinaus, die Wahrscheinlichkeit P zu bestimmen, dass A, dessen Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen einer Partie p ist, in $\mu=a+b-1$ Partien mindestens a mal gewinnen werde; mithin ist (Nr. 20)

$$P=p^{\mu}+\mu p^{\mu-1}q+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}p^{\mu-2}q^{2}+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(a+1)}{1\cdot 2\cdots(b-1)}p^{a}q^{b-1}.$$

31. **Problem V.** *Eine Urne enthält m Kugeln; es wird ihrer eine gewisse Anzahl gezogen und nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass diese Anzahl gerad oder ungerad ist.*

Die Anzahlen der geraden Combinationen sind

$$\frac{m^{2|-1}}{2!},\ \frac{m^{4|-1}}{4!},\ \ldots,$$

jene der ungeraden

$$m,\ \frac{m^{3|-1}}{3!},\ \ldots;$$

die Gesammtzahl aller Combinationen ist

$$1+m+\frac{m^{2|-1}}{2!}+\frac{m^{3|-1}}{3!}+\cdots-1=(1+1)^{m}-1=2^{m}-1.$$

---

*) Durch dieses Problem, welches von dem Chevalier de Meré Fermat und Pascal vorgelegt und von letzterem zuerst gelöst wurde, hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren Anfang genommen.

Bezeichnen demnach P und Q die verlangten Wahrscheinlichkeiten, so hat man

$$P + Q = 1;\quad P = \frac{1}{2^m - 1}\left\{\frac{m^{2|-1}}{2!} + \frac{m^{4|-1}}{4!} + \cdots\right\},$$

$$Q = \frac{1}{2^m - 1}\left\{\;m\; + \frac{m^{3|-1}}{3!} + \cdots\right\}.$$

Aus den bekannten Identitäten

$$(1+1)^m = 1 + m + \frac{m^{2|-1}}{2!} + \frac{m^{3|-1}}{3!} + \cdots$$

$$(1-1)^m = 1 - m + \frac{m^{2|-1}}{2!} - \frac{m^{3|-1}}{3!} + \cdots$$

folgt durch Addition und Subtraction:

$$2^m = 2\left\{1 + \frac{m^{2|-1}}{2!} + \frac{m^{4|-1}}{4!} + \cdots\right\}$$

$$= 2\left\{m + \frac{m^{3|-1}}{3!} + \frac{m^{5|-1}}{5!} + \cdots\right\}.$$

Durch Anwendung dieser Relationen ergibt sich:

1) $$P = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1},\quad Q = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}.$$

Beachtet man, dass

$$2^{m-1} > 2^{m-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2^m - 1),$$

woraus

$$\frac{2^{m-1}}{2^m - 1} > \frac{1}{2} \quad\text{und}\quad \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1} < \frac{1}{2}$$

sich ergibt, so erkennt man unmittelbar, dass $P < Q$.

2) $$P = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^m - 1)};$$

$$Q = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^m - 1)};$$

je grösser m, desto kleiner ist $\frac{1}{2(2^m - 1)}$; wird daher m sehr gross, so unterscheiden sich P und Q nur unbeträchtlich von $\frac{1}{2}$.

Umgekehrt, je geringer m, desto näher rückt der Bruch

$\frac{1}{2(2^m-1)}$ dem Werthe $\frac{1}{2}$, desto mehr nähert sich P der Null und Q der Einheit.

Endlich für $m = 1$ wird $Q = 1$ und $P = 0$.

32. **Problem VI.** *Aus einer Urne, welche m weisse und m schwarze Kugeln enthält, wird eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen; man verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass darunter eben so viele weiss als schwarz sind.*

Lösung. Die Anzahlen der Fälle, wo von der einen oder der andern Farbe 1, 2, 3, $\cdots$ Kugeln gezogen werden, sind

$$m, \frac{m^{2|-1}}{2!}, \frac{m^{3|-1}}{3!}, \cdots$$

Demnach ergeben sich für die Anzahlen der Fälle, wo

1 weisse und 1 schwarze,
2 „ „ 2 „
3 „ „ 3 „
. . . .

Kugeln gezogen werden, die Ausdrücke:

$$(m)^2, \left(\frac{m^{2|-1}}{2!}\right)^2, \left(\frac{m^{3|-1}}{3!}\right)^2, \cdots,$$

woraus wieder die Gesammtzahl der Fälle, wo gleichviel weisse und schwarze Kugeln zum Vorschein kommen,

$$(m)^2 + \left(\frac{m^{2|-1}}{2!}\right)^2 + \left(\frac{m^{3|-1}}{3!}\right)^2 + \cdots = \frac{(2m)^{m|-1}}{m!} - 1$$

gefunden wird.

Nachdem ausdrücklich vorausgesetzt wurde, dass eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen wird, so ist die Zahl aller möglichen Fälle $2^{2m-1} - 1$, mithin

$$P = \frac{\frac{(2m)^{m|-1}}{m!} - 1}{2^{2m-1} - 1}.$$

Für einen hohen Werth von m kann die Einheit im Zähler und Nenner fortgelassen werden, und man gelangt so zu dem Näherungswerthe

$$P = \frac{\frac{(2m)^{2m|-1}}{m!}}{2^{2m-1}} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}}.$$

Denn es ist

$$\frac{(2m)^{m|-1}}{m!} = \frac{2m(2m-1)\cdots(m+1)\cdot m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots(m-1)m\cdot 1\cdot 2\cdots(m-1)m}.$$

Nun gilt für ein hinreichend grosses m die Näherungsformel*)

$$1\cdot 2\cdots m = m^m e^{-m}\sqrt{2m\pi},$$

woraus sich ergibt:

$$(1\cdot 2\cdots m)^2 = m^{2m} e^{-2m}\, 2m\pi,$$

$$1\cdot 2\cdots 2m = (2m)^{2m} e^{-2m}\sqrt{4m\pi},$$

$$\frac{(2m)^{m|-1}}{m!} = \frac{(2m)^{2m} e^{-2m}\sqrt{4m\pi}}{m^{2m} e^{-2m}\sqrt{2m\pi}\cdot\sqrt{2m\pi}} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{m\pi}}.$$

Demnach ist schliesslich

$$P = \frac{2^{2m}}{\sqrt{m\pi}\cdot 2^{2m-1}} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}}.$$

33. **Problem VII.** *Eine Lotterie besteht aus n Nummern; in jeder Ziehung werden r davon gezogen; die Wahrscheinlichkeit Π zu finden, dass nach i Ziehungen alle n Nummern gezogen sein werden.*

Lösung. Wir bezeichnen mit

$Z_{n,q}$ die Zahl der Fälle, in welchen nach i Ziehungen die Nummern $1, 2, \cdots q$ unter n Nummern gezogen sind;

$Z_{n,q-1}$ die Zahl der Fälle, in welchen nach i Ziehungen die Nummern $1, 2, \cdots q-1$ unter n Nummern gezogen sind;

$Z_{n-1,q-1}$ die Zahl der Fälle, in welchen nach i Ziehungen die Nummern $1, 2, \cdots q-1$ unter $n-1$ Nummern gezogen sind.

$Z_{n,q-1}$ setzt sich aus zwei Theilen zusammen, und zwar:

1) Aus den Combinationen, in welchen neben den Nummern $1, 2, \cdots q-1$ auch noch q vorkommt; die Zahl dieser Combinationen ist $Z_{n,q}$.

2) Aus den Combinationen, in welchen q nicht vorkommt.

Zu letzteren gelangt man, wenn man nach Ausscheidung von q aus den übrigbleibenden $n-1$ Nummern Combinationen

*) Vergl. Note I. am Ende des Buches.

bildet, in welche die Nummern 1, 2, $\cdots q-1$ eintreten; die Zahl dieser Combinationen ist $Z_{n-1,q-1}$.

Demnach ist

$$Z_{n,q-1} = Z_{n,q} + Z_{n-1,q-1},$$

oder

$$Z_{n,q} = Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1}. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Die Zahl der Combinationen, welche in *einer* Ziehung erscheinen können, ist ausgedrückt durch

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r} = \frac{n^{r|-1}}{r!},$$

und da jede Combination der einen Ziehung sich mit jeder der andern Ziehung verbinden kann, so ist die Zahl der möglichen Verbindungen oder Fälle nach i Ziehungen

$$\left(\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}\right)^i. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Wird demnach mit P die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass in i Ziehungen die Nummern 1, 2, $\cdots q$ unter den n Nummern der Lotterie gezogen sein werden, so ist

$$P = \frac{Z_{n,q}}{\left(\frac{n^{r|-1}}{r!}\right)^i}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Aus der Reihe

$$Z_{1,q-1},\ Z_{2,q-1},\ Z_{3,q-1},\ \cdots Z_{n,q-1}$$

folgen die ersten Differenzen:

$$Z_{2,q-1} - Z_{1,q-1} = \Delta Z_{1,q-1},$$
$$Z_{3,q-1} - Z_{2,q-1} = \Delta Z_{2,q-1},$$
$$Z_{4,q-1} - Z_{3,q-1} = \Delta Z_{3,q-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1} = \Delta Z_{n-1,q-1}. \quad \ldots\ldots (4)$$

In dieser Formel (4) setzen wir:

1) $q-1 = 1, 2, 3, \cdots$ und $n = n$,

und erhalten im Hinblick auf die Gleichung (1):

$$\left.\begin{array}{l} Z_{n,2} = \varDelta Z_{n-1,1} \\ Z_{n,3} = \varDelta Z_{n-1,2} \\ Z_{n,4} = \varDelta Z_{n-1,3} \\ Z_{n,5} = \varDelta Z_{n-1,4} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

2) $q - 1 = 1, 2, 3, \cdots$ und $n = n - 1$;

dadurch wird:

$$\left.\begin{array}{l} Z_{n-1,2} = \varDelta Z_{n-2,1} \\ Z_{n-1,3} = \varDelta Z_{n-2,2} \\ Z_{n-1,4} = \varDelta Z_{n-2,3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}; \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

durch Subtraction der Gleichungen (5) und (6) ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta Z_{n-1,2} = \varDelta^2 Z_{n-2,1} \\ \varDelta Z_{n-1,3} = \varDelta^2 Z_{n-2,2} \\ \varDelta Z_{n-1,4} = \varDelta^2 Z_{n-2,3} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (6')$$

3) $q - 1 = 1, 2, 3, \cdots$ und $n = n - 2$;

dadurch wird:

$$\left.\begin{array}{l} Z_{n-2,2} = \varDelta Z_{n-3,1} \\ Z_{n-2,3} = \varDelta Z_{n-3,2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}. \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

durch Zusammenhaltung dieser Gleichungen mit jenen (6) folgt zunächst

$$\begin{array}{l} \varDelta Z_{n-2,2} = \varDelta^2 Z_{n-3,1} \\ \varDelta Z_{n-2,3} = \varDelta^2 Z_{n-3,2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

und durch Subtraction von (6′) weiter

$$\left.\begin{array}{l} \varDelta^2 Z_{n-2,2} = \varDelta^3 Z_{n-3,1} \\ \varDelta^2 Z_{n-2,3} = \varDelta^3 Z_{n-3,2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (7')$$

4) $q - 1 = 1, 2, 3, \cdots$ und $n = n - 3$;

dadurch wird:

$$\begin{array}{l} Z_{n-3,2} = \varDelta Z_{n-4,1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}, \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

woraus sich nach einem ähnlichen Vorgange wie oben weiter ergibt:

$$\Delta^3 Z_{n-3,2} = \Delta^4 Z_{n-4,1}. \quad \ldots \ldots \quad (8')$$

In Folge der Relationen (6′), (7′), (8′) übergehen die Gleichungen (5) in die folgenden:

$$Z_{n,2} = \Delta Z_{n-1,1}$$
$$Z_{n,3} = \Delta Z_{n-1,2} = \Delta^2 Z_{n-2,1}$$
$$Z_{n,4} = \Delta Z_{n-1,3} = \Delta^2 Z_{n-2,2} = \Delta^3 Z_{n-3,1}$$
$$Z_{n,5} = \Delta Z_{n-1,4} = \Delta^2 Z_{n-2,3} = \Delta^3 Z_{n-3,2} = \Delta^4 Z_{n-4,1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus die allgemeine Gleichung fliesst:

$$Z_{n,q} = \Delta^{q-1} Z_{n-q+1,1}. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Blickt man auf Gleichung (3), so erkennt man, dass die Zahl aller möglichen Fälle, wo in i Ziehungen die Nummern $1, 2, 3, \cdots q$ unter den n gezogen sind, oder die Zahl aller in i Ziehungen möglichen Fälle überhaupt, ausgedrückt wird durch

$$\left(\frac{n^{r|-1}}{r!}\right)^i. \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

Dagegen ist die Zahl aller möglichen Fälle, wo in i Ziehungen Nummer 1 nicht erscheint, gleich der Zahl aller Fälle, wo die Nummern $1, 2, \cdots q$ unter $n - 1$ Nummern gezogen werden, also

$$\left(\frac{(n-1)^{r|-1}}{r!}\right)^i. \quad \ldots \ldots \quad (\beta)$$

Demnach ist die Zahl $Z_{n,1}$ der Fälle, wo in i Ziehungen die Nummer 1 zum Vorschein kommt, gleich der Zahl (α) aller auf $1, 2, \cdots q$ und n Nummern bezüglichen weniger der Zahl (β) jener Fälle, wo 1 nicht gezogen wird; daher

$$Z_{n,1} = \left(\frac{n^{r|-1}}{r!}\right)^i - \left(\frac{(n-1)^{r|-1}}{r!}\right)^i = \frac{\Delta\,[(n-1)^{r|-1}]^i}{(1\cdot 2\cdots r)^i}. \quad (10)$$

Vertauschen wir hierin n mit $n - q + 1$, so wird weiter

$$Z_{n-q+1,1} = \frac{\Delta\,[(n-q)^{r|-1}]^i}{(1\cdot 2\cdots r)^i},$$

und im Hinblick auf Formel (9)

$$Z_{n,q} = \Delta^{q-1}\frac{\Delta\,[(n-q)^{r|-1}]^i}{(1\cdot 2\cdots r)^i} = \frac{\Delta^q\,[(n-q)^{r|-1}]^i}{(1\cdot 2\cdots r)^i}. \quad (11)$$

Durch Einführung dieses Resultats in Gleichung (3) erhält man

$$P = \frac{\Delta^q [(n-q)^{r|-1}]^i}{[n^{r|-1}]^i} = \frac{\Delta^q [s^{r|-1}]^i}{[n^{r|-1}]^i}, \ldots\ldots . (a)$$

wenn $n - q = s$ gesetzt wird.

Wir betrachten jetzt die Reihe

$$\begin{aligned}
[s^{r|-1}]^i &= [(n-q)^{r|-1}]^i = u \\
[(s+1)^{r|-1}]^i &= [(n-q+1)^{r|-1}]^i = u_1 \\
[(s+2)^{r|-1}]^i &= [(n-q+2)^{r|-1}]^i = u_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(s+q-1)^{r|-1}]^i &= [(n-1)^{r|-1}]^i = u_{q-1} \\
[(s+q)^{r|-1}]^i &= [n^{r|-1}]^i = u_q;
\end{aligned}$$

für das Anfangsglied ihrer q^{ten} Differenzenreihe gilt der Ausdruck

$$\Delta^q u = u_q - q u_{q-1} + \frac{q^{2|-1}}{2!} u_{q-2} - \cdots \mp q u_1 \pm u,$$

also ist

$$\Delta^q [s^{r|-1}]^i = [n^{r|-1}]^i - q[(n-1)^{r|-1}]^i + \frac{q^{2|-1}}{2!}[(n-2)^{r|-1}]^i$$
$$- \cdots \mp q[(n-q+1)^{r|-1}]^i \pm [(n-q)^{r|-1}]^i.$$

Substituirt man diesen Werth in die Formel (a), so ergibt sich

$$P = 1 - \frac{q}{1}\left[\frac{n-r}{n}\right]^i + \frac{q^{2|-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)^{2|-1}}{n^{2|-1}}\right]^i$$
$$- \frac{q^{3|-1}}{3!}\left[\frac{(n-r)^{3|-1}}{n^{3|-1}}\right]^i + \cdots,$$

und schliesslich, wenn man $q = n$ setzt:

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left[\frac{n-r}{n}\right]^i + \frac{n^{2|-1}}{2!}\left[\frac{(n-r)^{2|-1}}{n^{2|-1}}\right]^i$$
$$- \frac{n^{3|-1}}{3!}\left[\frac{(n-r)^{3|-1}}{n^{3|-1}}\right]^i + \cdots \qquad \text{(b)}$$

Beispielsweise für $n = 90$, $r = 5$, $i = 100$ erhält man $\Pi = 0 \cdot 7410 > \frac{7}{10}$ und um $\frac{2}{10}$ grösser als $\frac{1}{2}$.

34. **Problem VIII.** *Eine Lotterie besteht aus n Nummern, in jeder Ziehung wird eine davon gezogen. Es soll die Wahrscheinlichkeit Π gefunden werden, dass in i Ziehungen alle Nummern erschienen sind.*

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit P, dass die Nummern $1, 2, \cdots q$ unter n Nummern in i Ziehungen gezogen werden, wenn jede Ziehung aus r Nummern besteht, hat zum Ausdruck (Gleichung (a), Nr. 33)

$$P = \frac{\Delta^q\,[(n-q)(n-q-1)\cdots(n-q-r+1)]^i}{[n(n-1)\cdots(n-r+1)]^i}.$$

Für $r=1$ wird $n-q-r+1=n-q$ und $n-r+1=n$, also

$$P = \frac{\Delta^q[n-q]^i}{n^i}.$$

Durch Betrachtung der Reihe

$$(n-q)^i = u$$
$$(n-q+1)^i = u_1$$
$$(n-q+2)^i = u_2$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(n-1)^i = u_{q-1}$$
$$n^i = u_q$$

ergibt sich

$$\Delta^q u = u_q - q u_{q-1} + \frac{q^{2|-1}}{2!} u_{q-2} - \cdots \mp q u_1 \pm u,$$

also

$$\Delta^q (n-q)^i = n^i - q(n-1)^i + \frac{q^{2|-1}}{2!}(n-2)^i - \frac{q^{3|-1}}{3!}(n-3)^i + \cdots,$$

so dass

$$P = 1 - q\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{q^{2|-1}}{2!}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i - \cdots.$$

Nimmt man schliesslich $q=n$, so wird das gesuchte

$$\Pi = 1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n^{2|-1}}{2!}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i - \quad \cdots \quad (1)$$

Anmerkung. Wir betrachten die Identität:

$$\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right]^n = 1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n^{2|-1}}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i} - \ldots (2)$$

Auf der rechten Seite von (1) ist das $(m+1)^{\text{te}}$ Glied mit $\left(\frac{n-m}{n}\right)^i$, in der Formel (2) ist dasselbe Glied mit $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$ behaftet; die Coefficienten beider Glieder sind gleich. Durch Uebergang zu den Logarithmen wird

$$l\cdot\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = i\,l\cdot\left(1-\frac{m}{n}\right) = -\frac{mi}{n} - \frac{1}{2}\frac{m^2 i}{n^2} - \cdots,$$

$$l\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi} = mi\,l\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{mi}{n} - \frac{1}{2}\frac{mi}{n^2} - \cdots;$$

nimmt man sich also vor, Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$ zu vernachlässigen, so kann man sich der Näherungsformel bedienen

$$\Pi = \left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

35. **Problem IX.** *Unter der Voraussetzung, dass n sehr gross ist, die Zahl i der Ziehungen zu bestimmen, nach welchen die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Nummern erschienen sind, gleich kommt* $\frac{1}{k}$.

Lösung. Es soll der Formel (a) zufolge die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{k} = \left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right)^n;$$

aus derselben folgt nach einfacher Rechnung

$$i = \frac{l\cdot\left[1-\sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right]}{l\cdot(n-1)-l\cdot n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Um die Rechnung nach Formel (b) bequem ausführen zu können, setzen wir

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1-z, \qquad \frac{1}{k} = (1-z)^n, \qquad \sqrt[n]{k} = \frac{1}{1-z};$$

aus letztgeschriebener Gleichung folgt

$$\frac{1}{n}\,l\cdot k = l\cdot\frac{1}{1-z} = -\,l\cdot(1-z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots$$

Wir bedienen uns weiter der Substitution

$$y = \frac{1}{n}\,l\cdot k,$$

mit welcher

$$y = z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots$$

folgt, und entwickeln z nach Potenzen von y; zunächst wird allgemein

$$z = Ay + By^2 + \cdots$$

und zur Bestimmung der Coefficienten führt die identische Gleichung

$$y = (Ay + By^2 + \cdots) + \frac{1}{2}(Ay + By^2 + \cdots)^2 + \cdots$$

oder

$$y = Ay + (B + \frac{1}{2}A^2)y^2 + \cdots,$$

aus welcher unmittelbar folgt:

$$A = 1,$$

$$B + \frac{1}{2}A^2 = 0, \qquad B = -\frac{1}{2};$$

demnach ist

$$z = y - \frac{1}{2}y^2 + \cdots = \frac{1}{n}l\cdot k - \frac{1}{2}\frac{(l\cdot k)^2}{n^2} + \cdots = \frac{l\cdot k}{n}\left(1 - \frac{l\cdot k}{2n}\right).$$

Wir haben also

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z = 1 - \frac{l\cdot k}{n}\left(1 - \frac{l\cdot k}{2n}\right),$$

$$1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = \frac{l\cdot k}{n}\left(1 - \frac{l\cdot k}{2n}\right),$$

$$l\cdot\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) = l\cdot l\cdot k - l\cdot n + l\cdot\left(1 - \frac{l\cdot k}{2n}\right)$$

$$= l\cdot l\cdot k - l\cdot n - \frac{l\cdot k}{2n} - \frac{(l\cdot k)^2}{4n^2} - \cdots$$

$$= l\cdot l\cdot k - l\cdot n - \frac{l\cdot k}{2n} \,\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Weiter ist bekanntlich

$$l\cdot(n-1) - l\cdot n = l.\frac{n-1}{n} = l\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\cdots - (\beta)$$

Durch Einführung der Werthe (α) und (β) übergeht die Formel (b) in die folgende:

$$i = \frac{l\cdot n - l\cdot l\cdot k + \frac{1}{2n}l\cdot k}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}} = \frac{n[l\cdot n - l\cdot l\cdot k] + \frac{1}{2}l\cdot k}{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{n[l\cdot n - l\cdot l\cdot k]\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)l\cdot k}{1 - \frac{1}{4n^2}}.$$

36. **Problem X.** *Eine Lotterie besteht aus einer sehr grossen Anzahl n von Nummern; in jeder Ziehung werden fünf davon gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach i Ziehungen alle gezogen sein werden?*

Lösung. In der Formel

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-r}{n}\right)^i + \frac{n^{2|-1}}{2!}\left(\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right)^i - \cdots,$$

welche für den Fall giltig ist, wo in jeder Ziehung r Nummern gezogen werden, hat man jetzt $r = 5$ zu setzen; die fragliche Wahrscheinlichkeit ist sonach

$$\Pi = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n^{2|-1}}{2!}\left(\frac{(n-5)(n-6)}{n(n-1)}\right)^i - \cdots$$

Zu einer Näherungsformel gelangt man durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit der Entwickelung

$$\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n^{2|-1}}{2!}\left(\frac{n-5}{n}\right)^{2i} - \cdots$$

Wegen der bei einem hohen n nur geringen Abweichung der correspondirenden Glieder kann

$$\Pi = \left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n \text{(*)}$$

gesetzt werden. Soll $\Pi = \frac{1}{2}$ werden, so muss i den Betrag erreichen:

$$i = \frac{\log \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2} - 1}}{\log \frac{n}{n-5}};$$

für $n = 90$ ist $i = 85{\cdot}204$.

37. **Problem XI.** *Ein sehr dünnes Stäbchen von der Länge l wird in drei Stücke a, b, c zerbrochen, so dass $a + b + c = l$.*

---

*) Die Formel hätte strenge Giltigkeit, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Nummer während einer Ziehung constant gleich $\frac{5}{n}$ bliebe. Denn dann wäre die Wahrscheinlichkeit, dass diese Nummer in i Ziehungen mindestens einmal erscheint, gleich $1 - \left(1 - \frac{5}{n}\right)^i = 1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i$, und die Wahrscheinlichkeit, dass dies mit mit allen n Nummern geschieht, gleich $\left[1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right]^n$.

In der That aber wechselt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer bestimmten Nummer während einer Ziehung zwischen $\frac{5}{n}$ und $\frac{1}{n-4}$.

Man verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass sich aus diesen drei Stücken ein Dreieck bilden lässt.

Lösung. Wir denken uns das Stäbchen in $2n$ gleiche Theile getheilt und nehmen vorderhand an, dass nur in den Theilungspunkten, und zwar in jedem mit derselben Leichtigkeit, der Bruch eintreten könne. Bezeichnen wir mit x, y, z die Anzahlen der Theilchen, welche auf die drei Stücke entfallen, so wird sich aus letzteren ein Dreieck bilden lassen, wenn

$$x < y + z, \qquad y < x + z, \qquad z < x + y;$$

eine der drei Zahlen x, y, z kann mit Hilfe der Gleichung

$$x + y + z = 2n$$

eliminirt werden; führen wir dies mit der Grösse z aus, so lauten die obigen Beziehungen:

$$x < n, \qquad y < n, \qquad x + y > n.$$

Denselben wird offenbar durch folgende Werthsysteme von x und y Genüge geleistet:

$$\begin{array}{llll} x = 2, & y = n - 1; & & \\ x = 3, & y = n - 1, & n - 2; & \\ x = 4, & y = n - 1, & n - 2, & n - 3; \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ x = n - 1, & y = n - 1, & n - 2, & n - 3, \cdots 2. \end{array}$$

Die Anzahl dieser günstigen Combinationen ist daher

$$Z = 1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{n-2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Dagegen sind folgende Combinationen möglich:

$$\begin{array}{ll} x = 1, & y = 1, 2, 3, \cdots 2n - 2; \\ x = 2, & y = 1, 2, 3, \cdots 2n - 3; \\ x = 3, & y = 1, 2, 3, \cdots 2n - 4; \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x = 2n - 2, & y = 1. \end{array}$$

Die Zahl dieser Combinationen ist

$$N = 1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{2n-2} = \frac{(2n-2)(2n-1)}{2}.$$

Lässt man in dem Bruche

$$\frac{Z}{N} = \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-2)(2n-1)}$$

die Zahl n unendlich wachsen, um der Bedingung Rechnung zu tragen, dass das Stäbchen in jedem Punkte seiner Länge mit derselben Leichtigkeit brechen könne, so ist der Grenzwerth die gesuchte Wahrscheinlichkeit, also

$$P = \frac{1}{4}.$$

38. **Problem XII.** *Eine Ebene ist durch parallele Linien MM', NN', ... von constantem Abstande a in gleiche Theile getheilt. Man wirft auf dieselbe einen sehr dünnen Cylinder von der Länge $2r$ mindestens gleich a. Es ist die Wahrscheinlichkeit P zu suchen, dass der Cylinder irgend eine der Parallelen schneiden werde.*

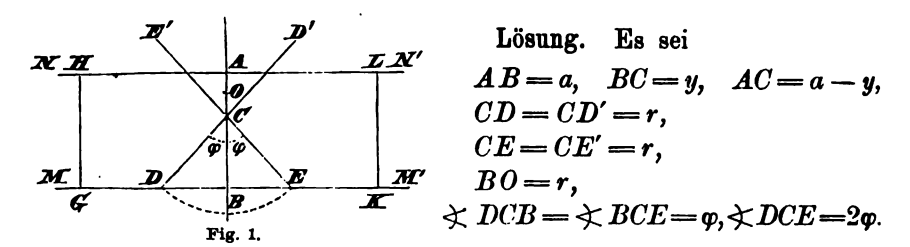


Fig. 1.

Lösung. Es sei

$AB = a, \quad BC = y, \quad AC = a - y,$
$CD = CD' = r,$
$CE = CE' = r,$
$BO = r,$
$\sphericalangle DCB = \sphericalangle BCE = \varphi, \sphericalangle DCE = 2\varphi.$

Gesetzt, der Mittelpunkt des Cylinders falle nach C; dreht man ihn um diesen Punkt, so wird MM' von der Hälfte CD innerhalb des Winkels CDE geschnitten, desgleichen von der Hälfte CD'. Demnach ist 4φ ein Mass für die Zahl der Fälle, in welchen der Cylinder, während sein Mittelpunkt in C liegt, die Linie MM' trifft. Lässt man ferner C um dy gegen O gleiten, so ist dy ein Mass für die Zahl der Punktlagen und mithin $4\varphi \cdot dy$ ein Mass für die Zahl der Fälle, wo MM' während dieser Bewegung von dem Cylinder geschnitten wird. Daraus ergibt sich $\int_0^r 4\varphi dy$ als Zahl der Fälle, wo der Cylinder während der Bewegung seines Mittelpunktes über AB, und zwar von B bis O, die Gerade MM' trifft. Nun ist $y = r\cos\varphi$, und wenn man auf das Integral den Vorgang der partiellen Integration anwendet, so wird:

$$\int 4\varphi dy = 4\varphi y - 4\int y d\varphi = 4\varphi y - 4\int r \cos\varphi d\varphi$$
$$= 4\varphi y - 4r \sin\varphi + \text{const.},$$
$$\int_0^r 4\varphi dy = [4\varphi y - 4r \sin\varphi]_r - [4\varphi y - 4 \sin\varphi]_0 .$$

Den Grenzen von $y\,(r, 0)$ entsprechen die Grenzen $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ von φ, wie man sich entweder durch Betrachtung der Gleichung $y = r\cos\varphi$ oder der Figur selbst leicht überzeugt; daher ist weiter

$$\int_0^r 4\varphi dy = [4 \cdot 0 \cdot r - 4r \sin 0] - \left[4\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 4r \sin\frac{\pi}{2}\right] = 4r.$$

Wird ferner

$$a - y = y'$$

gesetzt, so ist die Zahl der Fälle, wo der Cylinder NN' trifft, gleich

$$\int_0^r 4\varphi dy' = 4r,$$

somit die Zahl der Fälle, wo er MM' oder NN' schneidet,

$$4r + 4r = 8r.$$

Die Zahl aller von dem Cylinder eingenommenen Lagen, wenn sein Mittelpunkt $AB = a$ durchläuft und in jeder Lage desselben eine volle Umdrehung beschrieben wird, hat $2\pi a$ zum Masse; folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{8r}{2\pi a} = \frac{4r}{\pi a}.$$

Anmerkung. Es sei $GK = HL = h$; nimmt der Mittelpunkt des Cylinders alle Lagen innerhalb des Rechteckes $GKLH$ ein, so ist die Zahl der Fälle, wo der Cylinder MM' oder NN' trifft, dargestellt durch

$$h \cdot 8r \quad \text{. . . . .} \quad \text{(a)}$$

39. **Problem XIII.** *Eine Ebene ist durch zwei zu einander rechtwinkelige Systeme paralleler Geraden in gleiche Theile getheilt. Das erste System* MM', NN', $\cdots$ *hat den constanten Abstand* a, *das zweite,* PP', QQ', $\cdots$ *den constanten Abstand* b. *Ein Cylinder, dessen Länge* $2r$ *höchstens gleich ist* b *oder* a, *wird auf diese Ebene geworfen. Es soll die Wahrscheinlichkeit* P *gefunden werden, dass er dabei den Um-*

fang irgend eines der Rechtecke $AEUF$ trifft, in welche die Ebene durch die beiden Systeme von Parallelen getheilt wird.

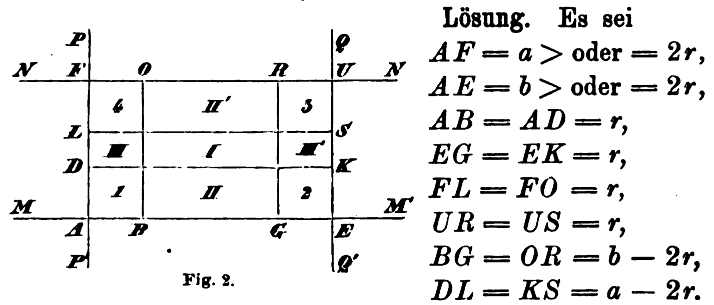


Fig. 2.

Lösung. Es sei

$AF = a >$ oder $= 2r$,
$AE = b >$ oder $= 2r$,
$AB = AD = r$,
$EG = EK = r$,
$FL = FO = r$,
$UR = US = r$,
$BG = OR = b - 2r$,
$DL = KS = a - 2r$.

Fällt der Mittelpunkt in das Rechteck $AEUF$, so wird er sich in einem der Rechtecke I, II, II', III, III' oder in einem der Quadrate 1, 2, 3, 4 befinden.

1) Fällt er nach I, so trifft er keine der Geraden, weder aus dem System MM', noch aus dem System PP'.

2) Fällt er nach II oder II', dann ist die Zahl der Fälle, wo er MM' oder NN' trifft, nach der Formel (a), Nr. 37:

$$8r(b - 2r) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

3) Fällt er nach III oder III', so ist die Zahl der Fälle, wo er PP' oder QQ' schneidet, nach der nämlichen Formel

$$8r(a - 2r) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

4) Es bleibt noch das Verhalten des Cylinders zu untersuchen, wenn sein Mittelpunkt in eines der vier Quadrate 1, 2, 3, 4 fällt.

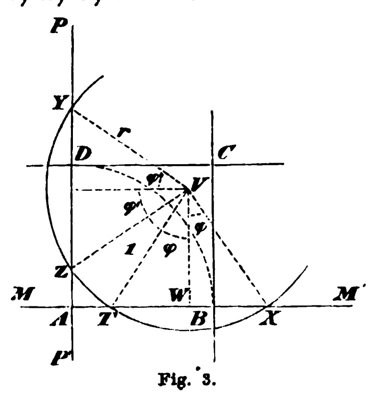


Fig. 3.

Zu diesem Ende beschreiben wir aus dem Punkte A mit dem Halbmesser r einen Viertelkreis. Befindet sich der Mittelpunkt des Cylinders innerhalb dieses Quadranten, so trifft der Cylinder während der Drehung in allen Lagen des Umfang des grossen Rechteckes. Die Zahl der Fälle, in welchen dies stattfindet, ist

$$2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi^2 r^2}{2}.$$

Kommt der Mittelpunkt des Cylinders nach $V(x, y)$ ausserhalb des Quadranten zu liegen, dann kann der Cylinder während der Drehung immer nur eine der Geraden MM', PP' treffen. Zur Aufsuchung der Zahl der Fälle, wo dies eintrifft, beschreiben wir aus V als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r den Kreisbogen $YZTX$. Wir setzen $\sphericalangle TVX = 2\varphi$, $YVZ = 2\varphi'$; der Cylinder trifft die Gerade MM' nur, wenn er sich innerhalb des des Winkels 2φ, und die Gerade PP' nur, wenn er sich innerhalb $2\varphi'$ befindet.

Ist daher der Mittelpunkt in V, so ist die Zahl der Fälle, wo eine der Cylinderhälften MM' oder PP' trifft, $2(\varphi + \varphi')$; daher die Zahl der Fälle, wo die eine und die andere Hälfte dies thut, $4(\varphi + \varphi')$.

Bezeichnen wir mit $dxdy$ das Element der ausserhalb des Quadranten liegenden Quadratfläche, so ist die auf alle Lagen von V bezügliche Anzahl der Fälle

$$4\int\int(\varphi + \varphi')\, dx\, dy \; \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Mit Benützung der Relationen

$$AW = x = r\cos\varphi', \qquad dx = -r\sin\varphi'\, d\varphi'$$

$$VW = y = r\cos\varphi, \qquad dy = -r\sin\varphi\, d\varphi$$

übergeht das Integral (α) in

$$4r^2\int\int(\varphi + \varphi')\sin\varphi\sin\varphi'\, d\varphi\, d\varphi' \; \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen beachten wir, dass für alle Punkte ausserhalb des Quadranten

$$x \geqq \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Für B und D ist

$$y = 0, \qquad x = r,$$

$$y = r, \qquad x = 0.$$

Den Grenzen von $y\ (0, r)$ entsprechen jene von $\varphi \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Wegen

$$x \geqq \sqrt{r^2 - y^2}$$

muss

$$r\cos\varphi' \geqq \sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi} \geqq r\sin\varphi \geqq r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

also

$$\varphi' \leqq \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Die Grenzen von φ' sind also $\frac{\pi}{2} - \varphi$ und 0.

Daher ist die gesuchte Anzahl von Fällen gleich

$$4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin\varphi'\, d\varphi'.$$

Durch Integration in Bezug auf φ' erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \varphi') \sin\varphi'\, d\varphi' &= \varphi \int \sin\varphi'\, d\varphi' + \int \varphi' \sin\varphi'\, d\varphi' \\ &= - \varphi \cos\varphi' - \varphi' \cos\varphi' + \int \cos\varphi'\, d\varphi' \\ &= - \varphi \cos\varphi' - \varphi' \cos\varphi' + \sin\varphi' + C \\ &= - (\varphi + \varphi') \cos\varphi' + \sin\varphi' + C, \end{aligned}$$

woraus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin\varphi'\, d\varphi' = - \frac{\pi}{2} \sin\varphi + \cos\varphi + \varphi.$$

Folglich ist weiter

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi + \varphi') \sin\varphi'\, d\varphi' = - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin\varphi\, d\varphi.$$

Die einzelnen Integrale ergeben folgende Werthe:

1) $\int \sin^2\varphi\, d\varphi = - \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1}{2} \varphi,$

woraus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2) $\int \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2\varphi,$

woraus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}.$$

3) $\int \varphi \sin\varphi d\varphi = -\varphi\cos\varphi + \int \cos\varphi d\varphi = -\varphi \cos\varphi + \sin\varphi$,

woraus
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin\varphi d\varphi = 1.$$

Demnach ist

$$4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} (\varphi+\varphi')\sin\varphi' d\varphi' = 4r^2\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{r^2}{2}\left(12-\pi^2\right).$$

Durch Hinzufügung des früher berechneten $\frac{\pi^2 r^2}{2}$ erhalten wir die volle für das Quadrat 1 geltende Anzahl von Fällen, nämlich $6r^2$, und durch Multiplication mit 4 die auf die Quadrate 1, 2, 3, 4 bezügliche Anzahl, nämlich $24r^2 \cdots$ (3)

Die vollständige Anzahl der Fälle (1), (2), (3)

$8r(b-2r)+8r(a-2r)+24r^2 = 8(b+a)r-8r^2 = 8r(a+b-r)$ ist der Ausdruck für alle Fälle, wo der Cylinder die Parallelensysteme MM' und PP' trifft.

Die Zahl aller möglichen Lagen des Cylinders wird aber gemessen durch das Product aus 2π (einer Umdrehung entsprechend) mit der Fläche von $AEUF$ (der Anzahl der Lagen entsprechend, welche der Cylindermittelpunkt einnehmen kann), also durch $2\pi\, ab$; daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Eintheilungsgeraden der Ebene trifft

$$P = \frac{8r(a+b-r)}{2\pi\, ab} = \frac{4r(a+b-r)}{\pi ab}.$$

40. **Problem XIV.** *Von einem Haufen von x Münzstücken wird blindlings eine Anzahl hinweggenommen; man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass diese Anzahl gerad oder ungerad ist**).

*) Man vergleiche den Lösungsgang dieses Problems mit jenem des identischen Problems V (Nr. 31.)

Lösung. Es sei:
C_x die Summe der Fälle, in welchen die Anzahl gerad ist;
C_x' die Summe der Fälle, in welcher sie ungerad ist;
P_x die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl gerad ist;
P_x' die Wahrscheinlichkeit, dass sie ungerad ist.

Man hat dann

$$P_x = \frac{C_x}{C_x + C'_x}, \qquad P_x' = \frac{C_x'}{C_x + C_x'} \dots\dots \quad (1)$$

Bestimmung von C_x *und* C_x'. x ist die Anzahl der Münzstücke; nimmt man noch eines hinzu, so ist C_{x+1} die Summe der Fälle, wo die Anzahl der hinweggenommenen Münzen gerad, C'_{x+1} die Summe der Fälle, wo sie ungerad ist.

Im ersten Falle setzt sich C_{x+1} zusammen:

1) Aus der vorhergehenden Anzahl der geraden Fälle;
2) aus der vorhergehenden Anzahl der ungeraden Fälle, denn jeder dieser Fälle gibt in Verbindung mit dem neuen Münzstück eine gerade Combination.

Daher ist

$$C_{x+1} = C_x + C_x', \text{ woraus } \Delta C_x = C_x' \text{ und } \Delta^2 C_x = \Delta C_x' \quad . (2)$$

Im zweiten Falle besteht C'_{x+1}

1) aus der vorigen Anzahl der ungeraden Fälle;
2) aus der vorigen Anzahl der geraden Fälle;
3) aus der Einheit, weil das neue Münzstück auch allein genommen werden kann.

Daher ist

$$C'_{x+1} = C_x' + C_x + 1$$

oder

$$\Delta C'_x = C_x + 1 \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

und wegen der Gleichung (2)

$$\Delta^2 C_x = C_x + 1 \dots\dots\dots\dots \quad (3')$$

Nun ist

$$\Delta^2 C_x = \Delta C_{x+1} - \Delta C_x = C_{x+2} - C_{x+1} - (C_{x+1} - C_x),$$

folglich hat man im Hinblick auf die vorangehende Gleichung

$$C_{x+2} - 2C_{x+1} + C_x = C_x + 1$$
$$C_{x+2} = 2C_{x+1} + 1$$

und nach Vertauschung von $x + 1$ mit x:

$$C_{x+1} = 2C_x + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Zum Zwecke der Integration schreiben wir Gleichung (4) in der Form

$$C_{x+1} - C_x = C_x + 1$$

oder

$$\Delta C_x = C_x + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

und setzen

$$C_x + 1 = y,$$

woraus

$$C_{x+1} + 1 - (C_x + 1) = \Delta y$$

oder

$$C_{x+1} - C_x = \Delta C_x = \Delta y$$

folgt; mithin ist im Hinblicke auf (4′)

$$\Delta y = y. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4'')$$

Dieses Verhalten von y veranlasst zu der Annahme

$$y = a^x,$$

aus welcher sich ergibt:

$$\Delta y = a^{x+1} - a^x = a^x(a - 1).$$

Substituirt man dies in die Gleichung (4″), so erhält man

$$a^x (a - 1) = a^x$$

oder

$$a^x (a - 2) = 0,$$

woraus

$$a = 2$$

und somit

$$y = A 2^x$$

gefunden wird; A ist eine noch zu bestimmende Constante.

Wir haben nun

$$C_x = A 2^x - 1; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

da für $x = 1$ $C_x = 0$ wird, also

$$0 = 2A - 1,$$

sein muss, so folgt für A der Werth

$$A = \frac{1}{2},$$

womit endlich

$$C_x = 2^{x-1} - 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Weiter wurde gefunden

$$C_x' = \Delta C_x, \text{ also } C_x' = \left[2^{\overline{x-1}+1} - 1\right] - \left[2^{x-1} - 1\right]$$
$$= 2^x - 2^{x-1}$$
$$= 2^{x-1}(2-1)$$
$$= 2^{x-1}.$$

Die Anzahl aller Fälle wird

$$C_x + C_x' = 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} = 2^x - 1.$$

Daher ist endlich

$$P_x = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}, \qquad P_x' = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1},$$

woraus sofort zu entnehmen ist, dass

$$P_x' > P_x.$$

41. **Problem XV.** *Vier Spieler A_1, A_2, A_3, A_4 spielen in folgender Weise:*

1) A_1 spielt mit A_2: gewinnt er, so gehört ihm der Einsatz. Wenn er weder gewinnt noch verliert, so fährt er fort mit A_2 zu spielen, bis einer von den beiden gewinnt. Verliert er, dann

2) spielt A_2 mit A_3 und wenn A_2 gewinnt, so gehört ihm der Einsatz. Wenn er weder gewinnt noch verliert, so fährt er fort, mit A_3 zu spielen, bis einer von beiden gewinnt. Verliert er, dann

3) spielt A_3 mit A_4 und so fort, bis einer den ihm folgenden besiegt.

Die Wahrscheinlichkeit für einen der Spieler, gegen den anderen zu gewinnen, ist $\frac{1}{3}$; jene weder zu gewinnen noch zu verlieren ist gleichfalls $\frac{1}{3}$; man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Spieler in der xten Partie das Spiel gewinnt.

Lösung. Es sei: $\overset{4}{P}_x$ die Wahrscheinlichkeit, dass A_4 das Spiel nach x Partien gewinnt;

$\overset{3}{P}_x$ die Wahrscheinlichkeit, das A_3 dass Spiel nach x Partien gewinnt, u. s. w.

Es ist $$\overset{4}{P}_x = \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Denn das Ereigniss, von welchem $\overset{4}{P}_x$ die Wahrscheinlichkeit ist, kann auf zwei Arten stattfinden:

1) Wenn A_4 das Spiel nach $x - 1$ Partien gewinnt, und wenn er auch noch in der $x$ten Partie gewinnt; dieses zusammengesetzte Ereigniss hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}$.

2) Wenn A_3 das Spiel nach $x - 1$ Partien gewonnen hat und wenn A_4 die x^{te} Partie gewinnt; dies zusammengesetzte Ereigniss hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1}$.

Die Gleichung (1) kann der Reihe nach auf alle vier Spieler angewendet werden, und man erhält so das folgende Gleichungssystem:

$$\overset{4}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (1')$$

$$\overset{3}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

$$\overset{2}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{1}{P}_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

$$\overset{1}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{1}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1}. \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

Wir wollen $\overset{4}{P}_x$ bestimmen; zunächst ist

$$\overset{4}{P}_x - \frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} = \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-1};$$

durch Vertauschung von x mit $x - 1$ und Multiplication mit $\frac{1}{3}$ ergibt sich:

$$-\frac{1}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{1}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2} = -\frac{1}{3^2}\overset{3}{P}_{x-2};$$

addirt man diese Gleichung zu der vorigen und beachtet dabei die Gleichung (2′), so folgt:

$$\overset{4}{P}_x - \frac{2}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{1}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2} = \frac{1}{3}\left[\overset{3}{P}_{x-1} - \frac{1}{3}\overset{3}{P}_{x-2}\right] = \frac{1}{3^2}\overset{2}{P}_{x-2}.$$

Verfährt man mit dieser Gleichung in derselben Weise, so erhält man mit Beachtung von (3′):

$$\overset{4}{P}_x - \frac{3}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{3}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2} - \frac{1}{3^3}\overset{4}{P}_{x-3} = \frac{1}{3^2}\left[\overset{2}{P}_{x-2} - \frac{1}{3}\overset{2}{P}_{x-3}\right] = \frac{1}{3^3}\overset{1}{P}_{x-3}.$$

Endlich ergibt sich durch nochmalige Wiederholung derselben Transformation unter Berücksichtigung der Gleichung (4'):

$$\overset{4}{P}_x - \frac{4}{3}\overset{4}{P}_{x-1} + \frac{6}{3^2}\overset{4}{P}_{x-2} - \frac{4}{3^3}\overset{4}{P}_{x-3} + \frac{1}{3^4}\overset{4}{P}_{x-4}$$
$$= \frac{1}{3^3}\left[\overset{1}{P}_{x-3} - \frac{1}{3}\overset{1}{P}_{x-4}\right] = \frac{1}{3^4}\overset{4}{P}_{x-4}.$$

Nachdem diese Gleichung in Beziehung auf die P linear ist, so können wir $\overset{4}{P}_x = a^x$ setzen, woraus durch Vertauschung von x mit $x-1$, $x-2\cdots$ folgt:

$$\overset{4}{P}_{x-1} = a^{x-1} = \frac{\overset{4}{P}_x}{a};\ \overset{4}{P}_{x-2} = a^{x-2} = \frac{\overset{4}{P}_x}{a^2};\ \cdots$$

durch Einführung dieser Werthe in obige Gleichung gelangt man zu der Beziehung:

$$a^x\left\{1 - \frac{4}{3a} + \frac{6}{3^2a^2} - \frac{4}{3^3a^3} + \frac{1}{3^4a^4}\right\} = a^x\frac{1}{3^4a^4},$$

welche nach Unterdrückung des Factors a^x in jene

$$\left(1 - \frac{1}{3a}\right)^4 = \left(\frac{1}{3a}\right)^4$$

übergeht, aus welcher man wieder schliesst:

$$(3a-1)^4 - 1 = 0.$$

Nun sei

$$3a - 1 = \alpha,$$

so bedeutet α eine der Wurzeln der Gleichung $\alpha^4 = 1$; weiter ergibt sich

$$a = \frac{1}{3}(1+\alpha).$$

Nachdem $\alpha^4 = 1$ bei der Auflösung vier Werthe:

$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = -1,\quad \alpha_3 = \sqrt{-1},\quad \alpha_4 = -\sqrt{-1}$$

gibt, so wird auch a vier entsprechende Werthe: a_1, a_2, a_3, a_4 annehmen; folglich ist

$$\overset{4}{P}_x = C_1a_1{}^x + C_2a_2{}^x + C_3a_3{}^x + C_4a_4{}^x \ \ldots\ldots \quad (2)$$

Die imaginären Werthe von α können ersetzt werden durch

$$\alpha_3 = \cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2},$$
$$\alpha_4 = \cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2}.$$

Zu ganz conformen Gleichungen würde man für $\overset{3}{P}_x$, $\overset{2}{P}_x$, $\overset{1}{P}_x$ gelangen.

Noch handelt es sich um Ermittelung der Constanten in der Gleichung (2).

Zu diesem Zwecke bemerken wir*):

Nach $x = 1, 2, 3, 4$ Partien zu gewinnen hat A_1 die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3^2}, \quad \frac{1}{3^3}, \quad \frac{1}{3^4};$$

nach $x = 2, 3, 4, 5$ Partien zu gewinnen hat A_2 die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{3^2}, \quad \frac{2}{3^3}, \quad \frac{3}{3^4}, \quad \frac{4}{3^5};$$

nach $x = 3, 4, 5, 6$ Partien zu gewinnen hat A_3 die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{3^3}, \quad \frac{3}{3^4}, \quad \frac{6}{3^5}, \quad \frac{10}{3^6};$$

nach $x = 4, 5, 6, 7$ Partien zu gewinnen hat A_4 die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{3^4}, \quad \frac{4}{3^5}, \quad \frac{10}{3^6}, \quad \frac{15}{3^7}.$$

Diese letzten Werthe werden zur Bestimmung der Constanten in der Gleichung (2) dienen; führt man sie nämlich in letztere Gleichung ein, so ergeben sich die vier in Bezug auf die Unbekannten C_1, C_2, C_3, C_4 linearen Gleichungen:

$$\frac{1}{3^4} = C_1 a_1^4 + C_2 a_2^4 + C_3 a_3^4 + C_4 a_4^4,$$

$$\frac{4}{3^5} = C_1 a_1^5 + C_2 a_2^5 + C_3 a_3^5 + C_4 a_4^5,$$

$$\frac{10}{3^6} = C_1 a_1^6 + C_2 a_2^6 + C_3 a_3^6 + C_4 a_4^6,$$

$$\frac{15}{3^7} = C_1 a_1^7 + C_2 a_2^7 + C_3 a_3^7 + C_4 a_4^7.$$

42. **Problem XVI.** *Zwei Spieler A und B, deren Geschicklichkeiten in dem Verhältnisse $p:q$ zu einander stehen,*

---

*) Die nun folgenden Werthe ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen (4'), (3'), (2'), (1').

spielen mit einander; auf eine Anzahl von x Partien fehlen dem A noch y, dem B noch $x - y$ Partien zum Gewinnen. Es sollen die Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, welche die Spieler für das Gewinnen des Spieles haben.

Lösung. Es sei $u_{y,x}$ die Wahrscheinlichkeit für B, das Spiel zu gewinnen oder die x Partien zu machen, wenn er deren y bereits gewonnen hat.

$\frac{p}{p+q} = b$ ist die Wahrscheinlichkeit, welche A,

$\frac{q}{p+q} = a$ die Wahrscheinlichkeit, welche B für das Gewinnen einer Partie zukommt.

B kann das Spiel im Augenblick der gegenwärtigen y-ten Partie gewinnen,

1) indem er diese Partie gewinnt, in welchem Falle ihm nachher nur mehr $x - 1$ Partien zu erzielen bleiben; die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen der Partie ist a; jene, $x - 1$ Partien zu machen, $u_{y,\,x-1}$; die Wahrscheinlichkeit also, das Spiel zu gewinnen, indem er die gegenwärtige Partie gewinnt, $a\,u_{y,\,x-1}$.

Es kann aber B das Spiel im Augenblicke der gegenwärtigen Partie gewinnen,

2) indem er diese Partie verliert, vorausgesetzt, dass er unabhängig hievon das Spiel gewinnt; er befindet sich dann auf derselben Stufe, als ob er nur $y - 1$ Partien gewonnen und $x - 1$ Partien zum Zwecke des Gewinnens zu erzielen hätte; die Wahrscheinlichkeit für das Verlieren einer Partie ist b; jene, trotz dieses Verlustes das Spiel zu gewinnen, $u_{y-1,x-1}$, endlich die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse $b\,u_{y-1,\,x-1}$.

Demnach ist

$$u_{y,x} = b \cdot u_{y-1,\,x-1} + a \cdot u_{y,\,x-1} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Anmerkung. 1) Für $y = 0$ wird $u_{0,x} = 0$.

Denn wenn B keine Partie gewonnen, so ist seine Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen der Nulle gleich.

Ebenso ist $u_{0,\,x-1} = 0$.

2) Ist $y = 1$, so hat man zufolge (1)

$$u_{1,x} = a\,u_{1,\,x-1} + b\,u_{0,\,x-1},$$

also

$$u_{1,x} = a\,u_{1,x-1} \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

3) Ist $x = y$, so muss B nothwendig gewinnen; mithin ist

$$u_{y,y} = 1.$$

3) Auch für $x = y - 1$ hat man

$$u_{y,y-1} = 1;$$

denn aus (1) folgt

$$u_{y,y} = a\,u_{y,y-1} + b\,u_{y-1,y-1} = a\,u_{y,y-1} + b,$$

woraus man unter Beachtung, dass $a + b = 1$, thatsächlich erhält

$$u_{y,y-1} = 1.$$

5) Für $x = y - 2$ folgt aus (1).

$$u_{y,y-1} = a\,u_{y,y-2} + b\,u_{y-1,y-2} = a\,u_{y,y-2} + b = 1,$$

daher ist

$$u_{y,y-2} = 1, \text{ u. s. w.}$$

6) Für $x - 1$ wird $u_{y,1} = 1$; denn nach (1) ist

$$u_{y,1} = a\,u_{y,0} + b\,u_{y-1,0} = a + b = 1,$$

weil offenbar $u_{y,0} = 1$; $u_{y-1,0} = 0$ ist.

Als Integral der Gleichung (1) wurde gefunden:

$$u_{y,x} = \left(\frac{p}{p+q}\right)^{x-1}\left\{1 + \frac{p}{q}(x-1) + \frac{p^2}{q^2}\frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{p^{y-1}}{q^{y-1}}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-y+1)}{1 \cdot 2\,.\,.\,(y-1)}\right\}.$$

43. **Problem XVII.** *A und B besitzen jeder k Münzen; die Wahrscheinlichkeit, dass A eine Partie gewinnt, ist* $\frac{a}{a+b+c}$, *dass B sie gewinnt,* $\frac{b}{a+b+c}$, *dass keiner von beiden gewinnt,* $\frac{c}{a+b+c}$; *das Spiel endet, sobald einer der beiden Spieler k Münzen gewonnen hat. Welche Wahrscheinlichkeit hat A für das Gewinnen des Spieles in dem Momente, wo er x Münzen besitzt, und welche vor dem Beginne des Spieles?*

Erste Lösung. Es sei y_x die Wahrscheinlichkeit für A, das Spiel zu gewinnen, in dem Augenblicke, wo er x Münzen besitzt.

A kann die nächste Partie gewinnen, verlieren, oder

weder gewinnen noch verlieren; die Wahrscheinlichkeiten hiefür sind $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$; er besitzt nach der Partie beziehungsweise $x+1$, $x-1$ oder x Münzen; seine Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen, verwandeln sich daher nach der Partie beziehungsweise in y_{x+1}, y_{x-1}, y_x.

Folglich hat man

$$y_x = \frac{a}{a+b+c} y_{x+1} + \frac{b}{a+b+c} y_{x-1} + \frac{c}{a+b+c} y_x.$$

Daraus ergibt sich nach und nach

$$(a+b+c)\, y_x = a y_{x+1} + b y_{x-1} + c y_x,$$
$$(a+b)\, y_x = a y_{x+1} + b y_{x-1},$$
$$\left(1+\frac{b}{a}\right) y_x = y_{x+1} + \frac{b}{a} y_{x-1},$$

oder, indem $\frac{b}{a} = \gamma$ gesetzt wird:

$$y_{x+1} = (1+\gamma)\, y_x - \gamma y_{x-1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die Gleichung (1) ist nun zu integriren. Dabei beachten wir, dass

für $x = 0$ auch $y_0 = 0$;
„ $x = 2k$ $y_{2k} = 1$;

denn im ersten Falle kann *A* nicht gewinnen, weil bereits *B* gewonnen hat; im zweiten Falle ist er nothwendig der Gewinnende, weil *B* keine Münzen mehr besitzt.

Setzt man nun

$$x = 1, 2, 3 \cdots,$$

so ergibt sich der Reihe nach:

$$y_2 = (1+\gamma)\, y_1,$$
$$y_3 = (1+\gamma)\, y_2 - \gamma y_1 = (1+\gamma+\gamma^2)\, y_1,$$
$$y_4 = (1+\gamma)\, y_3 - \gamma y_2 = (1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3)\, y_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_x = (1+\gamma+\gamma^2+\cdots+\gamma^{x-1})\, y_1 = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma}\cdot y_1.$$

Zur Bestimmung von y_1 setzen wir $x = 2k$, wodurch

$$y_{2k} = \frac{1-\gamma^{2k}}{1-\gamma}\, y_1 \text{ und } y_1 = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^{2k}}$$

erhalten wird. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für A, das Spiel zu gewinnen, wenn er x Münzen besitzt:

$$y_x = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1-\gamma^{2k}} = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{2k}},$$

und die bezügliche Wahrscheinlichkeit vor dem Spiele, wo $x = k$ ist:

$$y_k = \frac{1-\gamma^k}{1-\gamma^{2k}} = \frac{1}{1+\gamma^k}.$$

Für B ist diese Wahrscheinlichkeit

$$z_k = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^k}, \quad y_k + z_k = 1.$$

Anmerkung. Die Rechnung bleibt dieselbe, wenn die Spieler nicht die gleiche Anzahl Münzen besitzen. Nur in der Bestimmung von y_1 tritt eine Aenderung ein; es wird nämlich, wenn $A \ldots \lambda$ und $B \ldots \mu$ Münzen besitzt,

$$y_{\lambda+\mu} = 1 = \frac{1-\gamma^{\mu+\lambda}}{1-\gamma} y_1,$$

woraus

$$y_1 = \frac{1-\gamma}{1-\gamma^{\lambda+\mu}}$$

und

$$y_x = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{\lambda+\mu}}, \quad y_\lambda = \frac{1-\gamma^\lambda}{1-\gamma^{\lambda+\mu}}$$

gefunden wird. Dagegen ist für B die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens

$$z_\mu = \frac{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^\mu}{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\lambda+\mu}}.$$

Zweite Lösung. Nachdem die Gleichung (1) linear ist, so kann sie durch die Substitution

$$y_x = a^x$$

integrirt werden; man erhält auf diese Weise

$$a^{x+1} = (1+\gamma)\, a^x - \gamma a^{x-1},$$

$$a^2 - (1+\gamma)\, a + \gamma = 0,$$

$$a = \frac{1+\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\gamma)^2}{4} - \gamma} = \frac{1+\gamma}{2} \pm \frac{1-\gamma}{2},$$

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \gamma,$$

$$y_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x = C_1 + C_2 \gamma^x.$$

Zur Bestimmung der Constanten bedienen wir uns der beiden particulären Integrale

$$y_0 = 0,$$
$$y_{2k} = 1,$$

welche zu den Gleichungen führen:

$$0 = C_1 + C_2,$$
$$1 = C_1 + C_2 \gamma^{2k},$$

aus denen

$$C_2 = -C_1, \qquad C_1 = \frac{1}{1-\gamma^{2k}}$$

gefunden wird; daher ist

$$y_x = C_1(1-\gamma^x) = \frac{1-\gamma^x}{1-\gamma^{2k}}.$$

Dritte Lösung. Mit Hilfe der generirenden Functionen. Wir haben die Beziehung gefunden:

$$y_{x+1} = (1+\gamma)\, y_x - \gamma\, y_{x-1};$$

durch beiderseitige Multiplication mit t^x ergiebt sich zunächst

$$y^{x+1} t^x = (1+\gamma)\, y_x\, t^x - \gamma\, y_{x-1}\, t^x,$$

welche Gleichung wir in der Form

$$\frac{1}{t}\,(y_{x+1}\, t^{x+1}) = (1+\gamma)\, y_x\, t^x - \gamma\, t\,(y_{x-1}\, t^{x-1})$$

schreiben wollen. Setzen wir nun $x = 1, 2, 3, \cdots$, so ergibt sich

$$\frac{1}{t}\, y_2\, t^2 = (1+\gamma)\, y_1\, t^1 - \gamma\, t\, y_0\, t^0,$$

$$\frac{1}{t}\, y_3\, t^3 = (1+\gamma)\, y_2\, t^2 - \gamma\, t\, y_1\, t^1,$$

$$\frac{1}{t}\, y_4\, t^4 = (1+\gamma)\, y_3\, t^3 - \gamma\, t\, y_2\, t^2,$$

und durch Addition dieser Gleichungen folgt weiter:

$$\frac{1}{t}\,(y_2\, t^2 + y_3\, t^3 + \cdots) = (1+\gamma)\,\{y_1\, t^1 + y_2\, t^2 + \cdots\}$$
$$- \gamma\, t\,(y_0\, t^0 + y_1\, t^1 + y_2\, t^2 + \cdots).$$

Offenbar ist nun

$$z = \overset{\infty}{\underset{0}{S}} y_x t^x = y_0 t^0 + y_1 t^1 + y_2 t^2 + \cdots$$

die generirende Function der gesuchten Wahrscheinlichkeit, d. h. jene Function, in welcher der Coefficient des mit t^x behafteten Gliedes die fragliche Wahrscheinlichkeit vorstellt. Durch Einführung von z übergeht die obige Gleichung in

$$\frac{1}{t}(z - y_0 t^0 - y_1 t^1) = (1 + \gamma)(z - y_0 t^0) - \gamma t z;$$

in Folge des Umstandes, dass $y_0 = 0$, reducirt sich diese Gleichung auf

$$z - y_1 t = z(1 + \gamma) t - \gamma t^2 z,$$

woraus

$$z = \frac{y_1 t}{(1-t)(1-\gamma t)} = y_1 t (1 + t + t^2 + \cdots)(1 + \gamma t + \gamma^2 t^2 + \cdots)$$
$$= \cdots + y_1 (1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{x-1}) t^x + \cdots$$

gefunden wird. Mithin hat man, der obigen Bemerkung entsprechend,

$$y_x = y_1 (1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{x-1})$$
$$= y_1 \frac{1 - \gamma^x}{1 - \gamma}.$$

Daraus findet sich wie früher

$$y_{2k} = 1 = \frac{1 - \gamma^{2k}}{1 - \gamma} y_1,$$

$$y_x = \frac{1 - \gamma^x}{1 - \gamma^{2k}},$$

$$y_k = \frac{1 - \gamma^k}{1 - \gamma^{2k}} = \frac{1}{1 + \gamma^k}.$$

44. **Problem XVIII.** *A und B besitzen m und n Spielmarken; sie spielen; am Ende einer gewissen Zeit haben sie deren x und y; die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens einer Partie ist für A gleich* $\frac{x}{x+y}$, *für B gleich* $\frac{y}{x+y}$. *Das Spiel endet, sobald einer der Spieler alle Spielmarken des andern gewonnen hat. Welche Wahrscheinlichkeit hat A für das Gewinnen des Spieles?*

Erste Lösung. Mit Hilfe der generirenden Function der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Wir bedienen uns der Abkürzung $m + n = x + y = k$. Es ist dann:

u_x die gesuchte Wahrscheinlichkeit;

$\frac{x}{k}$ die Wahrscheinlichkeit für A, die gegenwärtige Partie zu gewinnen;

u_{x+1} „ „ A, nach dieser Partie das Spiel zu gewinnen;

$\frac{k-x}{k}$ die Wahrscheinlichkeit für A, diesmal zu verlieren;

u_{x-1} „ „ A, trotz dieses Verlustes das Spiel zu gewinnen. Man hat also

$$u_x = \frac{x}{k} u_{x+1} + \frac{k-x}{k} u_{x-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Durch Multiplication mit $k t^x$ wird

$$k u_x t^x = x u_{x+1} t^x + k u_{x-1} t^x - x u_{x-1} t^x.$$

Nimmt man in dieser Gleichung $x = 1, 2, 3, 4, \cdots$ und addirt die so entstandenen Gleichungen, so gelangt man zu der Beziehung:

$$\begin{aligned} k(u_1 t^1 + u_2 t^2 + \cdots) &= u_2 t + 2 u_3 t^2 + 3 u_4 t^3 + \cdots \\ &\quad + k t (u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) \\ &\quad - t (u_0 + 2 u_1 t + 3 u_2 t^2 + \cdots) \\ &= (u_1 + 2 u_2 t + 3 u_3 t^2 + \cdots) - (u_1 + u_2 t + u_3 t^2 + \cdots) \\ &\quad + k t (u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) \\ &\quad - t[(u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots) + (u_1 t + 2 u_2 t^2 + \cdots)]. \end{aligned} \quad (2)$$

In diese wollen wir die generirende Function unserer fraglichen Wahrscheinlichkeit einführen, nämlich

$$z = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \cdots$$

setzen; dies gibt

$$\frac{dz}{dt} = u_1 + 2 u_2 t + 3 u_3 t^2 + \cdots$$

Durch diese Substitution nimmt die Gleichung (2) folgende Gestalt an:

$$k(z - u_0) = \frac{dz}{dt} - \frac{z - u_0}{t} + k t z - t\left(z + t\frac{dz}{dt}\right),$$

und da $u_0 = 0$, so ist weiter

$$k z = \frac{dz}{dt} - \frac{z}{t} + k t z - t z - t^2 \frac{dz}{dt},$$

woraus

$$(t - t^3)\frac{dz}{dt} = z(1 + t^2 + kt - kt^2)$$

und durch Trennung der Variabelen und gleichzeitige Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{dz}{z} = \frac{1 + t^2 + kt - kt^2}{t(1-t)(1+t)}\,dt = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} + \frac{k-1}{1+t}\right)dt$$

gefunden wird.

Indem man integrirt, wird

$$l \cdot z = l \cdot t - l \cdot (1 - t) + (k - 1)\, l \cdot (1 + t) + l \cdot c;$$

daraus folgt durch Uebergang zu den Zahlen

$$z = c\,\frac{t(1+t)^{k-1}}{1-t},$$

und wenn man für den Augenblick $k - 1 = \mu$ setzt:

$$z = c\frac{t}{1-t}(1+t)^{\mu} = c(t + t^2 + t^3 + \cdots)\left(1 + \mu t + \frac{\mu^{2|-1}}{2!}t^2 + \cdots\right)$$

$$= \cdots + c\left(1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{\overline{x-1}!}\right)t^x + \cdots$$

Demnach ist

$$u_x = c\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{\overline{x-1}!}\right\}.$$

Für $x = m + n = k = \mu + 1$ hat man $u_k = 1$, daher ist

$$1 = c\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{\mu|-1}}{\mu!}\right\}$$

$$= c\,\{1 + 1\}^{\mu} = c \cdot 2^{\mu},$$

woraus $c = \frac{1}{2^{\mu}}$; folglich hat man schliesslich

$$u_x = \frac{1}{2^{\mu}}\left\{1 + \mu + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{\overline{x-1}!}\right\}.$$

Zweite Lösung. Von der Gleichung (1)

$$u_x = \frac{x}{k}\,u_{x+1} + \frac{k-x}{k}\,u_{x-1}$$

ausgehend, erhalten wir durch einige Transformationen

$$k u_x = x u_{x+1} + k u_{x-1} - x u_{x-1}$$

$$k(u_x - u_{x-1}) = x(u_{x+1} - u_x) + x(u_x - u_{x-1}).$$

Setzt man

$$u_x - u_{x-1} = \psi(x), \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha)$$

so schreibt sich obige Gleichung wie folgt:

$$k\,\psi(x) = x\,[\psi(x+1) + \psi(x)],$$
$$(k-x)\,\psi(x) = x\,\psi(x+1),$$
$$\psi(x+1) = \frac{k-x}{x}\,\psi(x).$$

Wird successive $x = 1, 2, 3, \cdots$ genommen, so ergibt sich

$$\psi(2) = \frac{k-1}{1}\,\psi(1),$$
$$\psi(3) = \frac{k-2}{2}\,\psi(2),$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$\psi(x) = \frac{k-x+1}{x-1}\,\psi(x-1);$$

multiplicirt man diese Gleichungen, so wird

$$\psi(x) = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-x+1)}{1 \cdot 2 \ldots \overline{x-1}}\,\psi(1) = \frac{\mu^{x-1|-1}}{\overline{x-1}\,!}\,\psi(1).$$

Insbesondere ist

$$\psi(1) = \psi(1),$$
$$\psi(2) = \frac{\mu}{1}\,\psi(1),$$
$$\psi(3) = \frac{\mu^{2|-1}}{2!}\,\psi(1);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die Formel (α) liefert aber für $x = 1, 2, 3, \cdots$:

$$u_1 = u_0 + \psi(1),$$
$$u_2 = u_1 + \psi(2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_x = u_{x-1} + \psi(x);$$

durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$u_x = u_0 + \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(x).$$
$$= \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(x),$$

also

$$u_x = \psi(1)\left(1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu^{2|-1}}{2!} + \cdots + \frac{\mu^{x-1|-1}}{\overline{x-1}\,!}\right).$$

Die Bestimmung von $\psi(1)$ wäre genau so vorzunehmen, wie bei der ersten Lösung die Bestimmung von c.

Theilungsproblem für zwei Spieler.

45. *Einem Spieler A, dessen Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen einer Partie gleich ist p, fehlen x Partien zum Gewinnen des Spieles; dem B, dessen Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen einer Partie $q = 1 - p$, fehlen y Partien; welche Wahrscheinlichkeit hat A, den Einsatz zu gewinnen?*

Lösung. Wir bezeichnen die fragliche Wahrscheinlichkeit mit $u_{y,x}$; es ist dann

$$u_{y,0} = 1, \qquad u_{0,x} = 0;$$

denn im ersten Falle gewinnt A nothwendig, weil ihm keine Partie mehr fehlt; im zweiten Falle muss er verlieren, da B, nachdem ihm keine Partie mehr fehlt, bereits gewonnen hat.

Die fragliche Wahrscheinlichkeit ist die Summe zweier Producte; das erste besteht aus der Wahrscheinlichkeit, dass A die gegenwärtige Partie, und aus jener, dass er nachher das Spiel gewinnt, lautet also $p\,u_{y,x-1}$; das zweite besteht aus der Wahrscheinlichkeit, dass A die gegenwärtige Partie verliert und aus jener, dass er trotzdem das Spiel gewinnt, lautet also $q\,u_{y-1,x}$; mithin ist

$$u_{y,x} = p\,u_{y,x-1} + q\,u_{y-1,x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Erste Lösung durch doppelte Summation.

Die generirende Function der gesuchten Wahrscheinlichkeit lautet:

$$z = \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\ \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\ u_{y,x}\,t^y v^x = u_{1,1}\,t v + u_{1,2}\,t v^2 + \cdots$$
$$+ u_{2,1}\,t^2 v + u_{2,2}\,t^2 v^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Multipliciren wir die Gleichung (1) mit $t^y v^x$, nehmen nachher

$$y = 1, \qquad x = 1, 2, 3, \cdots$$
$$y = 2, \qquad x = 1, 2, 3, \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

und addiren die so entstandenen Gleichungen, so ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} u_{1,1}tv + u_{1,2}\,tv^2 + \cdots \\ + u_{2,1}t^2v + u_{2,2}t^2v^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = p \left\{\begin{array}{l} u_{1,0}tv + u_{1,1}\,tv^2 + \cdots \\ + u_{2,0}t^2v + u_{2,1}t^2v^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$+ q \left\{\begin{array}{l} u_{0,1}tv + u_{0,2}\,tv^2 + \cdots \\ + u_{1,1}t^2v + u_{1,2}t^2v^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

oder

$$z = \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\;\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\; u_{y,x}t^y v^x = p\left\{v\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\;\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\; u_{y,x}t^y v^x + v\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\; u_{y,0}t^y\right\}$$

$$+ q\left\{t\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\; u_{0,x}v^x + t\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\;\overset{\infty}{\underset{1}{S}}\; u_{y,x}t^y v^x\right\},$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass $u_{y,0} = 1$, $u_{0,x} = 0$, gefunden wird:

$$z = \frac{pvt}{(1-t)(1-pv-qt)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$z = \frac{pvt}{1-t}\cdot\frac{1}{1-qt}\cdot\frac{1}{1-\frac{pv}{1-qt}}$$

$$z = \frac{pvt}{(1-t)(1-qt)}\cdot\left\{1+\frac{pv}{1-qt}+\frac{p^2v^2}{(1-qt)^2}+\cdots+\frac{p^{x-1}v^{x-1}}{(1-qt)^{x-1}}+\cdots\right\}$$

$$z = \cdots + \frac{p^x t}{(1-t)(1-qt)^x}\,v^x + \cdots$$

Das mit $t^y v^x$ behaftete Glied wird gefunden, indem man das mit t^y behaftete Glied der Entwickelung von

$$\frac{p^x t}{(1-t)(1-qt)^x}$$

aufsucht; dasselbe lautet:

$$p^x\left(1+\frac{x}{1}q+\frac{(x+1)^{2|-1}}{2!}q^2+\cdots+\frac{(x+y-2)^{y-1|-1}}{(y-1)!}q^{y-1}\right)t^y.$$

Demnach ist

$$u_{y,x} = p^x\left\{1+\frac{x}{1}q+\frac{(x+1)^{2|-1}}{2!}q^2+\cdots+\frac{(x+y-2)^{y-1|-1}}{(y-1)!}q^{y-1}\right\} (3).$$

Anmerkung. Die Formel (3) setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten für A, das Spiel nach x, nach $x+1$ nach $x+2$, $\cdots$ nach $x+y-1$ Partien zu gewinnen. Denn:

Die Wahrscheinlichkeit, das Spiel nach x Partien zu gewinnen, ist offenbar p^x.

In $x+1$ Partien kann A das Spiel auf $\frac{x+1}{1}$ Arten gewinnen; scheidet man jene Fälle aus, wo er es bereits *in* x Partien gewonnen hatte, deren Anzahl 1 ist, so bleibt die Zahl der Fälle übrig, wo er es *nach* $x+1$ Partien gewinnt. Demnach ist

die Wahrscheinlichkeit, das Spiel nach $x+1$ Partien zu gewinnen, $\overset{x}{\underset{1}{}} p^x q$.

In $x+2$ Partien kann A das Spiel auf $\frac{(x+2)^{2|-1}}{2!}$ Arten gewinnen; scheidet man die Fälle aus, wo das Spiel bereits *in* $x+1$ Partien gewonnen war und deren Anzahl $\frac{x+1}{1}$ ist, so bleibt die Zahl jener Fälle übrig, wo das Spiel *nach* $x+2$ Partien gewonnen ist. Diese Zahl ist also $\frac{(x+2)^{2|-1}}{2!} - \frac{x+1}{1}$ $= \frac{(x+1)^{2|-1}}{2!}$. Demnach ist

die Wahrscheinlichkeit, das Spiel nach $x+2$ Partien zu gewinnen, gleich $\frac{(x-1)^{2|-1}}{2!} p^x q^2$, u. s. w.

Zweite Lösung durch einfache Summation.

Wir wählen die erzeugende Function der fraglichen Wahrscheinlichkeit in der Form

$$z_x = \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\, u_{y,x}\, t^y = u_{1,x}\, t + u_{2,x}\, t^2 + \cdots$$

Nun setzen wir in der ursprünglichen Gleichung (1)

$y \;= 1$ und multipliciren mit t,

$y \;= 2$ „ t^2,

$y_3 = 3$ „ t^3,

. . . .

und bilden die Summe der auf diese Weise entstandenen Gleichungen:

$$u_{1,x}\, t + u_{2,x}\, t^2 + \cdots = p\,[u_{1,x-1}\, t + u_{2,x-1}\, t^2 + \cdots]$$
$$+ q\,[u_{0,x}\, t + u_{1,x}\, t^2 + \cdots];$$

es ist aber $u_{0,x} = 0$, daher mit Einführung von z_x:

$$z_x = p\,z_{x-1} + q\,t\,z_x,$$

woraus

$$z_x = \frac{p\,z_{x-1}}{1-q\,t};$$

mit $x = 1, 2, 3, \cdots x$ gibt diese Gleichung

$$z_1 = \frac{p\,z_0}{1-q\,t}$$

$$z_2 = \frac{p\,z_1}{1-q\,t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_x = \frac{p\,z_{x-1}}{1-q\,t} = \frac{p^x}{(1-q\,t)^x}\,z_0;$$

es bleibt noch z_0 auszudrücken:

$$z_0 = \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\,u_{y,0}\,t^y = \overset{\infty}{\underset{1}{S}}\,t^y = t + t^2 + \cdots = \frac{t}{1-t},$$

daher ist

$$z_x = \frac{p^x\,t}{(1-t)(1-q\,t)^x},$$

und $u_{y,x}$ der Coefficient von t^y in der Entwickelung

$$z_x = p^x\,t\,(1-t)^{-1}\,(1-q\,t)^{-x}$$

$$= p^x\,(t + t^2 + t^3 + \cdots + t^{y-1} + t^y + \cdots)\,(1 + x\,q\,t$$

$$+ \frac{(x+1)^{2|-1}}{2!}\,q^2\,t^2 + \cdots + \frac{(x+y-2)^{y-1|-1}}{(y-1)!}\,q^{y-1}\,t^{y-1} + \cdots)$$

Es ergibt sich, wie man auf den ersten Blick erkennt, dasselbe Resultat wie bei der ersten Lösung.

Umwandlung der Formel (3) *in ein bestimmtes Integral.* Es führen hierzu zwei Methoden.

1) Wir nehmen die Formel (2) wieder auf:

$$z = p\,v\,t \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-p\,v-q\,t}.$$

Nachdem

$$\frac{1}{1-t} = \int_0^\infty e^{-(1-t)\theta}\,d\theta,$$

$$\frac{1}{1-p\,v-q\,t} = \int_0^\infty e^{-(1-p\,v-q\,t)\omega}.\,d\,\omega,$$

so verwandelt sich der Ausdruck für z in das folgende Doppelintegral:

$$z = p v t \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta(1-t)} e^{-\omega(1-pv-qt)} d\theta\, d\omega$$

$$= p v t \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} . e^{pv\omega} . e^{(\theta+q\omega)t} d\theta\, d\omega$$

$$= p v t \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} d\omega\, d\theta \left\{ 1 + p\omega v + \cdots + \frac{p^{x-1}\omega^{x-1}}{1\cdot 2 \cdots \overline{x-1}} v^{x-1} + \cdots \right\}$$

$$\times \left\{ 1 + (\theta + q\omega) t + \cdots + \frac{(\theta+q\omega)^{y-1}}{1\cdot 2\cdots \overline{y-1}} t^{y-1} + \cdots \right\},$$

mithin ist

$$z = \cdots + v^x t^y \left[\frac{p^x}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} (\theta + q\omega)^{y-1} d\omega\, d\theta \right] + \cdots,$$

also

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^\infty \int^\infty e^{-(\theta+\omega)} \omega^{x-1} (\theta + q\omega)^{y-1} d\omega\, d\theta.$$

Zum Zwecke weiterer Vereinfachung bedienen wir uns der Substitutionen

$$\omega = r t, \quad d\omega = r\,dt + t\,dr, \quad \theta = r(1-t);$$

daraus folgt, indem θ in Bezug auf ω als constant erachtet wird:

$$0 = -r\,dt + (1-t)\,dr,$$

demnach ist

$$d\omega = \left(r + \frac{rt}{1-t}\right) dt = \frac{r\,dt}{1-t}.$$

In Bezug auf θ ist ω constant, daher $d\omega = 0$, folglich $dt = 0$, und daraus wieder ergibt sich $d\theta = (1-t)\,dr$, so dass $d\omega\, d\theta = r\,dr\,dt$.

Nachdem

$\frac{\omega}{\theta} = \frac{t}{1-t}$, so entsprechen den Grenzen $\omega \left\{ {}_0^\infty \right.$ jene $t \left\{ {}_0^1 \right.$,

und da ferner

$\theta + \omega = r$, so entsprechen den Grenzen $\theta \left\{ {}_0^\infty \right.$ jene $r \left\{ {}_0^\infty \right.$.

Wir haben also

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^1 dt \int_0^\infty r dr e^{-(r-rt+rt)} r^{x-1} t^{x-1} (r - rt + qrt)^{y-1}$$

$$= \frac{p^x}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^1 dt\, t^{x-1} (1 - t + qt)^{y-1} \int_0^\infty r^{x+y-1} e^{-r} dr.$$

Es ist aber

$$1 - t + qt = 1 - t(1-q) = 1 - pt$$

und

$$\int_0^\infty r^{x+y-1} e^{-r} dr = \Gamma(x+y);$$

in Folge dessen übergeht der vorhergehende Ausdruck in

$$u_{y,x} = \frac{p^x \Gamma(x+y)}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^1 dt\, t^{x-1} (1 - pt)^{y-1}.$$

Nun sei

$$pt = \xi; \text{ für } t = \left\{ {}_0^1 \right. \text{ wird } \xi = \left\{ {}_0^p \right.;$$

dann ist

$$u_{y,x} = p^x \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^p \frac{d\xi}{p} \frac{\xi^{x-1}}{p^{x-1}} (1-\xi)^{y-1}$$

$$= \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^p \xi^{x-1} (1-\xi)^{y-1} d\xi.$$

Für $p = 1$ gewinnt A jede Partie, also auch das Spiel nothwendig; diesen Umstand benützen wir, um auch den

Coefficienten des rechtsseitigen Integrals unter die Form eines Integrals zu bringen; wir haben nämlich

$$1 = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma x \cdot \Gamma y} \int_0^1 \xi^{x-1} (1-\xi)^{y-1}\, d\xi,$$

daraus berechnet sich

$$\frac{\Gamma x \cdot \Gamma y}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 \xi^{x-1} (1-\xi)^{y-1}\, d\xi,$$

so dass schliesslich

$$u_{y,x} = \frac{\int_0^p \xi^{x-1} (1-\xi)^{y-1}\, d\xi}{\int_0^1 \xi^{x-1} (1-\xi)^{y-1}\, d\xi}.$$

2) Bei Gelegenheit der zweiten Lösung des Problems fanden wir

$$z_x = p^x t \frac{1}{1-t} \frac{1}{(1-qt)^x}.$$

Aus der Formel

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\, dx = \frac{\Gamma\mu}{a^\mu}$$

folgt

$$\frac{1}{a^\mu} = \frac{1}{\Gamma\mu} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax} dx;$$

es ist also dieser Formel gemäss

$$\frac{1}{1-t} = \int_0^\infty e^{-\theta(t-1)}\, d\theta,$$

$$\frac{1}{(1-qt)^x} = \frac{1}{\Gamma x} \int_0^\infty e^{-\omega(1-qt)}\, \omega^{x-1}\, d\omega;$$

durch diese Bemerkung wird

$$z_x = \frac{p^x t}{\Gamma x} \int_0^\infty e^{-\theta(1-t)}\, d\theta \int_0^\infty e^{-\omega(1-qt)}\, \omega^{x-1}\, d\omega$$

$$= \frac{p^x t}{\Gamma x} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)}\, \omega^{x-1} [1 + t) q\omega + \theta) + \cdots$$

$$+ \frac{(q\omega+\theta)^{y-1}}{1\cdot 2\cdots(y-1)} t^{y-1} + \cdots \Big]\, d\omega\, d\theta$$

$$= \cdots + t^y \left[\frac{p^x}{\Gamma x\cdot\Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)}\, \omega^{x-1} (q\,\omega + \theta)^{y-1}\, d\omega\, d\theta\right] + \cdots,$$

woraus sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit derselbe Ausdruck ergibt wie bei der vorigen Behandlung, nämlich

$$u_{y,x} = \frac{p^x}{\Gamma x\cdot\Gamma y} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\theta+\omega)}\, \omega^{x-1} (q\omega + \theta)^{y-1}\, d\omega\, d\theta.$$

Allgemeines Theilungsproblem.

46. *Den Spielern* $A, B, \ldots R$ *fehlen beziehungsweise* $m, n', \ldots r$ *Partien zum Gewinnen des Einsatzes;* $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ *sind ihre Wahrscheinlichkeiten für das Gewinnen einer Partie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird* A *das Spiel gewinnen?*

Lösung. Es ist $\alpha + \beta + \cdots + \gamma = 1$; die verlangte Wahrscheinlichkeit werde mit $u_{m,n,\ldots r}$ bezeichnet.

Dieselbe Schlussfolge, wie in dem vorigen Problem, führt zu den Beziehungen:

$$u_{0,n,\ldots r} = 1,\ u_{m,0\ldots r} = 0,\ \ldots\ u_{m,n,\ldots 0} = 0 \quad \ldots\ldots\ (1)$$

$$u_{m,n,\ldots r} = \alpha u_{m-1,n\ldots r} + \beta u_{m,n-1,\ldots r} + \cdots + \gamma u_{m,n,\ldots r-1}. \quad (2)$$

Die erzeugende Function der fraglichen Wahrscheinlichkeit ist in diesem Falle

$$z = \mathop{S}_1^\infty \mathop{S}_1^\infty \cdots \mathop{S}_1^\infty u_{m,n,\ldots r}\, t^m v^n \cdots w^r.$$

Nimmt man in der Formel (2) der Reihe nach

$$m = 1, \begin{cases} n = 1, 2, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ r = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

$$m = 2, \begin{cases} n = 1, 2, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ r = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

. . . .

und addirt die so entstandenen Gleichungen, nachdem man jede derselben vorher mit $t^m v^n \cdots w^r$ multiplicirt hat, so ergibt sich wie in Nr. 45:

$$z = \alpha \left\{ tz + t \overset{\infty}{\underset{1}{S}} \cdots \overset{\infty}{\underset{1}{S}} v^n \cdots w^r \right\} + \beta v z + \cdots + \gamma w z,$$

woraus

$$z = \frac{\alpha t \overset{\infty}{\underset{1}{S}} \cdots \overset{\infty}{\underset{1}{S}} v^n \cdots w^r}{1 - \alpha t - \beta v - \cdots - \gamma w} = \frac{\alpha t v \cdots w}{(1 - v) \cdots (1 - w)(1 - \alpha t - \beta v - \cdots - \gamma w)}.$$

Zur Reduction dieser Formel auf ein bestimmtes Integral haben wir

$$\frac{1}{1 - v} = \int_0^\infty e^{-(1-v)\omega}\, d\omega, \ldots \frac{1}{1 - w} = \int_0^\infty e^{-(1-w)\varrho}\, d\varrho,$$

$$\frac{1}{1 - \alpha t - \cdots - \gamma w} = \int_0^\infty e^{-(1 - \alpha t - \cdots - \gamma w)\theta}\, d\theta.$$

Der Ausdruck für z übergeht demnach in

$$= \alpha t v \cdots w \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega \cdots d\varrho\, d\theta\, e^{-\omega(1-v)} \cdots e^{-\varrho(1-w)} e^{-\theta(1 - \alpha t - \cdots - \gamma w)}$$

$$= \alpha t v \cdots w \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega \cdots d\varrho\, d\theta\, e^{-(\omega + \cdots + \varrho + \theta)} e^{\alpha \theta t} e^{(\omega + \beta\theta) v} \cdots e^{(\varrho + \gamma\theta) w}.$$

Entwickelt man die Exponentialgrössen:

$$e^{\alpha\theta t} = \cdots + \frac{\alpha^{m-1} \theta^{m-1} t^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdots m - 1} + \cdots$$

$$e^{(\omega + \beta\theta) v} = \cdots + \frac{(\omega + \beta\theta)^{n-1} v^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n - 1} + \cdots$$

. . . .

$$e^{(\varrho+\gamma\theta)w} = \cdots + \frac{(\varrho+\gamma\theta)^{r-1} w^{r-1}}{1\cdot 2\cdots r-1} + \cdots,$$

und führt man diese Entwickelungen unter dem Integral ein, so wird

$$z = \cdots + t^m v^n \cdots w^r \left[\frac{\alpha^m}{\Gamma m \cdot \Gamma n \ldots \Gamma r} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega \cdots d\varrho\, d\theta \right.$$

$$\left. e^{-(\omega+\cdots+\varrho+\theta)}\, \theta^{m-1} (\omega+\beta\theta)^{n-1} \cdots (\varrho+\gamma\theta)^{r-1}\right] + \cdots$$

Vertauscht man ferner

$\omega, \cdots \varrho$ der Reihe nach mit $\theta\varphi, \cdots \theta\varpi$,

folglich

$d\omega, \cdots d\varrho$ mit $\theta d\varphi \cdots \theta d\varpi$,

so tritt eine Vereinfachung ein, indem jetzt

$$z = \cdots + t^m v^n \cdots w^r \left[\frac{\alpha^m}{\Gamma m \cdot \Gamma n \cdots \Gamma r} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty d\varphi \cdots d\varpi\, d\theta. \right.$$

$$\left. \theta^{m+n+\cdots+r-1} (\varphi+\beta)^{n-1} \cdots (\varpi+\gamma)^{r-1} e^{-\theta(1+\varphi+\cdots+\varpi)}\right] + \cdots;$$

nachdem nun $u_{m,n,\ldots r}$ durch den Coefficienten von $t^m v^n \cdots w^r$ dargestellt ist, so ist der Werth der Wahrscheinlichkeit, um die es sich handelt, durch den in der Klammer eingeschlossenen Ausdruck gegeben.

Setzt man für den Augenblick

$$1+\varphi+\cdots+\varpi = \lambda,$$

so wird

$$u_{m,n,\cdots r} = \frac{\alpha^m}{\Gamma m \cdot \Gamma n \cdots \Gamma r} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty d\varphi \cdots d\varpi\, (\varphi+\beta)^{n-1} \cdots (\varpi+\gamma)^{r-1}$$

$$\times \int_0^\infty \theta^{m+n+\cdots+r-1} e^{-\lambda\theta} d\theta$$

$$= \alpha^m \frac{\Gamma(m+n+\cdots+r)}{\Gamma m \cdot \Gamma n \cdots \Gamma r} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{d\varphi \cdots d\varpi (\varphi+\beta)^{n-1} \cdots (\varpi+\gamma)^{r-1}}{\lambda^{m+n+\cdots+r}}, \quad (\alpha)$$

wenn man die Integration in Bezug auf θ ausführt.

Für $\beta = 0, \cdots \gamma = 0$ wird $u_{m, n, \ldots r} = 1$; diese Bemerkung führt zu der Beziehung

$$\frac{\Gamma m \cdot \Gamma n \cdots \Gamma r}{\Gamma(m+n+\cdots+r)} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{d\varphi \cdots d\varpi\, \varphi^{n-1} \cdots \varpi^{r-1}}{(1+\varphi+\cdots+\varpi)^{m+n+\cdots+r}} \cdots \quad (\beta)$$

Letztere Formel bietet zugleich das Mittel zur Ausrechnung des vielfachen Integrales in (α); denn entwickelt man in letzterem die Potenzen $(\varphi+\beta)^{n-1} \cdots (\varpi+\gamma)^{r-1}$ und multiplicirt, so zerfällt dasselbe in Integrale von der Form (β), die also nach dieser Formel sich berechnen lassen.

47. **Problem XX.** *Von zwei Spielern A und B, deren Wahrscheinlichkeiten für das Gewinnen einer Partie beziehungsweise α und β sind, hat der erste m, der zweite n Marken; $m + n = r$. Nach jeder Partie zahlt der Verlierende an seinen Gegner eine Marke und das Spiel endet, wenn einer der Spieler alle seine Marken verloren hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A das Spiel vor oder in der s^{ten} Partie, wenn $m > s$ ist?*

Lösung. Die verlangte Wahrscheinlichkeit heisse $u_{m,s}$.

A kann im Momente der gegenwärtigen Partie gewinnen:

1) Indem er diese Partie gewinnt und den Gewinn des Spieles mit Hilfe der übrigen Partien erzielt; die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses ist $\alpha u_{m+1, s-1}$.

2) Indem er diese Partie verliert, den Gewinn des Spieles aber trotzdem mit Hilfe der noch übrigen $s - 1$ Partien erzielt; für dies zusammengesetzte Ereigniss besteht die Wahrscheinlichkeit $\beta u_{m-1, s-1}$.

Demnach ist

$$u_{m,s} = \alpha u_{m+1, s-1} + \beta u_{m-1, s-1}. \quad \ldots \quad (1)$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit t^s, nehmen dann $s = 1, 2, 3, \cdots$ und bezeichnen die Summe der linken Seiten der so entstandenen Relationen mit z_m, so ergibt sich

$$z_m = \overset{\infty}{\underset{1}{S}} u_{m,s} t^s = u_{m,1}\, t + u_{m,2}\, t^2 + \cdots$$
$$= \alpha \{ u_{m+1,0}\, t + u_{m+1,1}\, t^2 + \cdots \} + \beta \{ u_{m-1,0}\, t^1 + u_{m-1,1}\, t^2 + \cdots \}.$$

Den Fall, wo $n = 0$, ausgenommen, ist offenbar

$$u_{m+1,0} = 0, \qquad u_{m-1,0} = 0;$$

daher hat man weiter

$$z_m = \alpha t\{u_{m+1,1}t + u_{m+1,2}t^2 + \cdots\} + \beta t\{u_{m-1,1}t + u_{m-1,2}t^2 \cdots\}$$

oder

$$z_m = \alpha t z_{m+1} + \beta t z_{m-1}.$$

Nachdem diese Gleichung linear ist, können wir uns der Substitution

$$z_m = a^m.$$

bedienen, wodurch $z_{m+1} = a^{m+1}$, $z_{m-1} = a^{m-1}$ wird. Damit ergibt sich nach entsprechender Abkürzung die Gleichung

$$1 = \alpha t a + \frac{\beta t}{a}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder geordnet

$$a^2 - \frac{1}{\alpha t}a = -\frac{\beta}{\alpha}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

woraus die zwei Wurzelwerthe folgen:

$$a_1 = \frac{1}{2\alpha t}(1 + \sqrt{1 - 4\alpha\beta t^2}),$$

$$a_2 = \frac{1}{2\alpha t}(1 - \sqrt{1 - 4\alpha\beta t^2});$$

demnach ist

$$z_m = A a_1^m + B a_2^m.$$

Zur Ermittelung der Coefficienten bedienen wir uns der beiden besonderen Fälle:

$$z_0 = u_{0,1}t + u_{0,2}t^2 + \cdots = 0,$$

$$z_r = \frac{1}{1 - t^2}.$$

Die Richtigkeit der ersten dieser Beziehungen erhellt daraus, dass A nicht gewinnen kann, wenn er keine Marke mehr besitzt, indem dann B nothwendig gewonnen hat. Zu der zweiten gelangen wir durch die Bemerkung, dass

$$u_{r,s'} = 1,$$

worin s' die zu s noch erforderliche Anzahl von Partien ist; denn A hat gewiss gewonnen, wenn er alle Marken des B an sich gebracht hat. s' ist dabei nothwendig Null oder eine gerade Zahl; A musste nämlich die n Marken von B gewinnen, wozu n Partien nöthig sind, und die s' Partien, welche zu n fehlen, um es zu s zu ergänzen, waren nöthig, um jede an B verlorene Marke wieder erlangen, wozu jedesmal zwei Partien erforderlich sind; folglich ist

$$z_r = u_{r,0} t^0 + u_{r,2} t^2 + u_{r,4} t^4 + \cdots = 1 + t^2 + t^4 + \cdots = \frac{1}{1-t^2}.$$

Wir haben daher die beiden Relationen

$$0 = A + B,$$
$$\frac{1}{1-t^2} = A a_1^r + B a_2^r,$$

woraus weiter folgt:

$$z_m = A a_1^m - A a_2^m,$$
$$\frac{1}{1-t^2} = A a_1^r - A a_2^r;$$

durch Division dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$z_m = \frac{1}{1-t^2} \frac{a_1^m - a_2^m}{a_1^r - a_2^r}$$
$$= \frac{1}{a_1^n (1-t^2)} \frac{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^m}{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^r}.$$

Aus Gleichung (2′) folgt jedoch $a_1 a_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, also $\frac{1}{a_1} = \frac{\alpha}{\beta} a_2$ und $\frac{1}{a_1^n} = \frac{\alpha^n}{\beta^n} a_2^n$, daher weiter

$$z_m = \frac{\alpha^n}{\beta_n} a_2^n \left\{ \frac{1}{1-t^2} \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{1-4\alpha\beta t^2}}{1+\sqrt{1-4\alpha\beta t^2}}\right)^m}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{1-4\alpha\beta t^2}}{1+\sqrt{1-4\alpha\beta t^2}}\right)^r} \right\}.$$

Die Entwickelung des in der Hauptklammer eingeschlossenen Theiles nach Potenzen von t^2 liefert einen Ausdruck von der Form

$$(1 + t^2 + t^4 + \cdots)\,(1 + C_1 t^{2m} + \cdots)\,(1 + D_1 t^{2r} + \cdots);$$

von der Einheit abgesehen, ist die niedrigste Potenz von t in diesem Producte t^{2m}; da nun $s < m$ vorausgesetzt wurde, so können die Glieder desselben auf den Coefficienten von t^s nicht Einfluss nehmen, für die geforderte Wahrscheinlichkeit kann also die erzeugende Function in der abgekürzten Form

$$z'_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n} a_2^n$$

genommen werden.

Zur Entwickelung von a_2^n bedienen wir uns der Formel von Lagrange, welche für

$$z = x + \alpha f(z)$$

gibt:

$$F(z) = S \frac{\alpha^i}{1 \cdot 2 \cdots i} \frac{d^{i-1}[F'(x)(f(x))^i]}{dx^{i-1}}\text{*)}.$$

Der Gleichung (2) zufolge ist

$$a_2 = \beta t + \alpha t a_2^2,$$

für den vorliegenden Fall hat man also zu setzen:

$$z = a_2, \quad x = \beta t, \quad \alpha = \alpha t, \quad f(z) = a_2^2, \quad F(z) = a_2^n;$$
$$F(x) = (\beta t)^n, \quad F'(x) = n(\beta t)^{n-1}, \quad f(x) = (\beta t)^2,$$

und erhält

$$a_2^n = S \frac{(\alpha t)^i}{1 \cdot 2 \cdots i} \frac{d^{i-1}[n(\beta t)^{2i+n-1}]}{d(\beta t)^{i-1}}$$
$$= S \frac{(\alpha t)^i}{1 \cdot 2 \cdots i} n(n+2i-1)(n+2i-2)\cdots(n+i+1)(\beta t)^{n+i}$$
$$= S t^{n+2i} \frac{\alpha^i \beta^i \beta^n}{1 \cdot 2 \cdots i} n(n+2i-1)(n+2i-2)\cdots(n+i+1);$$

damit verwandelt sich der Ausdruck für z'_m in den folgenden:

$$z'_m = \frac{\alpha^n}{\beta^n} S t^{n+2i} \frac{\alpha^i \beta^i \beta^n}{1 \cdot 2 \cdots i} n(n+2i-1)(n+2i-2)\cdots(n+i+1).$$

Nimmt man endlich $n + 2i = s$, also $i = \frac{s-n}{2}$, so ergibt sich

$$u_{m,s} = \frac{\alpha^{n+i} \beta^i}{1 \cdot 2 \cdots i} n(n+2i-1)(n+2i-2)\cdots(n+i+1).$$

48. **Problem XXI.** *Eine Urne enthält r mit 1, r mit 2, r mit n bezeichnete Kugeln; man zieht nach und nach alle Kugeln aus derselben. Es soll die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, dass mindestens 1, oder 2, oder 3, . . . oder i Kugeln in der durch ihre Nummern bezeichneten Rangfolge zum Vorschein kommen.*

Lösung. Nachdem jede der Kugeln nur in den n ersten Ziehungen ihrem Range entsprechend zum Vorschein kommen kann, so darf für die Zwecke der vorliegenden Aufgabe von den folgenden Ziehungen abgesehen werden. Die Gesammtzahl der Kugeln ist $s = rn$. Da auf die Ordnung der Kugeln Rücksicht genommen werden muss, so ist die Anzahl aller

*) Vergl. Note II. am Ende des Buches.

möglichen Fälle gegeben durch die Anzahl der Variationen von s Elementen in der n^{ten} Classe, also

$$T = s(s-1)\cdots(s-n+1) = s^{n|-1}.$$

A. Zunächst soll die Wahrscheinlichkeit P_1 gefunden werden, dass mindestens eine Kugel dem durch ihre Nummer bezeichneten Range gemäss gezogen wird.

Wir setzen voraus, es werde eine der Kugeln Nr. 1 als erste gezogen; da dies nur so oft eintreten kann, als es Variationen der noch übrigen $s-1$ Kugeln in der $n-1^{\text{ten}}$ Classe gibt, so ist

$$(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1) = (s-1)^{n-1|-1}$$

die Anzahl der Fälle, in welchen eine der Kugeln Nr. 1 an erster Stelle erscheint.

Nachdem nun diese Voraussetzung auf jede der r mit Nr. 1 bezeichneten Kugeln anzuwenden ist, so ist $r(s-1)^{n-1|-1}$ die Anzahl der Fälle, wo die eine oder andere der mit Nr. 1 bezeichneten Kugeln ihrem Range gemäss gezogen wird.

Das gleiche Resultat gilt für die Kugeln Nr. $2, 3, \cdots n$, demnach ist

$$nr(s-1)^{n-1|-1} = s(s-1)^{n-1|-1} = s^{n|-1} \;.\;. \quad (a)$$

die Zahl der Fälle, in welchen mindestens eine der Kugeln an der durch ihren Rang bezeichneten Stelle erscheint, vorausgesetzt, dass man die wiederholten Fälle in Abzug bringt.

Zur Ermittelung dieser Fälle betrachten wir beispielsweise das Erscheinen einer Kugel Nr. 1 an erster und einer Kugel Nr. 2 an zweiter Stelle. Dieser Fall tritt in (a) zweimal auf, denn er ist einmal in der Anzahl der Fälle enthalten, wo eine der Kugeln Nr. 1, und ein zweitesmal in der Anzahl jener Fälle, wo eine der Kugeln Nr. 2 ihrem Range gemäss gezogen wird, und da diese Betrachtung auf irgend zwei nach ihrem Range gezogene Kugeln auszudehnen ist, so hat man von (a) die Anzahl der Fälle in Abzug zu bringen, wo irgend zwei Kugeln ihrem Range entsprechend zum Vorschein kommen.

Diese Zahl ist, da n verschiedene Nummern vorhanden sind, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, nachdem aber jede der r Kugeln der einen Nummer mit jeder der r Kugeln der andern Nummer zusammentreffen kann, so gibt es der Combinationen $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}r^2$;

und jede dieser Combinationen kann sich mit jeder der Variationen der $s - 2$ noch übrigen Nummern in der $n - 2^{ten}$ Classe verbinden; die Anzahl dieser Variationen ist

$$(s-2)(s-3)\cdots(s-n+1) = (s-2)^{n-2|-1},$$

daher die Anzahl aller Fälle, welche sich auf die Voraussetzung des Erscheinens zweier Kugeln nach ihrem Range beziehen,

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^2 (s-2)^{n-2|-1},$$

und diese muss von (a) abgezogen werden; es verbleibt dann

$$s^{n|-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^2 (s-2)^{n-2|-1} \quad \ldots . \quad (a')$$

als Anzahl der Fälle, in welchen mindestens eine Kugel an der ihrem Range entsprechenden Stelle erscheint, vorausgesetzt dass von (a′) die noch wiederholten Fälle in Abzug gebracht und die fehlenden hinzugefügt werden.

Es sind jene Fälle, wo drei Kugeln nach ihrem Range gezogen werden; die Anzahl dieser Fälle heisse k. Dieselbe wiederholt sich dreimal im ersten Gliede von (a′), denn sie kann daselbst aus den drei Voraussetzungen entspringen, dass jede der drei Kugeln ihrem Range gemäss gezogen wird; die Zahl k ist aber auch im zweiten Gliede von (a′) dreimal enthalten, denn sie kann daselbst aus jeder der drei Voraussetzungen entspringen, dass irgend zwei von den drei Kugeln ihrem Range entsprechend zum Vorschein kommen. Dieses zweite Glied ist aber mit dem Zeichen — behaftet, die Zahl k ist daher in (a′) nicht enthalten, muss also hinzugefügt werden.

Die Zahl der Combinationen von n Nummern zu dreien ist $\frac{n^{3|-1}}{3!}$, und da jede der r Kugeln der einen Nummer mit jeder der r Kugeln der andern und mit jeder der r Kugeln der dritten Nummer sich verbinden kann, so gibt es der Kugelcombinationen $\frac{n^{3|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3$, und da jede derselben mit jeder der

$$(s-3)(s-4)\cdots(s-n+1) = (s-3)^{n-3|-1}$$

Variationen der $s - 3$ übrigen Kugeln in der $n - 3^{ten}$ Classe zusammentreffen kann, so ist

$$k = \frac{n^{3|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 (s-3)^{n-3|-1}$$

die Zahl der Fälle, wo drei Kugeln ihrem Range gemäss gezogen werden und welche zu (a′) addirt werden muss. Daher ist jetzt

$$s^{n|-1} - \frac{n^{2|-1}}{1 \cdot 2} r^2 (s-2)^{n-2|-1} + \frac{n^{3|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 (s-3)^{n-3|-1} \quad (\text{a}'')$$

die Anzahl der Fälle, wo mindestens eine Kugel ihrem Range entsprechend gezogen wird, vorausgesetzt, dass man die noch wiederholten Fälle abzieht. Durch ein dem vorigen analoges Raisonnement findet man für diese Anzahl den Ausdruck

$$\frac{n^{4|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^4 (s-4)^{r-4|-1}$$

und so fort, und gelangt endlich zu der Anzahl der Fälle, wo mindestens eine der Kugeln an der ihrem Range entsprechenden Stelle erscheint, nämlich

$$F_1 = s^{n|-1} - \frac{n^{2|-1}}{1 \cdot 2} r^2 (s-2)^{n-2|-1} + \frac{n^{3|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 (s-3)^{n-3|-1}$$
$$- \frac{n^{4|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^4 (s-4)^{n-4|-1} + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (\text{A})$$

Die Reihe ist so weit fortzuführen, als es angeht.

In dem Ausdrucke (A) kommt jede Combination nur einmal vor. Wir wollen dies beispielsweise von der Combination nachweisen, welche in dem Erscheinen von l Kugeln nach ihrem Range besteht. Dieselbe tritt l mal im ersten Gliede auf, weil sie dort aus den jede der l Kugeln betreffenden Voraussetzungen entspringen kann; $\frac{l^{2|-1}}{1 \cdot 2}$ mal im zweiten Gliede, entspringend aus den Voraussetzungen, welche sich auf die Combinationen der l Nummern zu zweien beziehen; $\frac{l^{3|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ mal im dritten Gliede, entspringend aus ebensoviel Voraussetzungen, welche sich auf die Combinationen der l Nummern zu dreien beziehen u. s. w. Im Ganzen tritt sie in dem Ausdrucke (A)

$$l - \frac{l^{2|-1}}{1 \cdot 2} + \frac{l^{3|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots = 1 - (1-1)^l \text{ mal},$$

also einmal auf, wie dies behauptet wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Kugel an der ihrem Range entsprechenden Stelle zu ziehen, ist demnach

$$\left.\begin{aligned} P_1 = \frac{F_1}{T'} &= 1 - \frac{n^{2|-1}}{2!} r^2 \frac{1}{s^{2|-1}} + \frac{n^{3|-1}}{3!} r^3 \frac{1}{s^{3|-1}} \\ &\qquad - \frac{n^{4|-1}}{4!} r^4 \frac{1}{s^{4|-1}} - \cdots \\ &= 1 - \frac{(n-1)^{2|-1}}{2!} r \frac{1}{s-1} + \frac{(n-1)^{3|-1}}{3!} r^2 \frac{1}{(s-1)^{2|-1}} \\ &\qquad - \frac{(n-1)^{4|-1}}{4!} r^3 \frac{1}{(s-1)^{3|-1}} + \cdots \end{aligned}\right\} \text{(B)}.$$

B. Wir wenden uns nun dazu, die Wahrscheinlichkeit P_i zu bestimmen, dass mindestens i Kugeln ihrem Range nach zum Vorschein kommen.

Dem Vorhergehenden zufolge ist die Anzahl der Fälle, wo i Kugeln nach ihrem Range gezogen werden, gleich

$$\frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-i)(s-i-1)\cdots(s-n+1) = \frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-i)^{n-i|-1}, \text{(b)}$$

vorausgesetzt, dass von (b) die wiederholten Fälle in Abzug gebracht werden. Es sind dies jene Fälle, wo $i+1$ Kugeln ihrem Range gemäss erscheinen, und dieselben können sich in (b) so oft ereignen, als $i+1$ Kugeln Combinationen i^{ter} Classe geben, also $i+1$ mal, müssen daher, um sich nicht zu wiederholen, $i$fach in Abzug gebracht werden.

Nun ist die Zahl der Fälle, wo $i+1$ Kugeln dem Range gemäss erscheinen, gleich

$$\frac{n^{i+1|-1}}{i+1!} r^{i+1} (s-i-1)^{n-i-1|-1};$$

indem man diese Zahl mit i multiplicirt und das Product von (b) abzieht, erhält man

$$\frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-i)^{n-i|-1} - i \frac{n^{i+1|-1}}{(i+1)!} r^{i+1} (s-i-1)^{n-i-1|-1}$$

$$= \frac{n^{i|-1}}{i!} r^i (s-i)^{n-i|-1} \left\{ 1 - ir \frac{n-i}{i+1} \cdot \frac{1}{s-i} \right\} \ldots\ldots \text{(b')}$$

In diesem Ausdrucke kommen noch wiederholte Fälle vor, nämlich jene, wo $i+2$ Kugeln nach ihrem Range erscheinen, und zwar wiederholen sich dieselben im ersten Gliede so oft, als die $i+2$ betrachteten Kugeln Combina-

tionen zu i Kugeln liefern, und im zweiten Gliede so oft, als die $i+2$ betrachteten Kugeln Combinationen zu $i+1$ Kugeln geben, im Ganzen also

$$\frac{(i+2)(i+1)}{1\cdot 2} - i\,(i+2) = k \text{ mal};$$

dabei musste das zweite Glied $i+2$ mit i multiplicirt werden, weil dies auch beim zweiten Gliede in (b′) geschah.

Nun ist die Zahl der Fälle, wo $i+2$ Kugeln ihrem Range entsprechend gezogen werden, gleich

$$\frac{n^{i+2\,|-1}}{(i+2)!}\, r^{i+2}\,(s-i-2)^{n-i-2\,|-1};$$

dieselbe muss $k-1$-fach von (b′) hinweggenommen oder $1-k$-fach hinzuaddirt werden, und nachdem

$$1-k = 1 - \frac{(i+2)(i+1)}{1\cdot 2} + i\,(i+2) = \frac{i(i+1)}{2},$$

so ergibt sich aus (b′)

$$\frac{n^{i\,|-1}}{i!}\, r^i\,(s-i)^{n-i\,|-1}\left\{1 - ir\,\frac{n-i}{i+1}\,\frac{1}{s-i}\right\}$$

$$+\frac{i\,(i+1)}{2}\,\frac{n^{i+2\,|-1}}{(i+2)!}\, r^{i+2}\,(s-i-2)^{n-i-2\,|-1}$$

$$=\frac{n^{i\,|-1}}{i!}\, r^i\,(s-i)^{n-i\,|-1}\left\{1 - \frac{i}{i+1}\,\frac{(n-i)\,r}{s-i}\right.$$

$$\left.+\frac{i}{i+2}\,\frac{(n-i)(n-i-1)\,r^2}{2\,(s-i)\,(s-i-1)}\right\}$$

$$=\frac{n^{i\,|-1}}{i!}\, r^i\,(s-i)^{n-1\,|-1}\left\{1 - \frac{i}{i+1}\,\frac{n-i}{1}\,r\,\frac{1}{s-i}\right.$$

$$\left.+\frac{i}{i+2}\,\frac{(n-i)^{2\,|-1}}{1\cdot 2}\,r^2\,\frac{1}{(s-i)^{2\,|-1}}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b'')$$

Von (b″) müssen die noch wiederholten Fälle abgezogen werden; man erhält, auf diese Weise fortfahrend:

$$F_i = \frac{n^{i\,|-1}}{i!}\, r^i\,(s-i)^{n-i\,|-1}\left\{1 - \frac{i}{i+1}\,\frac{n-i}{1}\,r\,\frac{1}{s-i}\right.$$

$$\left.+\frac{i}{i+2}\,\frac{(n-i)^{2\,|-1}}{1\cdot 2}\,r^2\,\frac{1}{(s-i)^{2\,|-1}} - \frac{i}{i+3}\,\frac{(n-1)^{3\,|-1}}{1\cdot 2\cdot 3}\,r^3\,\frac{1}{(s-i)^{3\,|-1}} + \cdots\right\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens i Kugeln ihrem Range gemäss zum Vorschein kommen, ist demnach

$$P_i = \frac{F_i}{T} = \frac{(n-1)^{i-1\,|\,-1}}{i!}\, r^{i-1}\, \frac{1}{(s-1)^{i-1\,|\,-1}} \Big\{ 1 - \frac{i}{i+1}\, \frac{n-i}{1}\, r \frac{1}{s-i}$$

$$+ \frac{i}{i+2}\, \frac{(n-i)^{2\,|\,-1}}{1 \cdot 2}\, r^2\, \frac{1}{(s-i)^{2\,|\,-1}} - \cdots \Big\} \quad \ldots \text{(C)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Kugel nach ihrem Range gezogen wird, ist

$$Q = 1 - P_1 = \frac{n-1}{1 \cdot 2}\, r \frac{1}{s-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, r^2 \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\, r^3 \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} - \cdots$$

Setzt man vor das erste Glied dieses Ausdruckes die der Null gleiche Differenz

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots rn}{1 \cdot 2 \cdots rn} - \frac{n[1 \cdot 2 \cdots (rn-1)]r}{1 \cdot 2 \cdots rn},$$

so verwandelt sich unter Beachtung, dass $s = rn$ ist, der Ausdruck für Q nach leichter Rechnung in den folgenden:

$$Q = \frac{[1 \cdot 2 \cdots rn] - n[1 \cdot 2 \cdots (rn-1)]r + \frac{n^{2\,|\,-1}}{1 \cdot 2}[1 \cdot 2 \cdots (rn-2)]r^2 - \frac{n^{3\,|\,-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3}[1 \cdot 2 \cdots (rn-3)]r^3 + \cdots}{1 \cdot 2 \cdots rn}$$

$$= \frac{Z}{N} = \frac{\int_0^\infty x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}\, dx}{\int_0^\infty x^{rn} e^{-x}\, dx}.$$

Letztere Formel eignet sich besonders für hohe Werthe von rn.

49. **Anmerkung.** Der dem Maximum Y von $y = x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}$ entsprechende Werth von x ist

$$x_m = \frac{rn+r}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2(n-1)^2 + 4rn}}{2}.$$

Wendet man auf das Zählerintegral die Formel an

$$\int_0^\infty y\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}\; Y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_m}}},\text{*)}$$

*) Siehe Note III. am Ende des Buches.

so findet sich

$$\frac{\sqrt{2\pi}\,[x_m^{rn-n}(x_m-r)^n e^{-x_m}]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_x}} = \frac{\sqrt{2\pi}(rn)^{rn+\frac{1}{2}} e^{-rn}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}};$$

ferner ist bekanntlich

$$N = 1\cdot 2\cdots rn = \sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}} e^{-rn};$$

demnach wird jetzt

$$Q = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{rn}-\frac{1}{rn^2}}}.$$

Nachdem bei dieser Reduction rn sehr gross vorausgesetzt wurde, so kann endlich geschrieben werden

$$Q = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Dies also ist ein sehr genäherter Werth für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer sehr grossen Anzahl von Kugeln keine nach ihrem Range gezogen wird, ein Werth, welcher mit wachsendem n der Grenze $e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2{\cdot}71828\cdots}$ zustrebt.

III. Capitel.

Bernoulli's Theorem.

50. *Kennt man die einfachen und constanten Wahrscheinlichkeiten p und q zweier entgegengesetzten Ereignisse A und B, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer grossen Anzahl $\mu = m + n$ von Versuchen das Ereigniss A in einer zwischen*

$$\mu p \pm \gamma\sqrt{2pq\mu}$$

liegenden unbekannten Anzahl m von Malen eintrifft, gegeben durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

oder es ist P die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung $\frac{m}{\mu} - p$ *enthalten ist zwischen*

$$\pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}.$$

Beweis. Das allgemeine Glied des Binoms

$$(p+q)^\mu = S \frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n = 1,$$

nämlich

$$T_n = \frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass in $\mu = m + n$ Versuchen A m-mal, B n-mal in irgend welcher Ordnung sich wiederholt. Ersetzt man darin die Factoriellen durch ihre, aus der folgenden, für grosse Werthe von x giltigen Formel*):

$$x! = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$$

hervorgehenden Ausdrücke, so findet sich:

$$T_n = \left(\frac{\mu p}{m}\right)^m \left(\frac{\mu q}{n}\right)^n \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi m n}}$$

$$= \left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}.$$

Wir wollen nun jene Werthe von m und n suchen, welche T_n zum Maximum machen. Zu diesem Ende vertauschen wir n einmal mit $n-1$, ein zweitesmal mit $n+1$, wodurch wir erhalten:

$$T_{n-1} = \frac{\mu!}{(m+1)!\,(n-1)!} p^{m+1} q^{n-1} = T_n \frac{n}{m+1} \frac{p}{q},$$

$$T_{n+1} = \frac{\mu!}{(m-1)!\,(n+1)!} p^{m-1} q^{n+1} = T_n \frac{m}{n+1} \frac{q}{p}.$$

Soll T_n ein Maximum werden, so muss

$$T_n > T_{n-1} \quad \text{und} \quad T_n > T_{n+1},$$

oder

$$1 > \frac{n}{m+1} \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad 1 > \frac{m}{n+1} \frac{q}{p} \quad \ldots \quad (2)$$

1) Aus den Beziehungen (2) eliminiren wir zunächst n und q mit Hilfe der Gleichungen $n = \mu - m$ und $q = 1 - p$; sie übergehen hiedurch in die folgenden:

*) Vgl. Note I. am Ende des Buches.

$$1 > \frac{\mu - m}{m+1}\,\frac{p}{1-p} \qquad \text{und} \qquad 1 > \frac{m}{\mu - m + 1}\,\frac{1-p}{p},$$

oder, nach einfacher Transformation:

$$m > p(\mu + 1) - 1, \qquad m < p(\mu + 1),$$

$$\frac{m}{\mu+1} > p - \frac{1}{\mu+1}, \qquad \frac{m}{\mu+1} < p,$$

$$\frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} > p - \frac{1}{\mu+1}, \qquad \frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} < p,$$

$$\frac{m}{\mu} > p + \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{\mu+1}; \qquad \frac{m}{\mu} < p + \frac{m}{\mu(\mu+1)}.$$

Hieraus folgt, dass

$$\frac{m}{\mu} = p + \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \delta,$$

wobei $\delta < \frac{1}{\mu+1}$; demnach ist, wenn Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ vernachlässigt werden:

$$\frac{m}{\mu} = p \qquad \text{oder} \qquad m = \mu p.$$

2) Wird aus den Beziehungen (2) in gleicher Weise m und p ausgeschieden, so ergibt sich nach analogen Transformationen

$$\frac{n}{\mu} < q + \frac{n}{\mu(\mu+1)}, \qquad \frac{n}{\mu} > q + \frac{n}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{\mu+1};$$

daraus schliesst man, dass

$$\frac{n}{\mu} = p + \frac{n}{\mu(\mu+1)} - \delta',$$

wenn $\delta' < \frac{1}{\mu+1}$; bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ genau ist also

$$\frac{n}{\mu} = q \qquad \text{oder} \qquad n = \mu q.$$

51. Der Maximalwerth von T_n werde mit G bezeichnet; wir erhalten ihn, indem wir in dem Ausdrucke für T_n

$$\frac{\mu p}{m} = 1, \qquad \frac{\mu q}{n} = 1$$

setzen; dadurch wird

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}},$$

also

$$T_n = G\left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

und in gleicher Weise

$$T_{n-l} = G\left(\frac{\mu p}{m}\,\frac{1}{1+\frac{l}{m}}\right)^{m+l+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu q}{n}\,\frac{1}{1-\frac{l}{n}}\right)^{n-l+\frac{1}{2}}.$$

Bezeichnet G_{n-l} den Werth, welchen T_{n-l} für $m = \mu p$ und $n = \mu q$ annimmt, so ist

$$G_{n-l} = G\left(1+\frac{l}{m}\right)^{-m-l-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{l}{n}\right)^{-n+l-\frac{1}{2}}.$$

Darin entwickeln wir die Potenzen wie folgt:

$$\left(1+\frac{l}{m}\right)^{-m-l-\frac{1}{2}} = e^{\left(-m-l-\frac{1}{2}\right)l\cdot\left(1+\frac{l}{m}\right)}$$

$$= e^{\left(-m-l-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{l}{m}-\frac{l^2}{2m^2}+\frac{l^3}{3m^3}-\cdots\right)}$$

$$= e^{\frac{-ml-l^2-\frac{1}{2}l}{m}+\frac{ml^2+l^3+\frac{1}{2}l^2}{2m^2}-\frac{ml^3+l^4+\frac{1}{2}l^3}{3m^3}-\cdots};$$

$$\left(1-\frac{l}{n}\right)^{-n+l-\frac{1}{2}} = e^{\left(-n+l-\frac{1}{2}\right)l\cdot\left(1-\frac{l}{n}\right)}$$

$$= e^{\left(-n+l-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{l}{n}-\frac{l^2}{2n^2}-\frac{l^3}{3n^3}-\cdots\right)}$$

$$= e^{\frac{nl-l^2+\frac{1}{2}l}{n}-\frac{-nl^2+l^3-\frac{1}{2}l^2}{2n^2}-\frac{-nl^3+l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3}-\cdots}.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in jenen für G_{n-l} ergibt sich:

$$G_{n-l} = G\,e^{-\frac{l^2+l}{2m}+\frac{l^3+\frac{3}{2}l^2}{6m^2}-\frac{l^4+2l^3}{12m^3}-\frac{l^2-l}{2n}-\frac{l^3-\frac{3}{2}l^2}{6n^2}-\frac{l^4-2l^3}{12n^3}-\cdots}$$

$$= G\left\{1-\frac{l^2+l}{2m}+\frac{l^3+\frac{3}{2}l^2}{6m^2}-\frac{l^4+2l^3}{12m^3}-\frac{l^2-l}{2n}-\frac{l^3-\frac{3}{2}l^2}{6n^2}-\frac{l^4-2l^3}{12n^3}-\cdots\right\}.$$

Aendert man das Zeichen von l, so erhält man den Ausdruck für G_{n+l}, und addirt man diesen zu dem vorigen hinzu, so wird

$$G_{n-l}+G_{n+l} = G\left\{2-\frac{2l^2}{2m}-\frac{2l^2}{2n}\right\}$$

$$= 2\,G\left\{1-\frac{l^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right\},$$

$$G_{n-l} + G_{n+l} = 2G\left\{1 - \frac{l^2\mu}{2mn}\right\} = 2Ge^{-\frac{\mu l^2}{2mn}}$$

$$= 2Ge^{-\frac{l^2}{2\mu pq}}.$$

Wird

$$\varphi(l) = G_{n-l} + G_{n+l} = 2Ge^{-\frac{l^2}{2\mu pq}}$$

und

$$g = \frac{\mu}{2mn} = \frac{1}{2\mu pq}$$

gesetzt, so folgt

$$G = \frac{1}{2}\varphi(0) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}},$$

mithin

$$\varphi(l) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-gl^2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit P, dass m zwischen den Grenzen $\mu p \pm l$ enthalten ist, hat man den Ausdruck

$$P = G_{n-l} + G_{n-l+1} + \cdots + G_{n-1} + G$$
$$+ G_{n+1} + \cdots + G_{n+l-1} + G_{n+l}$$
$$= G_{n-l} + G_{n+l} + \mathop{S}_{i=0}^{i=l-1} [G_{n-i} + G_{n+i}] - G$$
$$= \varphi(l) + \sum_0^l \varphi(l) - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Nun ist nach Euler's Summenformel*) allgemein

$$\sum \varphi(l) = \frac{1}{h}\int \varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{B_1 h\varphi'(l)}{1\cdot 2} - \frac{B_3 h^3 \varphi'''(l)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

Nimmt man darin $h = 1$ und beachtet, dass man, nachdem $g = \frac{\mu}{2mn}$ von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ ist, die Glieder mit $\varphi'(l)$, $\varphi'''(l)$ u. s. w. vernachlässigen darf, da

$$\varphi'(l) = -\frac{4\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} g l e^{-l^2 g},$$

so ergibt sich die kürzere Formel

$$\sum \varphi(l) = \int \varphi(l)\,dl - \frac{1}{2}\varphi(l),$$

*) Vergl. Lacroix, Grand Traité, 2. édit., t. III, pp. 98 und ff.

und demnach

$$\sum_0^l \varphi(l) = \int_0^l \varphi(l)\, dl - \frac{1}{2}\,[\varphi(l) - \varphi(0)].$$

Macht man hiervon Gebrauch für den Ausdruck von P, so findet sich

$$P = \int_0^l \varphi(l)\, d\, l + \frac{1}{2}\,\varphi(l)$$

$$= \int_0^l \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-g l^2} dl + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-g l^2}.$$

Setzt man $g\, l^2 = \gamma^2$, woraus weiter gefunden wird:

$$l = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} = \gamma \sqrt{2\mu p q},\; dl = \frac{d\gamma}{\sqrt{g}},$$

so übergeht der vorige Ausdruck in

$$P = \int_0^\gamma \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\gamma^2}\, \frac{d\gamma}{\sqrt{g}} + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, d\, t + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}},$$

und dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl m der Wiederholungen von A enthalten ist zwischen

$$\mu p \pm l = \mu p \pm \frac{\gamma}{\sqrt{g}} = \mu p \pm \gamma \sqrt{2\mu p q},$$

oder dass $\frac{m}{\mu}$ innerhalb der Grenzen liegt:

$$p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}.$$

52. **Erste Anmerkung.** Nachdem

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, d\, t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\gamma \cdots + \int_\gamma^\infty \cdots,$$

woraus

$$\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

so folgt

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt\right\} + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}}.$$

Zur Auswerthung von $\int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt$ kann man sich der Reihe bedienen:

$$\int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left\{1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\gamma^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\gamma^6} + \cdots\right\},$$

zu welcher man mit Hilfe der Beziehung

$$\int \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^{2n}} = \int \frac{1}{t^{2n+1}}\,e^{-t^2}\,t\,dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}\int \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^{2n+2}}$$

gelangt, indem darin der Reihe nach $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt wird; auf diese Weise ergibt sich

$$\int e^{-t^2}\,dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^2},$$

$$\int \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^3} - \frac{3}{2}\int \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^4},$$

$$\int \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^4} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^5} - \frac{5}{2}\int \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^6},\ \text{u. s. w.}$$

und durch allmählige Substitution

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{-t^2}}{t} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\,\frac{e^{-t^2}}{t^3} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\,\frac{e^{-t^2}}{t^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\int \frac{e^{-t^2}dt}{t^6},$$

folglich

$$\int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma^3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\int_\gamma^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^6}.$$

Allgemein werden die beiden letzten Glieder des Ausdruckes lauten:

$$\pm \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma^{2n+1}} \mp \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}\frac{(2n+1)}{1}\int_\gamma^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^{2n+2}}$$

Der Werth des letzten Integrals wird offenbar vergrössert, wenn man an Stelle von e^{-t^2} den grössten Werth setzt, den diese Grösse innerhalb der Integrationsgrenzen annimmt, nämlich den Werth $e^{-\gamma^2}$; mithin ist

$$\int_\gamma^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^{2n+2}} < e^{-\gamma^2}\int_\gamma^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}},$$

$$\int_\gamma^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^{2n+2}} < \frac{1}{2n+1}\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma^{2n+1}},$$

$$\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots \overline{2n-1}}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}\frac{2n+1}{1}\int_\gamma^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^{2n+2}} < \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}\frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma^{2n+1}},$$

d. h. das mit dem Integral behaftete Restglied ist kleiner als das ihm vorangehende Glied der Reihe; wird daher diese bis zu einem Gliede fortgesetzt, welches genügend klein ist, so kann das Restglied als noch kleiner vernachlässigt werden; unter dieser Voraussetzung kann also geschrieben werden:

$$\int_\gamma^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-\gamma^2}}{2\gamma}\left\{1 - \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\gamma^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\gamma^6} + \cdots\right\}.$$

Wegen des häufigen Gebrauchs haben wir für das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt = \Phi(\gamma)$$

am Schlusse des Buches eine Tabelle mitgetheilt (Tafel I.); dieselbe ist dem Berliner Astronomischen Jahrbuche 1834 entlehnt und mit Hilfe der Tafel in Cournot's Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert. Für Interpolationszwecke sind auch die ersten und zweiten Differenzen angegeben.

53. **Zweite Anmerkung.** 1) Bleibt γ, und in Folge dessen auch P constant, so ziehen sich die Grenzen immer enger zusammen, in dem Masse als μ wächst.

2) Bleiben die Grenzen constant und wächst μ, so muss gleichzeitig auch γ zunehmen; dann aber nähert sich die Wahrscheinlichkeit P immer mehr der Einheit oder der Gewissheit.

Daraus schliesst man:

1. Während die Grenzen $p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$, zwischen welchen das unbekannte Verhältniss der Anzahl der Wiederholungen von A in μ Versuchen zu der Gesammtzahl aller Versuche enthalten ist, constant bleiben, nähert sich die Wahrscheinlichkeit P, dass $\frac{m}{\mu}$ zwischen jene Grenzen fallen wird, der Einheit in dem Masse, als μ, d. i. die Zahl der Versuche, wächst.

2. Während die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss $\frac{m}{\mu}$ zwischen den Grenzen $p \pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ enthalten ist, constant bleibt, zieht die immer weiter fortgesetzte Wiederholung der Versuche diese Grenzen immer enger zusammen.

Dritte Anmerkung. Für $P = \frac{1}{2}$ findet man aus Tafeln oder durch Reihenentwickelung

$$\gamma = 0{\cdot}4769 - \frac{1}{2\sqrt{2\mu pq}};$$

denn aus

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

folgt

$$\int_0^\gamma e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu pq}},$$

oder durch Entwickelung der Exponentialgrösse e^{-t^2} in eine Reihe und darauffolgende Integration

$$\gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{5}\frac{\gamma^5}{1 \cdot 2} - \cdots = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu p q}}; \quad (1)$$

nun entspricht der Werth $a = 0{\cdot}4769$ der Gleichung

$$a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}\frac{a^5}{1 \cdot 2} - \cdots = \frac{1}{4}\sqrt{\pi};$$

demnach kann Gleichung (1) geschrieben werden:

$$\gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{5}\frac{\gamma^5}{1 \cdot 2} - \cdots = a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}\frac{a^5}{1 \cdot 2} - \cdots - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu p q}}.$$

Da γ nur sehr wenig von a abweichen wird, so kann man die höheren Potenzen vernachlässigen und mit genügender Annäherung $e^{-\gamma^2} = 1$ setzen; auf diese Weise ergibt sich

$$\gamma = a - \frac{e^{-\gamma^2}}{2\sqrt{2\mu p q}} = 0{\cdot}4769 - \frac{1}{2\sqrt{2\mu p q}};$$

man hat also die Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{2}$ dafür, dass $\frac{m}{\mu}$ enthalten ist zwischen

$$p \pm \left\{ 0{\cdot}4769 \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} - \frac{1}{2\mu} \right\}.$$

Vierte Anmerkung. Haben zwei Ereignisse A und B dieselbe Wahrscheinlichkeit $p = q = \frac{1}{2}$, so ist es eben so wahrscheinlich, dass die Differenz $m - n$ ihrer Wiederholungszahlen in μ Versuchen grösser oder kleiner ist als

$$0{\cdot}6745\sqrt{\mu} - 1.$$

Denn: Allgemein ist die P die Wahrscheinlichkeit, dass $\frac{m}{\mu} - p$ enthalten ist zwischen $\pm\gamma\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ oder dass $\frac{n}{\mu} - q$ zwischen $\mp\gamma\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ gelegen ist; oder die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz

$$\frac{n}{\mu} - q - \left(\frac{m}{\mu} - p\right)$$

enthalten ist zwischen

$$\mp 2\gamma\sqrt{\frac{2pq}{\mu}};$$

oder endlich, dass

$$(p-q)\mu - 2\gamma\sqrt{2\mu p q} < m - n < (p-q)\mu + 2\gamma\sqrt{2\mu p q}.$$

Insbesondere aber ist für $P = \frac{1}{2}$

$$\gamma = 0{\cdot}4769 - \frac{1}{2\mu};$$

setzen wir überdies $p = q = \frac{1}{2}$, so verwandelt sich obige Ungleichheit in die folgende:

$$-(0{\cdot}6745\sqrt{\mu} - 1) < m - n < +(0{\cdot}6745\sqrt{\mu} - 1).$$

Es ist also, wie behauptet wurde, gleich wahrscheinlich, dass $m - n$ kleiner oder grösser ist als $0{\cdot}6745\sqrt{\mu} - 1$.

Beispiel zum Bernoulli'schen Theorem.

54. *Die günstigen Fälle für Knaben- und Mädchengeburten stehen in dem Verhältnisse 18 zu 17; wenn nun während eines Jahres 14 000 Kinder geboren werden, welches ist die Wahrscheinlichkeit P, dass die Zahl m' der Knabengeburten 7363 nicht überschreitet und nicht kleiner ist als 7037?*

A. Gang der Rechnung. Es wurde gefunden:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt + \frac{\sqrt{\mu} \cdot e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi m n}}$$

als Wahrscheinlichkeit, dass $m - l < m' < m + l$.

Nachdem

$$l = \gamma \sqrt{\frac{2mn}{\mu}},$$

so ist

$$\gamma = \frac{l\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}, \text{ daraus } \frac{\gamma}{l} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}.$$

Man hat also folgende Rechnung:

$$\log \frac{\gamma}{l} = \frac{\log \mu - (\log m + \log n + \log 2)}{2}, \quad \ldots \quad (1)$$

$$\log \gamma = \log \frac{\gamma}{l} + \log l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\gamma = \cdots$$

Der Ausdruck für P kann in der Form geschrieben werden:

$$P = \Phi + \Psi; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt$ ist auf Grund des berechneten γ aus der

Tafel I. zu entnehmen. Für

$$\Psi = \frac{\gamma}{l} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}}$$

hat man folgende Rechnung:

$$\log e^{\gamma^2} = \gamma^2 \log e$$

$$\log(\log e^{\gamma^2}) = 2\log\gamma + \log\log e \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

$$\log e^{\gamma^2} = \cdots;$$

ferner

$$\log \Psi = \log \frac{\gamma}{l} - \log e^{\gamma^2} - \log \sqrt{\pi} \quad . \quad (3)$$

$$\Psi = \ldots$$

Endlich durch Einsetzung von Ψ und Φ in die Formel (a) ergibt sich P.

B. *Gegeben* sind m den Knabengeburten,
n den Mädchengeburten günstige Fälle.

$$m + n = \mu = 14000,$$

$$m : n = 18 : 17,$$

$$m + n : m = 35 : 18,$$

$$14000 : m = 35 : 18,$$

$$m = 7200,$$

$$n = 6800.$$

$$m + l = 7363, \quad l = 7363 - m = 163.$$

$\log \mu = 4{\cdot}14613,$	$\log 2 = 0{\cdot}30103,$
$\log m = 3{\cdot}85733,$	$\log \sqrt{\pi} = 0{\cdot}24858,$
$\log n = 3{\cdot}83251,$	$\log e = 0{\cdot}43429,$
$\log l = 2{\cdot}21219,$	$\log\log e = \bar{1}{\cdot}63778.$

C. **Wirkliche Ausrechnung.**

Formel (1)

$$\log m = 3{\cdot}85733$$

$$\log n = 3{\cdot}83251$$

$$\log 2 = 0{\cdot}30103$$

$$\text{Summe} = 7{\cdot}99087$$

$$\log \mu = 4{\cdot}14613$$

$$\text{Diff.} = \bar{4}{\cdot}15526$$

$$\frac{1}{2}\,\text{Diff.} = 2{\cdot}07763 = \log \frac{\gamma}{l}.$$

Formel (2) $\log l = 2{\cdot}21219$

Summe $= 0{\cdot}28982 = \log \gamma; \quad \gamma = 1{\cdot}949.$

Formel (2') $2 \log \gamma = 0{\cdot}57963$

$\log \log e = \bar{1}{\cdot}63778$

Summe $= 0{\cdot}21742 = \log (\log e_{\gamma}{}^{2});$

Formel (3) $\log e^{\gamma^2} = 1{\cdot}64976$

$\log \sqrt{\pi} = 0{\cdot}24858$

Summe $= 1{\cdot}89834$

$\log \frac{\gamma}{l} = \bar{2}{\cdot}07763$

Diff. $= \bar{4}{\cdot}17929 = \log \Psi;$

$\Psi = 0{\cdot}00015.$

Aus der Tafel $\Phi = 0{\cdot}99415,$

$P = 0{\cdot}99430.$

Poisson's Theorem.

Verallgemeinerung des Bernoulli'schen Theorems.

55. $p_1 \cdots p_\mu$ *mögen die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses* E *im 1.,* $\cdots$ μ*ten Versuche vorstellen,* $q_1, \cdots q_\mu$ *die Wahrscheinlichkeiten des entgegengesetzten Ereignisses* F *im 1.,* $\cdots$ μ*ten Versuche. Wir nehmen an, das Ereigniss* E *sei in* $\mu = m + n$ *Versuchen* m*-mal, jenes* F n*-mal eingetroffen; ferner sei*

$$p = \frac{p_1 + \cdots + p_\mu}{\mu}, \qquad q = \frac{q_1 + \cdots + q_\mu}{\mu}.$$

Es kann dann mit einer der Gewissheit nahen Wahrscheinlichkeit behauptet werden, dass in einer sehr grossen Anzahl μ *von Versuchen annähernd*

$$p = \frac{m}{\mu}, \qquad q = \frac{n}{\mu},$$

und es gelten diese Gleichheiten um so genauer, je grösser μ*; für* $\mu = \infty$ *werden sie streng richtig.*

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit U_i für das m-malige Eintreffen von E und das n-malige Eintreffen von F in μ Versuchen ist der Coefficient von $u^m v^n$ in dem Ausdrucke (Nr. 23)

$$X = (p_1 u + q_1 v) \cdots (p_\mu u + q_\mu v) = \Sigma\, U_i u^m v^n.$$

Setzt man

$$u = e^{x\sqrt{-1}}, \qquad v = e^{-x\sqrt{-1}},$$

was ohne weiteres erlaubt ist, da U_i von u und v nicht abhängt, so ergibt sich

$$X = \sum U_i\, e^{(m-n)x\sqrt{-1}} = \sum U_i\, e^{ix\sqrt{-1}},$$

wenn $m - n = i$ genommen wird; es ist also

$$X = U_0 + U_1 e^{x\sqrt{-1}} + \cdots + U_i e^{ix\sqrt{-1}} + U_{i+1} e^{(i+1)x\sqrt{-1}} + \cdots;$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx$ und integrirt beiderseits innerhalb der Grenzen $\pm\pi$, so wird

$$\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx = U_0 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx + U_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(i-1)x\sqrt{-1}}\,dx + \cdots$$

$$+ U_i \int_{-\pi}^{\pi} dx + U_{i+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\sqrt{-1}}\,dx + \cdots$$

Es kann nun leicht erwiesen werden, dass die sämmtlichen Integrale der rechten Seite, bis auf das mit U_i verknüpfte, verschwinden; denn es ist allgemein

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm mx\sqrt{-1}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx \pm \sqrt{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{\pi} - \left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{-\pi} \mp \sqrt{-1}\left\{\left[\frac{1}{m}\cos mx\right]_{\pi} - \left[\frac{1}{m}\cos mx\right]_{-\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{m}\sin m\pi \mp 0 = 0;$$

ferner hat man

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi;$$

nach diesen Bemerkungen reducirt sich obige Gleichung auf

$$\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx = 2\pi\, U_i,$$

woraus

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-ix\sqrt{-1}}\, dx. \;\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Bestimmung von (X). Die Function X lässt sich wie folgt transformiren:

$$\begin{aligned} X &= (p_1 u + q_1 v)(p_2 u + q_2 v)\cdots(p_\mu u + q_\mu v) \\ &= (p_1 e^{x\sqrt{-1}} + q_1 e^{-x\sqrt{-1}})(p_2 e^{x\sqrt{-1}} + q_2 e^{-x\sqrt{-1}})\cdots \\ &\quad (p_i e^{x\sqrt{-1}} + q_i e^{-x\sqrt{-1}})\cdots(p_\mu e^{x\sqrt{-1}} + q_\mu e^{-x\sqrt{-1}}) \\ &= [(p_1 + q_1)\cos x + \sqrt{-1}(p_1 - q_1)\sin x]\cdots \\ &\quad [(p_i + q_i)\cos x + \sqrt{-1}\,(p_i - q_i)\sin x]\cdots \\ &\quad [(p_\mu + q_\mu)\cos x + \sqrt{-1}\,(p_\mu - q_\mu)\sin x]. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} (p_i + q_i)\cos x &= \varrho_i \cos\varphi_i \\ (p_i - q_i)\sin x &= \varrho_i \sin\varphi_i \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

und beachtet dabei, dass $p_i + q_i = 1$ ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \varrho_i^2 &= \cos^2 x + (p_i - q_i)^2 \sin^2 x = \cos^2 x + [(p_i + q_i)^2 - 4p_i q_i]\sin^2 x \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x - 4p_i q_i \sin^2 x = 1 - 4p_i q_i \sin^2 x \;\ldots \quad (1) \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{p_i - q_i}{p_i + q_i}\operatorname{tg} x = (p_i - q_i)\operatorname{tg} x \;\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Formeln (1) und (2) bestimmen die neu eingeführten Grössen ϱ und φ.

Führt man die Substitutionen (a) auch in der Function X durch, so wird

$$\begin{aligned} X &= \varrho_1(\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1)\,\varrho_2(\cos\varphi_2 + \sqrt{-1}\sin\varphi_2) \\ &\qquad \cdots \varrho_\mu(\cos\varphi_\mu + \sqrt{-1}\sin\varphi_\mu) \\ &= \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_\mu\, e^{(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\mu)\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Bedient man sich der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_\mu &= Y \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\mu &= y \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

so nimmt X die einfache Gestalt an:

$$X = Y e^{y\sqrt{-1}},$$

welche den Ausdruck (A) auf die Form bringt:

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y e^{y\sqrt{-1}}\, e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y e^{[y-(m-n)x]\sqrt{-1}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx.$$

Der imaginäre Bestandtheil der rechten Seite verschwindet; denn zunächst ist

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin[y-(m-n)x]\,dx = \int_{-\pi}^{0}\cdots + \int_{0}^{\pi} = -\int_{0}^{-\pi}\cdots + \int_{0}^{\pi}\cdots;$$

Formel (2) zeigt aber, dass φ_i mit x das Zeichen wechselt, folglich thut dies auch $y = \Sigma\varphi_i$; dagegen behält Y sein Zeichen bei; demnach ergibt sich weiter

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin[y-(m-n)x]dx = -\int_{0}^{\pi}\sin[-y+(m-n)x]d(-x) + \int_{0}^{\pi}\sin[y-(m-n)x)d$$

$$= -\int_{0}^{\pi}\sin[y-(m-n)x]\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin[y-(m-n)x]\,dx$$

$$= 0.$$

Es bleibt also

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx;$$

die Richtigkeit der letzten Transformation erhellt daraus, dass für Werthepaare wie $\frac{\pi}{2} - x$ und $\frac{\pi}{2} + x$ die Function Y keine Aenderung erfährt, während die beiden übrigen Factoren, $\cos[y-(m-n)x]$ und dx, blos ihr Zeichen wechseln; die Function unter dem Integral behält also für solche Werthepaare denselben Werth, woraus hervorgeht, dass die Integration von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ dasselbe ergeben muss wie jene von $\frac{\pi}{2}$ bis π.

1. *Bestimmung von Y.*

Es war

$$= \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_\mu = \sqrt{1 - 4 p_1 q_1 \sin^2 x} \cdot \sqrt{1 - 4 p_2 q_2 \sin^2 x} \cdots \sqrt{1 - 4 p_\mu q_\mu \sin^2 x}.$$

Jeder der Factoren ist kleiner als 1; umsomehr wird Y einen als 1 kleineren und nur für sehr niedrige Werthe von x einen merklichen Werth haben; vernachlässigt man daher bei der Entwickelung Glieder von der vierten Ordnung an, so wird

$$\varrho_i = \sqrt{1 - 4 p_i q_i \sin^2 x} = \sqrt{1 - 4 p_i q_i x^2} = 1 - 2 p_i q_i x^2,$$

und

$$l \cdot \varrho_i = l \cdot (1 - 2 p_i q_i x^2) = - 2 p_i q_i x^2;$$

demzufolge ist

$$l \cdot Y = \Sigma l \cdot \varrho_i = - x^2 \Sigma 2 p_i q_i,$$

und indem man

$$\Sigma 2 p_i q_i = 2 (p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_\mu q_\mu) = \mu k^2 \quad . \; . \; (c)$$

setzt, wird weiter

$$l \cdot Y = - x^2 \mu k^2$$
$$= - k^2 z^2,$$

wobei $\mu x^2 = z^2$, also $x = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$ genommen wurde; durch Uebergang zu den Zahlen ergibt sich schliesslich

$$Y = e^{-k^2 z^2} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

2. *Bestimmung von y.*

Es war

$$y = \Sigma \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\mu .$$

Nun ist

$$\sin \varphi_i = \frac{p_i - q_i}{\varrho_i} \sin x = (p_i - q_i) \left(x - \frac{x^3}{6}\right) (1 - 2 p_i q_i x^2)^{-1}$$

$$= (p_i - q_i) \left(x - \frac{x^3}{6}\right) (1 + 2 p_i q_i x^2)$$

$$= (p_i - q_i) x + (p_i - q_i) \left(2 p_i q_i - \frac{1}{6}\right) x^3 = \omega,$$

woraus

$$= \arcsin \omega = \int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} = \int (1 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}} d\omega = \int \left(1 + \frac{\omega^2}{2}\right) d\omega = \omega + \frac{\omega^3}{6}$$

$$\varphi_i = (p_i - q_i)x + (p_i - q_i)\left(2p_iq_i - \frac{1}{6}\right)x^3 + \frac{1}{6}[(p_i - q_i)x + \cdots]^3$$

$$= (p_i - q_i)x + \left[(p_i - q_i)\left(2p_iq_i - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}(p_i - q_i)^3\right]x^3,$$

oder, indem man wie oben $(p_i - q_i)^2$ durch $1 - 4p_iq_i$ ersetzt:

$$\varphi_i = (p_i - q_i)x + (p_i - q_i)\left[2p_iq_i - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(1 - 4p_iq_i)\right]x^3$$

$$= (p_i - q_i)x + \frac{4}{3}p_iq_i(p_i - q_i)x^3.$$

In Folge dieses Ausdruckes für φ_i hat man jetzt:

$$y = \Sigma\varphi_i = x\,\Sigma(p_i - q_i) + x^3\sum\frac{4}{3}p_iq_i(p_i - q_i).$$

Erinnert man sich ferner der Beziehungen

$$\Sigma p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu = \mu p,$$

$$\Sigma q_i = q_1 + q_2 + \cdots + q_\mu = \mu q,$$

und bedient sich der Abkürzung

$$\sum\frac{4}{3}p_iq_i(p_i - q_i) = \mu h, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

so wird

$$y = \mu(p - q)x + \mu h x^3,$$

und nach Einführung der Variablen $z = x\sqrt{\mu}$:

$$y = \sqrt{\mu}(p - q)z + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}.$$

Bevor wir jedoch diesen Werth in den Ausdruck für U_i einsetzen, berechnen wir uns das darin auftretende $y - (m - n)x$. Es ist nämlich

$$y - (m - n)x = \sqrt{\mu}(p - q)z + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}} - (m - n)\frac{z}{\sqrt{\mu}}$$

$$= \sqrt{\mu}\left[p - q - \left(\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu}\right)\right]z + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}}$$

$$= gz\sqrt{\mu} + \frac{hz^3}{\sqrt{\mu}},$$

wenn gesetzt wird:

$$g = p - \frac{m}{\mu} + \frac{n}{\mu} - q = p - \frac{m}{\mu} + \left(p - \frac{m}{\mu}\right) = 2\left(p - \frac{m}{\mu}\right) = 2\left(\frac{n}{\mu} - q\right)$$

woraus

$$m = \mu p - \frac{\mu g}{2}; \qquad n = \mu q + \frac{\mu g}{2}. \quad \ldots \quad \text{(e)}$$

Nach Einsetzung der für Y und ... ge-

Bertrand.

Zum Bernoulli'schen Theorem

(C. R. 94, p. 185–186).

Seien p, q die Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse A, B. [illegible] $\left(\frac{n}{\mu}-p\right)^2$ [illegible]

$$\mathcal{E} = \sum\left(\frac{k}{\mu}-p\right)^2\binom{\mu}{k}p^k q^{\mu-k}$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\sum\binom{\mu}{k}k^2 p^k q^{\mu-k} - \frac{2p}{\mu}\sum\binom{\mu}{k}k\,p^k q^{\mu-k} + p^2\sum\binom{\mu}{k}p^k q^{\mu-k}.$$

[illegible] $p+q=1$

$$\mathcal{E} = \frac{pq}{\mu}.$$

[illegible] $\mathcal{E}$ [illegible] 0, [illegible] $\left(\frac{n}{\mu}-p\right)$ [illegible]

[[illegible] $\binom{\mu}{k}p^k q^{\mu-k}$, [illegible] $\left(\frac{k}{\mu}-p\right)^2 > \delta^2$, [illegible] $\mathcal{E} > \delta^2 t$, [illegible] $t < \frac{pq}{\mu\delta^2}$, [illegible]]

$\varphi_i = ($

$= ($

0

8

1

ε

t

ε

(

!

Nach Einsetzung der für Y und $y - (m - n)x$ gewonnenen Werthe in den Ausdruck für U_i erhält man, wenn auch noch die obere Grenze, der neuen Variablen gemäss, in $\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}$ umgewandelt wird:

$$U_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2 z^2} \cos\left(g z \sqrt{\mu} + \frac{h z^3}{\sqrt{\mu}}\right)\frac{dz}{\sqrt{\mu}}$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2 z^2} \cos\left[z\sqrt{\mu}\,(g + h x^2)\right] dz$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2 z^2}\left[\cos(z\sqrt{\mu} g)\cos(z\sqrt{\mu} h x^2) - \sin(z\sqrt{\mu} g)\sin(z\sqrt{\mu} h x^2)\right] dz,$$

oder, wenn wie oben die Potenzen von x von der vierten an unterdrückt werden:

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2 z^2}\left[\cos(z\sqrt{\mu}\, g) - \sin(z\sqrt{\mu}\, g)\, z\sqrt{\mu}\, h x^2\right] dz$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}} e^{-k^2 z^2}\left[\cos(z\sqrt{\mu}\, g) - \frac{h z^3}{\sqrt{\mu}}\sin(z\sqrt{\mu}\, g)\right] dz.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen p_i und q_i weder der Null noch der Einheit nahe liegen, wird $k^2 = \frac{2\Sigma p_i q_i}{\mu}$ [vergleiche (c)] keine sehr kleine Zahl vorstellen, so gross auch μ sein mag. Daher wird der Werth von $e^{-k^2 z^2}$, wenn $z > \frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}$ geworden ist, unmerklich sein, und unter solchen Umständen kann die von $\frac{\pi}{2}\sqrt{\mu}$ bis ∞ fortgesetzte Integration auch nur eine unwesentliche Vergrösserung von U_i zur Folge haben. Man kann daher schreiben:

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\int_0^{\infty} e^{-k^2 z^2}\cos(z\sqrt{\mu} g)\, dz - \frac{2h}{\pi\mu}\int_0^{\infty} e^{-k^2 z^2}\sin(z\sqrt{\mu}\, g)\, z^3\, dz.$$

Bestimmung dieser beiden Integrale.

Die Auswerthung des ersten Integrals gelingt durch Differentiation nach g und nachherige Anwendung der theilweisen Integration, wobei noch zu beachten ist, dass für $g = 0$ der Werth des Integrals gleich $\frac{\sqrt{\pi}}{2k}$ wird; man erhält auf diese Weise leicht

$$1) \qquad \int_0^\infty e^{-k^2 z^2} \cos(gz\sqrt{\mu})\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2k} e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Durch Differentiation dieser Formel in Bezug auf g wird weiter:

$$\int_0^\infty e^{-k^2 z^2} z \cdot \sin(gz\sqrt{\mu})\, dz = g\frac{\sqrt{\mu\pi}}{4k^3} e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}};$$

durch nochmalige Differentiation in Bezug auf k ergibt sich:

$$\int_0^\infty e^{-k^2 z^2} \cdot - 2kz^2 \cdot z \sin(gz\sqrt{\mu})dz = \frac{g\sqrt{\mu\pi}}{4}\left(-\frac{3}{k^4} + \frac{\mu g^2}{2k^3}\cdot\frac{1}{k^3}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}},$$

woraus endlich folgt:

$$2) \qquad \int_0^\infty e^{-k^2 z^2} z^3 \sin(gz\sqrt{\mu})\, dz = \frac{g\sqrt{\mu\pi}}{8k^5}\left(3 - \frac{\mu g^2}{2k^2}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Substituirt man die beiden Werthe 1) und 2) in die Formel für U_i, so nimmt letztere die Gestalt an:

$$U_i = \frac{2}{\pi\sqrt{\mu}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2k}e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}} - \frac{2h}{\pi\mu}\cdot\frac{g\sqrt{\mu\pi}}{8k^5}\left(3 - \frac{\mu g^2}{2k^2}\right)e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}$$
$$= \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{gh}{4k^5\sqrt{\mu\pi}}\left(3 - \frac{\mu g^2}{2k^2}\right)\right]e^{-\frac{\mu g^2}{4k^2}}.$$

Bedient man sich der Abkürzung

$$\frac{\mu g^2}{4k^2} = \Theta^2, \qquad \text{woraus} \qquad g = \frac{2k\Theta}{\sqrt{\mu}},$$

so wird schliesslich

$$U_i = \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{h\Theta}{2k^4\mu\sqrt{\pi}}(3 - 2\Theta^2)\right]e^{-\Theta^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss

$$E \quad m = \mu p - \frac{\mu g}{2} = \mu p - k\Theta\sqrt{\mu} \text{ mal}$$

und jenes

$$F \quad n = \mu p + \frac{\mu g}{2} = \mu q + k\Theta\sqrt{\mu} \text{ mal}$$

eintrifft.

Erste Anmerkung. Für $\Theta = 0$ erlangt U_i seinen höchsten Werth; es wird nämlich

$$U_i = \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}$$

die Wahrscheinlichkeit für das $m = \mu p$ malige Eintreffen von E und das $n = \mu q$ malige Eintreffen von F, daraus folgt dann $m : n = p : q$.

Zweite Anmerkung. Man suche die Wahrscheinlichkeit, dass

$$E \qquad m = \mu p \pm kt\sqrt{\mu} \text{ mal}$$

und

$$F \qquad n = \mu q \pm kt\sqrt{\mu} \text{ mal}$$

eintrifft.

Nimmt man Θ einmal gleich $-t$, das anderemal gleich $+t$, wobei man unter t ein Vielfaches von $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$ zu denken hat, so ist die Summe der Werthe, welche dabei U_i annimmt, die gesuchte Wahrscheinlichkeit, also

$$U_{-t} + U_t = \left[\frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} + \frac{ht}{4k^4\mu\sqrt{\pi}}(3-2t^2) + \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} - \frac{ht}{4k^4\mu\sqrt{\pi}}(3-2t^2)\right]e^{-t^2}$$

$$= \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}}\, e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit,

dass m eine der zwei Zahlen $\mu p \pm kt\sqrt{\mu}$
und n „ „ „ „ $\mu q \pm kt\sqrt{\mu}$

ist.

Dritte Anmerkung. Man suche die Wahrscheinlichkeit, dass m und n zwischen den Grenzen

$$\mu p \pm uk\sqrt{\mu} \quad \text{und} \quad \mu q \pm uk\sqrt{\mu}$$

beziehungsweise enthalten sind.

Wir setzen

$$\delta = \frac{1}{k\sqrt{\mu}}, \quad t = i\delta, \quad u = l\delta.$$

Es ist dann

$U_0 = \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}$ die Wahrscheinlichkeit, dass $m = \mu p, \quad n = \mu q$;

$U_{-\delta} + U_\delta = \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-\delta^2}$ „ „ $m = \mu p \pm \delta k \sqrt{\mu}$,

$n = \mu q \mp \delta k \sqrt{\mu}$;

$U_{-2\delta} + U_{2\delta} = \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-(2\delta)^2}$ „ „ $m = \mu p \pm 2\delta k \sqrt{\mu}$,

$n = \mu q \mp 2\delta k \sqrt{\mu}$;

. . . .

$U_{-i\delta} + U_{i\delta} = \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-(i\delta)^2}$ „ „ $m = \mu p \pm i\delta k \sqrt{\mu}$,

$n = \mu q \mp i\delta k \sqrt{\mu}$;

. . . .

$U_{-l\delta} + U_{l\delta} = \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} e^{-(l\delta)^2}$ „ „ $m = \mu p \pm l\delta k \sqrt{\mu}$;

$n = \mu q \mp l\delta k \sqrt{\mu}$.

Die Summe dieser Grössen ist der Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit; es ist also, wenn $i\delta$ durch t ersetzt wird,

$$P = \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}} + \frac{2}{k\sqrt{\mu\pi}} \sum_\delta^u e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass m zwischen $\mu p - uk\sqrt{\mu}$ und $\mu p + uk\sqrt{\mu}$ enthalten ist.

Nun hat man

$$\sum_\delta^u e^{-t^2} = \sum_\delta^\infty e^{-t^2} - \sum_u^\infty e^{-t^2};$$

nachdem aber δ sehr klein und $\sum_0^\infty = \sum_0^\delta + \sum_\delta^\infty$, so kann $\sum_\delta^\infty$ durch $\sum_0^\infty$ ersetzt werden; dadurch wird

$$\sum_\delta^u e^{-t^2} = \sum_0^\infty e^{-t^2} - \sum_u^\infty e^{-t^2}. \qquad \text{(a')}$$

Nach Euler's Summirungsformel (Nr. 51) ist

$$\sum_u^\infty e^{-t^2} = \frac{1}{\delta}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{2} e^{-u^2} - \frac{1}{6}\delta u\, e^{-u^2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{2}e^{-u^2},$$

wenn die folgenden Glieder mit Rücksicht auf ihren geringen Werth vernachlässigt werden. Für $u = 0$ wird

$$\sum_0^\infty e^{-t^2} = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Durch Einführung der für die Summen gewonnenen Werthe in die Formel (a′) übergeht diese in

$$\sum_\delta^u e^{-t^2} = \frac{1}{2\delta}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}e^{-u^2},$$

und der Ausdruck für P verwandelt sich, wenn man gleichzeitig $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$ durch δ ersetzt, in

$$P = \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\delta}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\delta} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}e^{-u^2}\right\}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{\delta}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{k\sqrt{\mu\pi}}e^{-u^2}.$$

Vierte Anmerkung. Es wurde gesetzt:

$$k^2 = \sum \frac{2p_i q_i}{\mu};$$

sind p_i und q_i constante Werthe gleich p und q, so wird einfach

$$k^2 = 2pq, \qquad k = \sqrt{2pq},$$

und die letzte Formel verwandelt sich in diejenige, welche wir beim Bernoulli'schen Theorem gefunden haben.

Die letzentwickelte Formel drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass

$$\mu p - l\delta k\sqrt{\mu} < m < \mu p + l\delta k\sqrt{\mu}$$

und

$$\mu q - l\delta k\sqrt{\mu} < n < \mu q + l\delta k\sqrt{\mu},$$

oder, indem man δ durch seinen Werth $\frac{1}{k\sqrt{\mu}}$ ersetzt, die Wahrscheinlichkeit, dass

$$\mu p - l < m < \mu p + l,$$
$$\mu q - l < n < \mu q + l,$$

oder endlich, wenn $\frac{l}{\mu} = \lambda$ gesetzt wird, die Wahrscheinlichkeit, dass

$$p - \lambda < \frac{m}{\mu} < p + \lambda,$$
$$q - \lambda < \frac{n}{\mu} < q + \lambda.$$

Poisson's Problem.

56. *Eine Grösse A ist aller zwischen a und b gelegenen Werthe fähig; die Wahrscheinlichkeiten dieser Werthe sind unter einander verschieden bei demselben Versuche, und sie ändern sich überdies von einem Versuche zum andern; nach μ Versuchen bestimme man 1) die Wahrscheinlichkeit P, dass die Summe der Werthe von A einer gegebenen Grösse S gleichkomme; 2) die Wahrscheinlichkeit Π, dass diese Summe zwischen zwei gegebenen Grenzen eingeschlossen sei.*

Lösung. Wir denken uns das endliche Intervall von a bis b in unendlich kleine gleiche Intervalle dz getheilt und setzen

$$\alpha\, dz = a, \qquad \beta\, dz = b;$$

die möglichen Werthe von A sind dann

$$\alpha\, dz, (\alpha + 1)\, dz, \cdots n\, dz, \cdots (\beta - 1)\, dz, \beta\, dz.$$

Nun seien beziehungsweise

$$p_1^{(\alpha)}, p_1^{(\alpha+1)}, \cdots p_1^{(n)}, \cdots p_1^{(\beta-1)}, p^{(\beta)};$$
$$p_2^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha+1)}, \cdots p_2^{(n)}, \cdots p_2^{(\beta-1)}, p_2^{(\beta)};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Wahrscheinlichkeiten dieser Werthe im 1., 2., $\cdots$ Versuche.

Nimmt man $S = m\,dz$ und

$$X = \sum_{\alpha}^{\beta} {}_n p_1^{(n)}\, t^{n\,dz} . \sum_{\alpha}^{\beta} {}_n p_2^{(n)}\, t^{n\,dz} \ldots \sum_{\alpha}^{\beta} {}_n p_\mu^{(n)}\, t^{n\,dz} = \sum U_m t^{m\,dz},$$

so ist $P = U_m$.

Da U_m unabhängig ist von t, so kann $t = e^{x\sqrt{-1}}$ gesetzt werden, wobei x einen endlichen Werth vorstellt; nimmt man überdies $n\,dz = z$, so wird

$$X = \sum_{\alpha}^{\beta} {}_n p_1^{(n)}\, e^{zx\sqrt{-1}} . \sum_{\alpha}^{\beta} {}_n p_2^{(n)}\, e^{zx\sqrt{-1}} \ldots \sum_{\alpha}^{\beta} {}_n p_\mu^{(n)}\, e^{zx\sqrt{-1}}$$

$$= \sum U_m e^{m\,dz\,x\sqrt{-1}},$$

und daraus folgt nach dem bekannten Vorgange:

$$P = U_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\, e^{-m\,dz \cdot x\sqrt{-1}}\, d(x\,dz) \, \ldots \ldots \text{(a)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe $S = m\,dz$ zwischen zwei Grenzen $i\,dz$ und $i'dz$ oder dass die Zahl m zwischen den Grenzen i und i' enthalten ist, leitet sich hieraus leicht ab; es ist

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\, d(x\,dz) \sum_{i}^{i'} {}_m\, e^{-m(x\,dz)\sqrt{-1}} \, \ldots \ldots \text{(b)}$$

Die unter diesem Integral auftretende Summe lässt sich wie folgt schreiben:

$$\sum_{i}^{i'} {}_m\, e^{-m(x\,dz)\sqrt{-1}} = e^{-ix\,dz\sqrt{-1}} + e^{-(i+1)x\,dz\sqrt{-1}} + \ldots + e^{-i'x\,dz\sqrt{-1}}$$

$$= e^{-ix\,dz\sqrt{-1}} \Big\{ 1 + e^{-x\,dz\sqrt{-1}} + e^{-2x\,dz\sqrt{-1}} + \ldots + e^{-(i'-i)x\,dz\sqrt{-1}} \Big\}$$

$$= e^{-ix\,dz\sqrt{-1}}\, \frac{e^{-(i'-i+1)x\,dz\sqrt{-1}} - 1}{e^{-x\,dz\sqrt{-1}} - 1}$$

$$= \frac{e^{-(i-1)x\,dz\sqrt{-1}} - e^{-i'x\,dz\sqrt{-1}}}{e^{x\,dz\sqrt{-1}} - 1}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} \frac{e^{-(i-1)xdz\sqrt{-1}} - e^{-i'xdz\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}} - e^{-\frac{1}{2}xdz\sqrt{-1}}}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2\sin\frac{1}{2}(xdz)} \left\{ e^{-(i'+\frac{1}{2})xdz\sqrt{-1}} - e^{-(i-\frac{1}{2})xdz\sqrt{-1}} \right\}.$$

Nachdem x eine endliche Grösse bedeutet, so kann der Sinus durch den Bogen ersetzt werden, und da ferner i und i' unendlich grosse Zahlen vorstellen müssen, sollen idz und $i'dz$ endliche Werthe sein, so kann $\frac{1}{2}$ gegen i und i' vernachlässigt werden; dadurch wird

$$\sum_{i}^{i'}{}_m e^{-m(xdz)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{xdz} \left\{ e^{-i'xdz\sqrt{-1}} - e^{-ixdz\sqrt{-1}} \right\}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Formel (b) unter Beachtung, dass

$$\frac{d(xdz)}{xdz} = \frac{dx}{x},$$

und dass den Grenzen $\pm\pi$ von xdz jene $\pm\frac{\pi}{dz} = \pm\infty$ von x entsprechen, und indem man $i'dz$ durch $c+\varepsilon$, idz durch $c-\varepsilon$ ersetzt, so übergeht letztgedachte Formel in

$$\Pi = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{dx}{x} e^{-cx\sqrt{-1}} \left[e^{-\varepsilon x\sqrt{-1}} - e^{\varepsilon x\sqrt{-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{dx}{x} e^{-cx\sqrt{-1}} \sin \varepsilon x; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

es ist dies die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe $S = m\,dz$ der Werthe von A nach μ Versuchen enthalten ist zwischen den Grenzen $c-\varepsilon$ und $c+\varepsilon$.

Zunächst handelt es sich um einen Ausdruck für X.

Die Wahrscheinlichkeit $p_i^{(n)}$ des Werthes $n\,dz = z$ von A im i^{ten} Versuche ist eine Function von z, und zwar von unendlich kleinem Betrage, vorausgesetzt, dass die Anzahl der möglichen Werthe von A unendlich gross ist; man kann daher

$$p_i^{(n)} = f_i(z)\,dz$$

setzen und hat folglich

$$\sum_{\alpha}^{\beta}{}_n\, p_i^{(n)} e^{xz\sqrt{-1}} = \int_a^b f_i(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}}$$

und

$$\int_a^b f_i(z)\,dz = 1.$$

Durch diese Bemerkung wird

$$X = \int_a^b f_1(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} \cdot \int_a^b f_2(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} \ldots \int_a^b f_\mu(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}}. \quad \text{(d)}$$

Auf Grund der Relationen

$$\int_a^b f_i(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} = \int_a^b f_i(z)\,dz \cos xz + \sqrt{-1}\int_a^b f_i(z)\,dz \sin xz \quad \text{(e)}$$

$$\int_a^b f_i(z)\,dz = 1$$

erkennt man leicht, dass

$$\int_a^b f_i(z)\,dz \cos xz < 1 \qquad \text{und} \qquad \int_a^b f_i(z)\,dz \sin xz < 1,$$

und dass daher gesetzt werden kann:

$$\int_a^b f_i(z)\,dz\, e^{xz\sqrt{-1}} = \varrho_i \cos \varphi_i + \sqrt{-1}\,\varrho_i \sin \varphi_i = \varrho_i\, e^{\varphi_i \sqrt{-1}}; \quad \text{(f)}$$

der Ausdruck für X nimmt dadurch folgende Gestalt an:

$$X = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_\mu \left\{\cos \sum_1^\mu{}_i\, \varphi_i + \sqrt{-1} \sin \sum_1^\mu{}_i\, \varphi_i\right\}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_\mu = Y, \qquad \sum_1^\mu{}_i\, \varphi_i = y$$

wird weiter

$$X = Y(\cos y + \sqrt{-1} \cdot \sin y) = Y e^{y\sqrt{-1}},$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in die Formel (c):

$$\Pi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y e^{(y-cx)\sqrt{-1}} \sin \varepsilon x \cdot \frac{dx}{x} \ldots\ldots \quad \text{(g)}$$

Man überzeugt sich leicht, dass bei einem Zeichenwechsel von x die Function Y ungeändert bleibt, während

y sein Zeichen ändert; man ersieht dies aus den Formeln, welche sich durch Vergleichung von (e) und (f) ergeben, nämlich:

$$\varrho_i^2 = \left\{\int_a^b f_i(z)\, dz \cos xz\right\}^2 + \left\{\int_a^b f_i(z)\, dz \sin xz\right\}^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{\int_a^b f_i(z)\, dz \sin xz}{\int_a^b f_i(z)\, dz \cos xz}.$$

Nun kann Formel (g) wie folgt zerlegt werden:

$$\Pi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y \cos(y - cx) \sin \varepsilon x \cdot \frac{dx}{x} + \frac{\sqrt{-1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y \sin(y - cx) \sin \varepsilon x \cdot \frac{dx}{x};$$

nach den vorhin gemachten Bemerkungen ist die unter dem zweiten Integral stehende Function ungerad, dasselbe verschwindet also mit Rücksicht auf seine Grenzen; dagegen ist die Function unter dem ersten Integral gerad, die Integration von $-\infty$ bis 0 ergibt daher dasselbe wie jene von 0 bis $+\infty$; es bleibt also

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} Y \cos(y - cx) \sin \varepsilon x \frac{dx}{x}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(h)}$$

Zum Zwecke der Ausführung dieser Integration ist die Ermittelung von Näherungswerthen für Y und y nothwendig.

1. *Berechnung von Y.*

Zunächst ist klar, dass $\varrho_i < 1$ ist. Denn

$$\varrho_i^2 = \left[\int_a^b f_i(z)\, dz \cos xz\right]^2 + \left[\int_a^b f_i(z)\, dz \sin xz\right]^2$$

$$= \int_a^b f_i(z)\, dz \cos xz \int_a^b f_i(z')dz' \cos xz' + \int_a^b f_i(z)\, dz \sin xz \int_a^b f_i(z')\, dz' \sin xz'$$

$$= \int_a^b\int_a^b f_i(z)\, f_i(z')\, dz\, dz' \cos x(z - z') < \int_a^b\int_a^b f_i(z)\, f_i(z')\, dz\, dz'$$

$$= \int_a^b f_i(z)\, dz \int_a^b f_i(z')\, dz' = 1.$$

Für $x = 0$ ist $\varrho_i = 1$.

Hieraus folgt, dass für ein sehr kleines x der Ausdruck $Y = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_\mu$ einen unmerklichen Werth annehmen wird, dass man daher die höheren Potenzen von x, mit der vierten angefangen, wird vernachlässigen dürfen; dann ist

$$\cos xz = 1 - \frac{x^2 z^2}{2}, \qquad \sin xz = xz - \frac{x^3 z^3}{6},$$

folglich

$$\varrho_i \cos\varphi_i = \int_a^b f_i(z)\,dz \cos xz = \int_a^b f_i(z)\,dz\left(1 - \frac{x^2 z^2}{2}\right) = \int_a^b f_i(z)\,dz - \int_a^b f_i(z)\,dz \cdot \frac{x^2 z^2}{2}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\int_a^b z^2 f_i(z)\,dz = 1 - \frac{x^2}{2} k_i',$$

wenn

$$k_i' = \int_a^b z^2 f_i(z)\,dz$$

gesetzt wird, ferner

$$\varrho_i \sin\varphi_i = \int_a^b f_i(z)\,dz \sin xz = \int_a^b f_i(z)dz\left(xz - \frac{x^3 z^3}{6}\right)$$

$$= x\int_a^b z f_i(z)\,dz - \frac{x^3}{6}\int_a^b z^3 f_i(z)\,dz$$

$$= x k_i - \frac{x^3}{6} k_i'',$$

wenn

$$k_i = \int_a^b z f_i(z)\,dz, \qquad k_i'' = \int_a^b z^3 f_i(z)\,dz$$

genommen wird.

Daraus ergibt sich, immer bis auf Glieder mit der dritten Potenz von x einschliesslich gerechnet,

$$\varrho_i^2 \cos^2\varphi_i = 1 - x^2 k_i', \qquad \varrho_i^2 \sin^2\varphi_i = x^2 k_i^2,$$

also

$$\varrho_i^2 = 1 - (k_i' - k_i^2)\,x^2 = 1 - 2h_i\,x^2,$$

wobei

$$k_i' - k_i^2 = 2h_i.$$

Nimmt man beiderseits hyperbolische Logarithmen, so wird

$$2l \cdot \varrho_i = l \cdot (1 - 2h_i x^2) = -2h_i x^2$$
$$l \cdot \varrho_i = -h_i x^2,$$

woraus weiter folgt

$$l\cdot Y=\sum_1^\mu{}_i\, l\cdot\varrho_i=-x^2\sum_1^\mu{}_i\, h_i=-\mu h x^2,$$

indem gesetzt wird:

$$\sum_1^\mu h_i=\mu h,\qquad\text{so dass}\qquad h=\frac{h_1+h_2+\cdots+h_\mu}{\mu}.$$

Durch Uebergang zu den Zahlen erhält man

$$Y=e^{-\mu h x^2}$$

und damit

$$\Pi=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\mu h x^2}\sin\varepsilon x\cos(y-cx)\frac{dx}{x}\,.\;.\;.\;.\;.\quad\text{(k)}$$

2. *Berechnung von φ_i und y.*

Aus der schon früher gewonnenen Näherung

$$\varrho_i\sin\varphi_i=\int_a^b f_i(z)\,dz\sin xz=xk_i-\frac{x^3}{6}k_i''$$

ergibt sich mit Benützung des oben abgeleiteten Näherungswerthes für ϱ_i^2

$$\sin\varphi_i=\frac{xk_i-\frac{x^3}{6}k_i''}{\varrho_i}=\left(xk_i-\frac{x^3}{6}k_i''\right)(1+h_ix^2)$$

$$=\left(xk_i-\frac{x^3}{6}k_i''\right)\left(1+\frac{k_i'-k_i^2}{2}x^2\right)=xk_i-\left(\frac{k_i''}{6}-\frac{k_ik_i'}{2}+\frac{k_i^3}{2}\right)x^3.$$

Setzt man für den Augenblick $\sin\varphi_i=\nu$, so folgt daraus

$$\varphi_i=\text{arc}\sin\nu=\int^\nu\frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}=\int d\nu\left(1+\frac{\nu^2}{2}\right)=\nu+\frac{\nu^3}{6}$$

$$=\sin\varphi_i+\frac{1}{6}\sin^3\varphi_i=xk_i-\left(\frac{k_i''}{6}-\frac{k_ik_i'}{2}+\frac{k_i^3}{2}\right)x^3+\frac{1}{6}x^3k_i^3$$

$$=xk_i-\left\{\frac{k_i''}{6}-\frac{k_ik_i'}{2}+\frac{k_i^3}{3}\right\}x^3=xk_i-x^3g_i,$$

wenn noch

$$\frac{k_i''}{6}-\frac{k_ik_i'}{3}+\frac{k_i^3}{3}=g_i$$

genommen wird.

Bei der Bildung von y werden wir auf Summen stossen,

für welche wir im Vorhinein Abkürzungen einführen wollen; wir setzen nämlich

$$\sum_1^\mu{}_i\, k_i = \mu k, \qquad \sum^\mu{}_i\, g_i = \mu g;$$

es wird dann

$$y = \sum_1^\mu{}_i\, \varphi_i = x \sum_1^\mu{}_i\, k_i - x^3 \sum_1^\mu{}_i\, g_i = \mu k x - \mu g x^3$$

und

$$y - cx = (\mu k - c)x - \mu g x^3,$$

also

$$\cos(y - cx) = \cos(\mu k - c)x \cdot \cos \mu g x^3 + \sin(\mu k - c)x \cdot \sin \mu g x^3$$
$$= \cos(\mu k - c)x + \mu g x^3 \sin(\mu k - c)x,$$

wenn man immer die Potenzen von x von der vierten an vernachlässigt.

Dies in den letzten Ausdruck für Π eingesetzt, gibt

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \cdot \frac{dx}{x}\left\{\cos(\mu k - c)x + \mu g x^3 \sin(\mu k - c)x\right\} \ldots \quad (1)$$

als Wahrscheinlichkeit, dass S zwischen $c \pm \varepsilon$ enthalten ist. Wird nun $c = \mu k$ genommen, so vereinfacht sich der obige Ausdruck, es wird

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\mu h x^2} \sin \varepsilon x \cdot \frac{dx}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der in μ Versuchen beobachteten Werthe von A zwischen den Grenzen $\mu k \pm \varepsilon$ liegt.

Um integriren zu können, setzen wir

$$\xi^2 = \mu h x^2, \qquad d\xi = \sqrt{\mu h} \cdot dx, \qquad \varepsilon x = \frac{\varepsilon \xi}{\sqrt{\mu h}}$$

und erhalten

$$\Pi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin \frac{\varepsilon \xi}{\sqrt{\mu h}} \cdot \frac{d\xi}{\xi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

Von der bekannten Formel (Nr. 55)

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos \frac{a \xi}{\sqrt{\mu h}}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{a^2}{4 \mu h}}$$

ausgehend, erhält man durch Multiplication mit $\frac{da}{\sqrt{\mu h}}$ und nachherige Integration innerhalb der Grenzen $a\left\{\begin{smallmatrix}\varepsilon\\0\end{smallmatrix}\right.$:

$$\int_0^\varepsilon \frac{da}{\sqrt{\mu h}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \cos \frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}} \frac{da}{\sqrt{\mu h}}$$

$$\int_0^\varepsilon \cos \frac{a\xi}{\sqrt{\mu h}} \frac{da}{\sqrt{\mu h}} \int_0^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}} \frac{da}{\sqrt{\mu h}};$$

nachdem links die Integration in Bezug auf a ausgeführt worden, hat man weiter

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}} \cdot \frac{d\xi}{\xi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\mu h}} \int_0^\varepsilon e^{-\frac{a^2}{4\mu h}}\, da.$$

Bei der Substitution

$$\frac{a^2}{4\mu h} = t^2, \qquad da = 2\sqrt{\mu h}\, dt$$

entsprechen den früheren Grenzen $a\left\{\begin{smallmatrix}\varepsilon\\0\end{smallmatrix}\right.$ nunmehr die Grenzen $t\left\{\begin{smallmatrix}\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mu h}} = u\\0\end{smallmatrix}\right.$ und die vorhergehende Gleichung übergeht in

$$\int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin \frac{\varepsilon\xi}{\sqrt{\mu h}} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\mu h}} \int_0^u e^{-t^2}\, 2\sqrt{\mu h}\, dt = \sqrt{\pi}\int_0^u e^{-t^2} dt$$

$$= \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_u^\infty e^{-t^2} dt\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{\pi}\int_u^\infty e^{-t^2} dt.$$

Das linksstehende Integral ist dasjenige, welches in der Gleichung (n) aufgetreten ist; ersetzt man es dort durch seinen Werth, so ergibt sich

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2} dt \;.\;.\;.\;.\; \text{(o)}$$

als Wahrscheinlichkeit, dass die Summe S der in einer grossen Anzahl μ von Versuchen beobachteten Werthe von A zwischen den Grenzen

$$\mu k \pm 2u\sqrt{\mu h},$$

oder dass der Mittelwerth $\frac{S}{\mu}$ der beobachteten Werthe zwischen den Grenzen

$$k \pm \frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$$

enthalten ist.

Ertheilt man dem u einen nicht sehr beträchtlichen Werth, so wird $\frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$ sehr klein, $\frac{S}{\mu}$ unterscheidet sich nur um ein Geringes von k; für $u = 3$ wird $\Pi = 1 - 0{\cdot}000022091$, die Wahrscheinlichkeit, dass jene Grenzen eingehalten werden, steht also der Einheit sehr nahe.

Zur Erklärung dieses Resultates suchen wir die Bedeutung von k. Wir setzten

$$k = \frac{1}{\mu}\sum_1^\mu {}_i k_i = \frac{1}{\mu}\sum_1^\mu {}_i \int_a^b z f_i(z)\,dz = \int_a^b z \frac{\sum_1^\mu {}_i f_i(z)\,dz}{\mu}$$
$$= \int_a^b z f(z)\,dz;$$

bei dieser Transformation wurde

$$f(z)\,dz = \frac{\sum_1^\mu {}_i f_i(z)\,dz}{\mu}$$

genommen; $f(z)dz$ bedeutet also die mittlere Wahrscheinlichkeit des Werthes z in allen Versuchen, mithin k die Summe aller möglichen Werthe der beobachteten Grösse, jeder dieser Werthe mit der ihm zukommenden mittleren Wahrscheinlichkeit multiplicirt.

Das Resultat unserer Untersuchung besagt also, dass, indem $\frac{S}{\mu}$ für k genommen wird, der dabei mit der Wahrscheinlichkeit Π zu fürchtende Fehler

$$\frac{2u\sqrt{h}}{\sqrt{\mu}}$$

beträgt; da u nicht gross genommen zu werden braucht, um Π der Einheit sehr nahe zu bringen, so lässt sich das Ergebniss folgendermassen formuliren:

Bedeutet k die Summe aller Producte, welche man erhält, indem man jeden der möglichen Werthe einer Grösse A mit seiner mittleren Wahrscheinlichkeit multiplicirt, so kann behauptet werden: 1) Man hat immer eine der Gewissheit sehr nahe Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mittelwerth $\frac{S}{\mu}$ von A sich sehr wenig von k unterscheidet. 2) Die Differenz $\frac{S}{\mu} - k$ vermindert sich beständig in dem Masse, als μ wächst, und wird Null, wenn μ unendlich gross geworden ist.

Anmerkung. Der Werth von $\frac{S}{\mu}$ nähert sich beständig der Abscisse des Schwerpunktes der Fläche, welche von der Curve

$$y = \frac{1}{\mu} \sum_1^\mu {}_i f_i(z),$$

der Abscissenaxe und den den Abscissen a und b entsprechenden Ordinaten begrenzt wird.

Aus der Beziehung

$$\int_a^b f_i(z)\, dz = 1$$

folgt nämlich

$$\int_a^b y\, dz = \int_a^b \frac{1}{\mu} \sum_1^\mu {}_i f_i(dz)\, dz = \frac{1}{\mu} \left\{ \int_a^b f_1(z) dz + \cdots + \int_a^b f_\mu(z) dz \right\} = \frac{\mu}{\mu} = 1.$$

Der Ausdruck für die Abscisse des Schwerpunktes ist aber

$$z_1 = \frac{\int_a^b z y\, dz}{\int_a^b y\, dz},$$

für unseren Fall also

$$z_1 = \frac{1}{\mu} \int_a^b z \sum_1^\mu {}_i f_i(z)\, dz = \frac{1}{\mu} \sum_1^\mu {}_i \int_a^b z\, f_i(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{\mu} \sum_1^\mu {}_i k_i = k,$$

was behauptet wurde.

IV. Capitel.
Von der mathematischen Hoffnung.

57. **Definition.** *Die mathematische Hoffnung ist das Product aus dem erwarteten Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit ihn zu erlangen. Man nennt sie auch die Erwartung oder den Vortheil des Spielers.*

Tritt an die Stelle des Gewinnes ein Verlust, so bezeichnet man das ähnlich gebildete Product als mathematische Furcht oder als Nachtheil des Spielers. In die Rechnung werden diese Producte, Hoffnung und Furcht, mit entgegengesetzten Zeichen einzuführen sein.

Bezeichnen daher $p, p_1, \cdots p_i$ die auf die Gewinne $g, g_1, \cdots g_i$ und $q, q_1, \cdots q_i$ die auf die Verluste $k, k_1, \cdots k_i$ bezüglichen Wahrscheinlichkeiten, so ist

$$E = pg + p_1 g_1 + \cdots + p_i g_i - (qk + q_1 k_1 + \cdots + q_i k_i)$$

der Ausdruck für die mathematische Erwartung.

Sind die Gewinne $g, \cdots g_i$ erst nach $n, \cdots n_i$ Jahren zahlbar, so müssen sie auf ihren gegenwärtigen Werth reducirt werden.

Wenn r den Jahreszins von 1 und $\gamma, \cdots \gamma_i$ die gegenwärtigen Werthe von $g, \cdots g_i$ bezeichnen, so hat man

$$\gamma = \frac{g}{(1+r)^n}, \cdots \gamma_i = \frac{g_i}{(1+r)^{n_i}};$$

und der gegenwärtige Werth der mathematischen Hoffnung ist

$$E = \gamma p + \cdots + \gamma_i p_i = \frac{gp}{(1+r)^n} + \cdots + \frac{g_i p_i}{(1+r)^{n_i}} \quad \ldots \quad \text{(a)}$$

Verpflichtet sich eine Person A, einer andern Person B nach $n, \cdots n_i$ Jahren die Summen $g, \cdots g_i$ zu zahlen, welche von Ereignissen abhängen, deren Wahrscheinlichkeiten $p, \cdots p_i$ sind, so muss A heute den Betrag

$$E = \frac{gp}{(1+r)^n} + \cdots + \frac{g_i p_i}{(1+r)^{n_i}}$$

an B entrichten, wenn E positiv, A erhält dagegen diesen Betrag von B, wenn E negativ ist.

58. **Theorem.** *Es sei g ein Gewinn, welchen die Personen A, B, C, $\cdots$ zu erwarten haben mit den Wahrscheinlichkeiten p, q, $r \cdots$, so dass $p + q + r + \cdots = 1$. Angenommen, sie kommen überein, den Gewinn g unter sich zu theilen, bevor das Loos entschieden, so muss die Theilung im Verhältnisse der Zahlen p, q, r, $\cdots$ erfolgen, so also, dass der Theil für A gleich pg, jener für B gleich qg, jener für C gleich rg wird, u. s. w.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass unter der Gesammtzahl m der Fälle, deren jeder gleich leicht den Gewinn g herbeiführen kann, a dem A, b dem B, c dem C u. s. w. günstig sind; es ist dann klar, dass der Antheil jeder Person proportional sein muss der Anzahl der ihr günstigen Fälle, so zwar, dass, unter x, y, z, $\cdots$ die bezüglichen Antheile von A, B, C, $\cdots$ verstanden,

$$x : g = a : m, \quad \text{woraus} \quad x = \frac{a}{m} g,$$

$$y : g = b : m, \quad \text{„} \quad y = \frac{b}{m} g,$$

$$z : g = c : m, \quad \text{„} \quad z = \frac{c}{m} g,$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \qquad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

Nun sind aber $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$, $\cdots$ die respectiven Wahrscheinlichkeiten, dass A, B, C, $\cdots$ gewinnen werde; der Satz erscheint also bewiesen.

Zusatz I. Die Summe der Antheile gibt den ganzen Gewinn; denn es ist

$$x + y + z + \cdots = g \frac{a + b + c \cdots}{m} = g(p + q + r + \cdots) = g.$$

Zusatz II. Die vorangehende Regel dient auch dazu, die Einsätze der Spieler zu bestimmen, die ebenfalls den Wahrscheinlichkeiten des Gewinnens proportional sein müssen.

Zusatz III. Sind p und q die Wahrscheinlichkeiten des Gewinnens, α und β die Einsätze der Personen A und B, so muss, $p + q = 1$ vorausgesetzt, die Beziehung stattfinden:

$$p : q = \alpha : \beta, \qquad p\beta = q\alpha \; \ldots \ldots \; (1)$$

In einer billigen Wette müssen also die mathematischen Hoffnungen der beiden Gegner einander gleich sein.

Beispiel. Es sei p die Wahrscheinlichkeit für den Einsturz eines Gebäudes, v der Werth desselben, x die zu zahlende Versicherungsprämie, so sollte

$$vp = x(1 - p)$$

sein. Nachdem aber die Prämie im Vorhinein gezahlt wird und verloren geht, was auch eintreffen mag, so ist

$$vp = x(1 - p) + x$$

zu setzen; in dieser Weise werden die Versicherungsprämien festgestellt, allerdings abgesehen von den Kosten und dem Gewinn der Versicherungsgesellschaft.

59. **Erstes Problem.** *Das Eintreffen eines Ereignisses bringt einen Gewinn v, sein Nichteintreffen verursacht einen Verlust μ; eine Person A erwartet das Eintreffen einer Anzahl s von ähnlichen Ereignissen, die untereinander völlig unabhängig und gleich wahrscheinlich sind; wie gross ist ihre mathematische Erwartung?*

Lösung. Es bezeichne q die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines jeden der Ereignisse, $1 - q$ die Wahrscheinlichkeit seines Gegensatzes. Wird

$$(q + 1 - q)^s = S \frac{s!}{i!\,(s-i)!} q^i (1 - q)^{s-i} = S\Pi_i \qquad (1)$$

gesetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass in s Versuchen i der erwarteten Ereignisse eintreffen,

$$\Pi_i = \frac{s!}{i!\,(s-i)!} q^i (1 - q)^{s-i};$$

der Gewinn von A beträgt in diesem Falle iv, sein Verlust ist $(s - i)\mu$. Wir setzen daher

$$iv - (s - i)\mu = \Delta_i = i(v + \mu) - s\mu;$$

es ist dann:

$\Pi_i \Delta_i$ die dem Eintreffen von i Ereignissen entsprechende Erwartung von A; also

$\Pi_1 \Delta_1$ die dem Eintreffen eines der Ereignisse entsprechende Erwartung,

$\Pi_2 \Delta_2$ die dem Eintreffen von zwei Ereignissen entsprechende Erwartung,

. . . .

$\Pi_s \Delta_s$ die dem Eintreffen von s Ereignissen entsprechende Erwartung;

da die einzelnen Ereignisse unter einander unabhängig sind und in s Versuchen $0, 1, 2, \cdots s$ derselben eintreffen können, so ist die gesammte Erwartung

$$N = S\Pi_i \Delta_i = \mathcal{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,q^i(1-q)^{s-i}\,[i(\nu+\mu) - s\mu]$$

$$= -s\mu\,[1-q+q]^s + (\nu+\mu)\,\mathcal{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,iq^i(1-q)^{s-i}.$$

Zur Bestimmung der letzten Summe führt die Identität

$$d\,\mathcal{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,t^i q^i(1-q)^{s-i} = \mathcal{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,iq^i(1-q)^{s-i}\,t^{i-1}\,dt,$$

mit Rücksicht auf dieselbe kann nämlich geschrieben werden:

$$\mathcal{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,iq^i(1-q)^{s-i} = \left\{\frac{d\mathcal{S}\frac{s!}{i!\,(s-i)!}\,t^i q^i(1-q)^{s-i}}{dt}\right\}_{t=1}$$

$$= \left\{\frac{d\,[qt+(1-q)]^s}{dt}\right\}_{t=1}$$

$$= \left\{sq\,[qt+(1-q)]^{s-1}\right\}_{t=1} = sq.$$

Demnach wird

$$N = -s\mu + (\nu+\mu)sq = s\{q\nu + q\mu - \mu\} = s\{q\nu - (1-q)\mu\}.$$

Die fragliche Erwartung ist also der Anzahl der erwarteten Ereignisse proportional.

Man wäre zu demselben Resultate übrigens auch durch folgende einfache Betrachtung gelangt: Für das einzelne Ereigniss ist der Gewinn ν mit der Wahrscheinlichkeit q zu erwarten, der Verlust μ mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ zu befürchten, die Erwartung beträgt also $q\nu - (1-q)\mu$.

Da jedes Ereigniss von den übrigen unabhängig ist, so verschafft jedes für sich diese Erwartung; die gesammte, von s Ereignissen herbeigeführte Erwartung ist daher

$$N = s\,\{q\nu - (1-q)\,\mu\}.$$

Für $q\nu = (1-q)\mu$ wird $N = 0$, die Person A befindet sich weder im Vortheil noch im Nachtheil; für $q\nu < (1-q)\mu$ wird $N < 0$, der Person A erwächst aus der ganzen Erwartung ein Nachtheil.

60. **Zweites Problem.** *Unter den gleichen Voraussetzungen wie vorhin suche man die Wahrscheinlichkeit, dass der Rein-*

gewinn der Person A (nämlich der um den Verlust verminderte Gewinn) zwischen zwei gegebenen Grenzen eingeschlossen ist, wenn man s sehr gross voraussetzt.

Lösung. Für das i-malige Eintreffen des fraglichen Ereignisses oder den Reingewinn $\varDelta_i$ wurde die Wahrscheinlichkeit

$$\Pi_i = \frac{s!}{i!\,(s-i)!}\, q^i\,(1-q)^{s-i}$$

gefunden.

Für $i = qs$ erlangt dieser Ausdruck seinen grössten Werth, indem er zum maximalen Gliede der Entwickelung von $(q + 1 - q)^s$ wird, welches wir mit M_i bezeichnen wollen; dem Bernoulli'schen Theorem zufolge ist

$$\overset{i+l}{\underset{i-l}{S}} M_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}}, \quad \left(\gamma = \frac{l}{\sqrt{2sq(1-q)}}\right) \quad (\alpha)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der eintreffenden Ereignisse zwischen $i \pm l = qs \pm l$ oder der muthmassliche Gewinn zwischen $\varDelta_{i+l}$ und $\varDelta_{i-l}$ enthalten ist.

Aus dem vorigen Problem ist bekannt, dass beim Eintreffen von i Ereignissen die Person A den Reingewinn

$$\varDelta_i = i\,(\nu + \mu) - s\mu$$

erzielt; für $i = qs$ wird

$$\varDelta_i = s\{q\nu - (1-q)\,\mu\};$$

ferner erhält man durch Vertauschung von i mit $qs - l$, dann mit $qs + l$:

$$\varDelta_{i-l} = s\{q\nu - (1-q)\,\mu\} - l\,(\nu + \mu),$$

$$\varDelta_{i+l} = s\{q\nu - (1-q)\,\mu\} + l\,(\nu + \mu),$$

und die Formel (α) gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass diese Grenzen den Reingewinn der Person A einschliessen.

Um die Resultate besser deuten zu können, setze man

$$l = r\sqrt{s}, \qquad \text{woraus} \qquad \gamma = \frac{r}{\sqrt{2q(1-q)}};$$

es wird dann

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2q(1-q)}}} e^{-t^2}\, dt + \frac{e^{-\frac{r^2}{2q(1-q)}}}{\sqrt{2s\pi q(1-q)}}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Reingewinn von A zwischen den Grenzen

$$s\{q\nu - (1-q)\mu\} \pm r\sqrt{s}(\nu + \mu) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

enthalten ist.

Das zweite Glied der Formel (1) kann seines geringen Betrages wegen vernachlässigt werden.

Erste Anmerkung. Ist $q\nu > (1-q)\mu$, so wächst der Gewinn mit s.

Zweite Anmerkung. Das erste Glied der Formel (2) wächst proportional mit s, das zweite proportional mit $\sqrt{s}$; das Intervall der beiden Grenzen vergrössert sich und es wird immer wahrscheinlicher, dass dieselben den Reingewinn einschliessen.

Wird s unendlich gross, so wächst auch der Gewinn über alle Grenzen und wird gewiss.

Daraus schliesst man, dass für einen grossen Werth von s der Reingewinn mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit nur unmerklich von dem Betrage $s\{q\nu - (1-q)\mu\}$ abweicht.

61. **Drittes Problem.** *Unter den gleichen Voraussetzungen, wie sie dem vorangehenden Problem zu Grunde lagen, nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeiten der s Ereignisse, ebenso die mit ihnen verknüpften Gewinne und Verluste verschieden sind; es ist die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass der Reingewinn zwischen zwei gegebenen Grenzen eingeschlossen sein wird, wenn man s sehr gross voraussetzt.*

Lösung. Zur Vereinfachung der Rechnung kann man von den Verlusten μ, welche durch das Nichteintreffen der Ereignisse verursacht werden, absehen; man kann nämlich zu dem Gewinn, welchen das Eintreffen eines jeden Ereignisses herbeiführt, den Verlust hinzufügen, welcher durch sein Nichteintreffen veranlasst wird, und von dem so erhaltenen Gesammtvortheil die Summe der Verluste in Abzug bringen.

Dass dieser Vorgang richtig ist, erkennt man augenblicklich aus der Identität

$$\Sigma\{q_i\nu_i - (1-q_i)\mu_i\} = \Sigma q_i(\nu_i + \mu_i) - \Sigma\mu_i,$$

in welcher den einzelnen Buchstaben die ihnen früher unterlegten Bedeutungen zukommen. Es sind nämlich

$q_1 \cdots q_s$ die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens,
$p_1 \cdots p_s$ die Wahrscheinlichkeiten des Nichteintreffens der s Ereignisse,
$\nu_1 \cdots \nu_s$ die mit ihrem Eintreffen verknüpften Gewinne,
$\mu_1 \cdots \mu_s$ die durch ihr Nichteintreffen verursachten Verluste.

Setzt man

$$X = (p_1 + q_1 u^{\nu_1})(p_2 + q_2 u^{\nu_2}) \cdots (p_s + q_s u^{\nu_s}) = \Sigma\, U_m\, u^m,$$

so ist

$$U_m = P$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Reingewinn den Betrag m erreicht.

Wird in dem Ausdrucke für X m mit $L + l$, u^{ν_1} mit $e^{\nu_1 \omega \sqrt{-1}}$ u. s. w. vertauscht, was erlaubt ist, nachdem U_m von den ν nicht abhängt, so nimmt derselbe die Gestalt an:

$$X = (p_1 + q_1 e^{\nu_1 \omega \sqrt{-1}}) \cdots (p_s + q_s e^{\nu_s \omega \sqrt{-1}}) = \Sigma\, U_{L+l} e^{(L+l)\omega\sqrt{-1}}$$
$$= U_0 + \cdots + U_{L+l}\, e^{(L+l)\omega\sqrt{-1}} + \cdots$$

Durch Multiplication mit $e^{-(L+l)\omega\sqrt{-1}}\, d\omega$ und Integration innerhalb der Grenzen $\pm \pi$ ergibt sich weiter

$$\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(L+l)\omega\sqrt{-1}}\, d\omega = 2\pi\, U_{L+l} = 2\pi\, P,$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(L+l)\omega\sqrt{-1}}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-l\omega\sqrt{-1}}\, e^{-L\omega\sqrt{-1}}\, d\omega \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad \text{(a)}$$

folgt. Nun ist aber

$$X = \prod_1^s (p_i + q_i e^{\nu_i \omega \sqrt{-1}}) = \prod_1^s \left((1 - q_i(1 - e^{\nu_i \omega\sqrt{-1}})\right),$$

daraus

$$l \cdot X = \sum_1^s l \cdot \left\{1 - q_i(1 - e^{\nu_i \omega\sqrt{-1}})\right\}$$

$$= \sum_1^s \left\{ - q_i (1 - e^{\nu_i \omega\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2} q_i^2 (1 - 2e^{\nu_i \omega\sqrt{-1}} + e^{2\nu_i \omega\sqrt{-1}}) - \cdots \right\}$$

$$= \sum_1^s \left\{ q_i \nu_i \omega \sqrt{-1} - \frac{\omega^2}{2} \nu_i^2 q_i (1 - q_i) - \cdots \right\};$$

somit ist weiter

$$l \cdot [X e^{-L\omega\sqrt{-1}}] = \left\{ \sum_1^s q_i v_i - L \right\} \omega\sqrt{-1} - \frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i (1-q_i) v_i^2 - \cdots$$

Nimmt man $L = \sum_1^s q_i v_i$, so verschwindet das erste Glied der rechten Seite und es ergibt sich

$$X e^{-L\omega\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i (1-q_i) v_i^2 - \cdots};$$

ist s sehr gross, so gilt dies auch von der Summe $\sum_1^s q_i p_i v_i^2$, welche gleichfalls von der Ordnung s ist, und man kann im Exponenten die höheren Potenzen von ω von der zweiten an vernachlässigen; dadurch wird

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega\, e^{-\left[l\omega\sqrt{-1} + \frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i p_i v_i^2\right]}.$$

Mit demselben Rechte, weil nämlich die Exponentialgrösse für höhere Werthe von ω einen unmerklichen Werth annimmt, können die Grenzen bis $\pm \infty$ ausgedehnt werden; es ist dann

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-\left[l\omega\sqrt{-1} + \frac{\omega^2}{2} \sum_1^s q_i p_i v_i^2\right]} \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Gewinne gleich $\sum_1^s q_i v_i + l$ ist.

Die Integration des Ausdruckes (b) gelingt, indem man den Exponenten von e zu einem Quadrate ergänzt. Sei für den Augenblick

$$\sum_1^s p_i q_i v_i^2 = a,$$

so kann geschrieben werden:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}}+\omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right]^2} e^{-\frac{l^2}{2a}} d\omega$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-\left[\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}}+\omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right]^2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\sqrt{\frac{a}{2}}\, e^{-\left[\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{2a}}+\omega\sqrt{\frac{a}{2}}\right]^2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{\pi\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-\frac{l^2}{2a}}}{\sqrt{2\pi a}};$$

restituirt man für a seinen Werth, so ist weiter

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_1^s q_i p_i v_i^2}}\, e^{-\frac{l^2}{2\sum_1^s q_i p_i v_i^2}} \quad \ldots\ldots \text{(c)}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn $\sum_1^s q_i v_i + l$ beträgt.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn durch die Grenzen $\sum_1^s p_i v_i \pm l$ eingeschlossen wird, hat man den Ausdruck (c) mit dl zu multipliciren und zwischen den Grenzen $\pm l$ zu integriren; dadurch ergibt sich

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_1^s q_i p_i v_i^2}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{2\sum_1^s q_i p_i v_i^2}} dl$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi \sum_1^s q_i p_i v_i^2}}\int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{2\sum_1^s q_i p_i v_i^2}} dl \quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

Die Formel vereinfacht sich, wenn

$$l = r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i v_i^2}, \quad dl = dr\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i v_i^2}$$

gesetzt wird; man erhält dann

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2}\,dr$$

als Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn zwischen den Grenzen

$$L \pm l = \sum_1^s q_i v_i \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i v_i^2}$$

enthalten ist.

Nach der Art, die Verluste in Rechnung zu ziehen, welche zu Beginn der Lösung erklärt wurde, hat man in dem Ausdrucke für L v_i mit $v_i + \mu_i$ zu vertauschen und hierauf $\sum_1^s \mu_i$ abzuziehen; sodann ist

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-r^2}\,dr \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Reingewinn zwischen

$$\sum_1^s [q_i(v_i + \mu_i)] - \sum_1^s \mu_i \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i p_i v_i^2}$$

oder zwischen

$$\sum_1^s \{q_i v_i - (1 - q_i)\mu_i\} \pm r\sqrt{2\sum_1^s q_i(1 - q_i)v_i^2} \; \ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

enthalten ist.

Daraus schliesst man:

Wenn $q_i v_i > (1 - q_i)\mu_i$, wenn also die mathematische Hoffnung bei dem einzelnen Ereigniss die Nulle übersteigt, so wächst der Reingewinn mit der Vervielfachung der Ereignisse, da das erste Glied der Formel (f) von der Ordnung s, das zweite blos von der Ordnung $\sqrt{s}$ ist, und er

wird unendlich gross und gewiss, wenn die Zahl der Ereignisse unendlich wird.

Im vorliegenden Problem wurde die Wahrscheinlichkeit des Reingewinns berechnet, welcher aus einer Anzahl einfacher und von einander unabhängiger Ereignisse hervorgeht; wir gehen jetzt daran die Wahrscheinlichkeit des Vortheils zu bestimmen, der aus der Wiederholung eines Ereignisses entspringt, welches auf mehrere verschiedene, Gewinne oder Verluste verursachende Arten zu Stande kommen kann.

62. **Viertes Problem.** *Eine Urne enthält Kugeln verschiedener Farben (1), (2), ⋯; eine Person A zieht eine Kugel und legt selbe nach der Ziehung in die Urne zurück; ihr Gewinn ist ν_1, wenn die gezogene Kugel von der Farbe (1) war; ν_2, wenn sie von der Farbe (2) war, u. s. w. Unter der Voraussetzung einer sehr grossen Zahl t von Ziehungen bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn von A gleich ist $\sigma = t\mu + l$.*

Lösung. Die Wahrscheinlichkeiten des Ziehens einer Kugel (1), (2), ⋯ mögen mit $p_1, p_2, \cdots$ bezeichnet werden; dieselben unterliegen der Bedingung $p_1 + p_2 + \cdots = 1$. Die den Ziehungen entsprechenden Erwartungen sind

$p_1 \nu_1$ für eine Kugel (1),
$p_2 \nu_2$ „ „ „ (2), u. s. w.

Wir gehen von der Function

$$X = (p_1 u^{\nu_1} + p_2 u^{\nu_2} + \cdots)^t = \Sigma U_\sigma u^\sigma$$

aus und haben in U_σ die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn von A den Betrag σ erreicht. Bei der Unabhängigkeit, die zwischen den Grössen U_σ und u herrscht, kann, unbeschadet für den Werth der ersteren,

$$u = e^{\omega\sqrt{-1}}$$

gesetzt werden, wodurch

$$X = (p_1 e^{\nu_1 \omega\sqrt{-1}} + p_2 e^{\nu_2\omega\sqrt{-1}} + \cdots)^t = \Sigma U_\sigma e^{\sigma\omega\sqrt{-1}}$$

wird; hieraus folgt aus bekannten Gründen

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-\sigma\omega\sqrt{-1}} d\omega.$$

Durch Vertauschung von σ mit $t\mu + l$ wird weiter

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega\, e^{-l\omega\sqrt{-1}} \left\{ e^{-\mu\omega\sqrt{-1}} (p_1 e^{\nu_1\omega\sqrt{-1}} + p_2 e^{\nu_2\omega\sqrt{-1}} + \cdots) \right\}^t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega\, e^{-l\omega\sqrt{-1}} A,$$

wenn

$$A = \left\{ e^{-\mu\omega\sqrt{-1}} (p_1 e^{\nu_1\omega\sqrt{-1}} + p_2 e^{\nu_2\omega\sqrt{-1}} + \cdots) \right\}^t$$

gesetzt wird, woraus

$$l \cdot A = -t\mu\omega\sqrt{-1} + tl \cdot (p_1 e^{\nu_1\omega\sqrt{-1}} + p_2 e^{\nu_2\omega\sqrt{-1}} + \cdots)$$

$$= -t\mu\omega\sqrt{-1} + tl \cdot \Big\{ p_1 (1 + \nu_1\omega\sqrt{-1} - \frac{\nu_1^2\omega^2}{2} - \cdots)$$

$$+ p_2 (1 + \nu_2\omega\sqrt{-1} - \frac{\nu_2^2\omega^2}{2} - \cdots) + \cdots \Big\}$$

$$= -t\mu\omega\sqrt{-1} + tl \cdot \Big\{ 1 + (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)\,\omega\sqrt{-1}$$

$$- (p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots)\frac{\omega^2}{2} - \cdots \Big\}$$

$$= t\omega\sqrt{-1}\,(p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots - \mu) - \frac{t\omega^2}{2}\Big\{(p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots)$$

$$- (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)^2\Big\} + \cdots$$

Nimmt man

$$\mu = p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots$$

und setzt

$$p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots - (p_1\nu_1 + p_2\nu_2 + \cdots)^2 = 2k^2,$$

— letzteres ist gerechtfertigt, da die linksstehende Differenz wesentlich positiv ist, nachdem sie gleichkommt dem Ausdrucke

$$(p_1\nu_1^2 + p_2\nu_2^2 + \cdots)(p_1 + p_2 + \cdots) - (p_1^2\nu_1^2 + p_2^2\nu_2^2 + \cdots + 2p_1p_2\nu_1\nu_2 + \cdots$$

$$= p_1p_2(\nu_1 - \nu_2)^2 + p_1p_3(\nu_1 - \nu_3)^2 + \cdots,$$

— so folgt für $l \cdot A$ der Ausdruck

$$l \cdot A = -tk^2\omega^2;$$

daraus ist

$$A = e^{-tk^2\omega^2},$$

wenn man, mit Rücksicht auf den hohen Werth von t, der vorausgesetzt wurde, die Glieder mit $\omega^3, \cdots$ vernachlässigt;

mit demselben Rechte können die Grenzen des Integrals, welches U_σ ausdrückt, bis $\pm\infty$ ausgedehnt werden; man hat dann

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-(tk^2\omega^2 + l\omega\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-tk^2\left[\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-tk^2\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-tk^2\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2},$$

oder, wenn $\tau = k\sqrt{t}\left(\omega + \frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)$, $d\omega = \frac{d\tau}{k\sqrt{t}}$ gesetzt wird:

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}}\, e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

es stellt dies die Wahrscheinlichkeit vor, dass der von A erzielte Gewinn gleich $\sigma = t\mu + l$ ist.

In zweiter Reihe handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn zwischen $t\mu \pm l$ enthalten ist.

Um diese zu finden, lasse man in dem Ausdrucke (a) die Grösse l sich ändern von $-l$ bis $+l$ und nehme die Summe aller so entstandenen Werthe, was darauf zurückkommt, den Ausdruck (a) mit dl zu multipliciren und innerhalb der Grenzen $\pm l$ zu integriren; man erhält auf solche Weise

$$P = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\, dl = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\, dl$$

als Wahrscheinlichkeit, dass A einen zwischen den Grenzen

$$t\mu \pm l \quad \text{oder} \quad t(p_1 \nu_1 + p_1 \nu_2 + \cdots) \pm l$$

befindlichen Gewinn erzielt. Die Formel vereinfacht sich durch die Substitution

$$\frac{l}{2k\sqrt{t}} = r, \qquad dl = 2k\sqrt{t}\,dr,$$

indem dann

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-r^2}\,dr$$

die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Gewinn von A zwischen die Grenzen

$$t(p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2 + \cdots) \pm 2rk\sqrt{t}$$

fällt.

Nachdem die Grenzen sich immer mehr erweitern in dem Masse, als t wächst, so wird es immer wahrscheinlicher, dass der Gewinn von A zwischen denselben enthalten ist; und es wird der Gewinn unendlich gross und gewiss, wenn die Zahl der Ziehungen unendlich gross wird.

Von den Glücksspielen.

63. In den Glücksspielen versteht man unter dem Vortheile eines Spielers seine mathematische Hoffnung. Die Theorie dieser Spiele besteht in der Bestimmung des Vortheils für jeden einzelnen Fall.

Im Folgenden soll die Durchführung dieser Bestimmung an dem bekannten Pharaospiele erklärt werden.

Regeln des Spiels.

1) Der Banquier hält mit 52 Blättern (des französischen Spiels) Bank.

2) Er legt nach und nach alle Karten auf, und zwar immer je zwei, die eine zu seiner Rechten, die andere zur Linken; jedes solche Paar von Karten heisst ein Abzug (Taille) oder ein Stich.

3) Vor Beginn des Spieles, sowie nach jedem Abzug steht es dem Pointeur (Spieler) frei, eine oder mehrere Kar-

ten zu bezeichnen und auf dieselben eine gewisse Summe zu setzen.

4) Der Banquier gewinnt den Einsatz des Spielers, wenn die Karte des Letzteren auf der rechten Seite oder an ungerader Stelle erscheint.

5) Der Banquier verliert eine dem Einsatze des Spielers gleiche Summe, wenn die von diesem bezeichnete Karte auf der linken Seite oder an gerader Stelle erscheint.

Durch die beiden Spielregeln 4) und 5) sind Bankhalter und Spieler einander vollkommen gleichgestellt, keiner befindet sich dem andern gegenüber im Vortheile. Dagegen bedingen die beiden folgenden Regeln einen Vortheil des Bankhalters.

6) Der Banquier zieht die Hälfte von dem ein, was der Spieler auf eine Karte gesetzt hat, wenn diese in demselben Abzug zweimal erscheint (z. B. Ass).

7) Die letzte Karte, wenn sie die vom Spieler bezeichnete sein sollte, zählt nicht, d. h. der Banquier zahlt in diesem Falle nicht wie in den anderen Abzügen an den Spieler eine dem Einsatz gleiche Summe aus; der letzte Abzug verschafft ihm also einen Vortheil, indem er zwar den vollen Einsatz des Spielers gewinnen, aber nichts verlieren kann.

Es handelt sich nun darum, den Vortheil des Bankhalters in diesem Spiele zu ermitteln.

Ein erster Vortheil besteht darin, dass der Spieler die Hälfte des Einsatzes verliert, wenn seine Karte zweimal in einem Abzug erscheint; wir haben daher das folgende Problem zu lösen:

Erstes Problem. *Der Banquier hält p Karten in der Hand, unter welchen sich solche des Spielers, die noch nicht gezogen wurden, in der Anzahl q*) vorfinden; es soll die Wahrscheinlichkeit P gefunden werden, dass zwei der Karten des Spielers in dem 1., 2., $\cdots$ r^{ten} Abzuge erscheinen.*

Lösung. Es seien $Q_1, Q_2, \cdots Q_r$ die Wahrscheinlichkeiten, dass die Karten des Spielers zweimal im 1., 2., $\cdots$ r^{ten} Abzug eintreffen; man hat dann

$$P = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_r.$$

*) Offenbar kann q einen der Werthe 1, 2, 3, 4 annehmen.

1) *Bestimmung von Q_1.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erstgezogene Karte dem Spieler gilt, ist $\frac{q}{p}$; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist $1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$; die Wahrscheinlichkeit, dass auch die zweitgezogene Karte dem Spieler gilt, ist $\frac{q-1}{p-1}$.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Karte des Spielers in der ersten Taille zweimal erscheint,

$$Q_1 = \frac{q}{p} \cdot \frac{q-1}{p-1}.$$

2) *Bestimmung von Q_2.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn die Karten des Spielers im ersten Abzug nicht erschienen sind, zwei im zweiten Abzug eintreffen, ist

$$\frac{q}{p-2} \cdot \frac{q-1}{p-3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit aber, dass keine der Karten des Spielers im ersten Abzug zum Vorschein kommt, beträgt

$$\left(1 - \frac{q}{p}\right)\left(1 - \frac{q}{p-1}\right) = \frac{p-q}{p} \cdot \frac{p-q-1}{p-1};$$

folglich hat man als Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse (des Nichterscheinens im ersten und des Erscheinens von zwei Karten im zweiten Abzug)

$$Q_2 = \frac{q(q-1)}{(p-2)(p-3)} \frac{(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)}.$$

3) *Bestimmung von Q_3.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass, nachdem die Karten des Spielers in den zwei ersten Abzügen nicht erschienen sind, sie in dem dritten Abzug eintreffen, ist

$$\frac{q(q-1)}{(p-4)(p-5)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Abzug kein Blatt des Spielers gezogen wird, ist

$$\left(1 - \frac{q}{p}\right)\left(1 - \frac{q}{p-1}\right);$$

die Wahrscheinlichkeit, dass weder im ersten noch im zweiten Abzug ein Blatt des Spielers erscheint, ist

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\left(1-\frac{q}{p-3}\right).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$Q_3=\frac{q(q-1)}{(p-4)(p-5)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\left(1-\frac{q}{p-2}\right)\left(1-\frac{q}{p-3}\right).$$

4) Ganz in derselben Weise findet man

$$Q_4=\frac{q(q-1)}{(p-6)(p-7)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{p-5}\right),$$

und endlich

$$Q_r=\frac{q(q-1)}{(p-2r+2)(p-2r+1)}\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{q}{p-1}\right)\cdots\left(1-\frac{q}{p-2r+3}\right) \quad \text{(A)}$$

Bringt man die einzelnen Ausdrücke auf gemeinschaftlichen Nenner und addirt, so ergibt sich

$$P=\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{1+\frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)}+\frac{(p-q)\cdots(p-q-3)}{(p-2)\cdots(p-5)}+\cdots \right. \\ \left. +\frac{(p-q)\cdots(p-q-2r+3)}{(p-2)\cdots(p-2r+1)}+\cdots\right\} \quad \ldots \text{(a)}$$

Es handelt sich nun darum, das letzte Glied der eingeklammerten Summe zu bestimmen. Durch Vertauschung von r mit $r+1$ erhält man das $\overline{r+1}^{\text{te}}$ Glied:

$$\frac{(p-q)\cdots(p-q-2r+1)}{(p-2)\cdots(p-2r-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Karten des Bankhalters, jene nämlich, auf welche der Spieler nicht gesetzt hat, sind in der Anzahl $p-q$ vorhanden.

Das Spiel endet, wenn, nach $r-1$ Abzügen, die zurückbleibenden Karten nur aus den q Blättern des Pointeurs bestehen, was nur möglich, wenn q gerad ist, oder wenn sie aus den q Blättern des Pointeurs und einer Karte des Banquiers zusammengesetzt sind, wenn q ungerad ist. Denn in dem folgenden, r^{ten}, Abzuge erscheinen im ersten Falle zwei Karten des Spielers, wodurch der Bankhalter gewinnt; im andern Falle werden entweder zwei Blätter des Pointeurs oder nur ein Blatt desselben und das eine des Banquiers abgezogen, wodurch der eine oder der andere gewinnt; jedenfalls schliesst mit dem r^{ten} Abzuge das Spiel.

Das letzte Glied der Reihe in (a) entspricht daher einem

so beschaffenen Werthe von r, dass nach $r - 1$ Abzügen entweder q oder $q + 1$ Karten zurückbleiben, je nachdem q gerad oder ungerad ist.

Zunächst sei q gerad; damit nach $r - 1$ Abzügen q Blätter übrig bleiben, müssen ihrer $p - q = 2(r - 1)$ gezogen worden sein; daraus ist

$$r = \frac{p - q + 2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Dann sei q ungerad; damit nach $r - 1$ Abzügen $q + 1$ Blätter übrigbleiben, müssen ihrer $p - q - 1 = 2(r - 1)$ gezogen worden sein; daraus ist

$$r = \frac{p - q + 1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Im ersten Falle lautet das Glied (b):

$$\frac{(p - q) \cdots \times 0 \times - 1}{(p - 2) \cdots (q - 2)(q - 3)}, \ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

im zweiten Falle

$$\frac{(p - q) \cdots) 2 \cdot 1 \cdot 0}{(p - 2) \cdots (q - 1)(q - 2)}; \ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

im Allgemeinen verschwindet dasselbe also, so dass sich die Reihe in (a) von selbst schliesst.

Nur die Fälle $q = 2$ und $q = 1$ bedürfen einer besonderen Untersuchung, weil für sie (e), respective (f) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Doch folgt für $q = 2$ aus der Formel (c)

$$r = \frac{p}{2}, \text{ also } 2r = p;$$

ferner für $q = 1$ aus der Formel (d) ebenfalls

$$r = \frac{p}{2} \text{ und } 2r = p;$$

in beiden Fällen sind also mit r Taillen alle Blätter abgezogen und man wird daher nicht daran denken, die Reihe in (a) über das r^{te} Glied hinaus fortzusetzen.

Das Ergebniss lautet also: Man setze die Reihe in Formel (a) so lange fort, bis ein Glied 0 oder $\frac{0}{0}$ wird.

Zweites Problem. *Die mathematische Hoffnung des Bankhalters zu bestimmen, wenn* $q > 2$.

Lösung. Wenn $q > 2$, so erschöpft der r^{te} Abzug nicht alle Blätter, weil vor demselben noch q oder $q+1$ Karten vorhanden sind; die letzte Spielregel kommt daher bei der Untersuchung der mathematischen Hoffnung des Bankhalters nicht in Betracht.

Ist a der Einsatz des Spielers, so entfällt bei dem Eintreffen des durch die Wahrscheinlichkeit P [Formel (a)] charakterisirten Ereignisses $\frac{1}{2}a$ auf den Bankhalter, seine mathematische Hoffnung ist also

$$E = \frac{1}{2}aP = \frac{1}{2}a\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{1 + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)\cdots(p-q-3)}{(p-2)\cdots(p-5)} + \cdots\right\}; \quad \text{(g)}$$

die eingeklammerte Reihe schliesst sich, wie oben nachgewiesen wurde, von selbst.

Drittes Problem. *Die mathematische Hoffnung des Bankhalters für den Fall $q = 2$ zu bestimmen.*

Lösung. Setzt man in der Formel (g) $q = 2$, so übergehen sämmtliche Glieder in die Einheit und ihre Anzahl ist nach früheren Bemerkungen $\frac{p}{2}$; daher ist

$$E = \frac{1}{2}a\frac{2\cdot 1}{p(p-1)}\cdot\frac{1}{2}p = \frac{a}{2(p-1)} \quad \ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

Doch stellt der Ausdruck (k) nicht die volle für diesen Fall geltende mathematische Hoffnung des Bankhalters vor; denn erscheinen die beiden vom Spieler bezeichneten Karten in der letzten Taille, so ist, der letzten Spielregel zufolge, die letzte davon ungültig und der Bankhalter gewinnt nach der 4. Spielregel den vollen Einsatz. Die diesem Falle entsprechende Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Formel (A), wenn man darin $r = \frac{p}{2}$ und $q = 2$ setzt; es wird dann

$$Q_r = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1}\cdot\frac{(p-2)\cdots 1}{p(p-1)\cdots 3} = \frac{2\cdot 1}{p(p-1)},$$

und die Hoffnung des Banquiers in Bezug auf das Gewinnen des vollen Einsatzes a ist

$$a\frac{1\cdot 2}{p(p-1)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(l)}$$

die Hälfte dieses Werthes ist jedoch in (k) bereits enthalten, die vollständige, auf den vorliegenden Fall bezügliche Hoffnung des Bankhalters ist daher

$$(k) + \frac{1}{2}(l) = a\left(\frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)}\right) = a\,\frac{p+2}{2p(p-1)} \ldots (m)$$

Viertes Problem. *Die mathematische Hoffnung des Bankhalters zu bestimmen, wenn $q = 1$ ist.*

Lösung. In jedem Abzuge ist die mathematische Hoffnung des Bankhalters gleich der Null, weil er ebensoleicht die Summe a gewinnen als verlieren kann; nur der letzte bildet eine Ausnahme und bringt dem Bankhalter einen Vortheil, indem er hier, der letzten Spielregel zufolge, den vollen Einsatz a gewinnen, aber nichts verlieren kann, und zwar gewinnt er ihn, wenn die einzige Karte des Spielers in diesem letzten Abzuge an erster Stelle erscheint. Da aber jedes der p Blätter an dieser Stelle eintreffen kann, so ist die fragliche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{p}$ und die mathematische Erwartung des Bankhalters

$$E = \frac{a}{p}.$$

V. Capitel.
Von der moralischen Hoffnung.

64. Nach den Grundsätzen des vorigen Capitels ist der Werth einer ungewissen Summe abhängig von ihrem absoluten Betrage und der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, durch dessen Eintreffen ihr Gewinn oder Verlust bedingt wird. Das Product aus den beiden genannten Grössen wurde als mathematische Hoffnung bezeichnet.

Soll jedoch auf die zahlreichen Umstände Rücksicht genommen werden, welche die Bedeutung oder Wichtigkeit einer Summe für eine Person beeinflussen, so kann nicht der absolute, sondern nur ein relativer oder moralischer Werth der gedachten Summe in Rechnung gebracht werden.

Wie dieser Werth für jeden einzelnen Fall zu bestimmen wäre, dafür lässt sich bei der grossen Zahl massgebender Umstände, von denen viele unbekannt, die meisten der Rechnung unzugänglich sind, keine Regel angeben. Wie dem aber auch sei, den grössten Einfluss auf die Wichtigkeit oder den moralischen Werth einer Summe, um deren Gewinn oder Verlust es sich handelt, wird das Gesammtvermögen der interessirten Person äussern; mit der Zunahme dieses Vermögens wird der relative Werth derselben abnehmen.

Nach Daniel Bernoulli's Grundsatz ist der relative Werth einer unendlich kleinen Vermögensänderung proportional dem Quotienten aus ihrem absoluten Betrag und dem Totalvermögen der davon betroffenen Person.

Ist demnach x das Vermögen einer Person, dx eine Aenderung desselben, so ist der relative Werth dieser Aenderung

$$dG = m \frac{dx}{x}; \qquad (1)$$

geht die Aenderung von dem Anfangswerthe $x = v$ durch derlei unendlich kleine Incremente bis zu dem Werthe $x = V$, so ist ihr relativer Werth

$$G = \int_v^V m \frac{dx}{x} = m l \cdot \frac{V}{v} \qquad (2)$$

Aus der Formel (2) geht hervor:

1) Dass G mit V wächst;

2) dass G desto grösser wird, je geringer unter übrigens gleichen Umständen v ist;

3) dass für $V = v$ sich $G = 0$ ergibt;

4) dass G negativ wird, wenn $V < v$ ist.

In dem Ausdrucke (2) dürfen die Grössen V und v weder der Null gleich noch negativ vorausgesetzt werden, soll G seine bestimmte Bedeutung nicht verlieren. Thatsächlich darf aber auch das Vermögen einer Person im moralischen Sinne niemals für Null, noch weniger als negativ angesehen werden; denn auch Derjenige, der im physischen Sinne nichts besitzt,

hat doch wenigstens seine Existenz, die er einer Summe gleich erachtet und daher gegen eine niedrigere Summe als diese nicht vertauschen würde. Nur von Demjenigen, der eben den Hungertod stirbt, bemerkt Bernoulli, kann man sagen, er besitze absolut nichts.

Hängt die Vermögensänderung von v auf V von dem Eintreffen eines Ereignisses ab, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, so ist der relative oder moralische Werth dieser Erwartung

$$G = pml \cdot \frac{V}{v} \qquad (3)$$

In allen diesen Formeln bedeutet m eine von dem Orte, der Zeit und anderweitigen Umständen abhängige Constante.

Erwartet eine Person, deren Totalvermögen v ist, Gewinne $g_1, g_2, \cdots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \cdots$, wobei vorausgesetzt wird, dass $p_1 + p_2 + \cdots = 1$, so ist der moralische Werth dieser ihrer Erwartung

$$G = p_1 ml \cdot \frac{v + g_1}{v} + p_2\, m\, l \cdot \frac{v + g_2}{v} + \cdots \qquad (4)$$

Bezeichnet V dasjenige physische Vermögen, welches, wenn es gewiss wäre, für die Person denselben moralischen Werth hätte, wie er aus den obigen Erwartungen hervorgeht, so hat man

$$G = m\, l \cdot \frac{V}{v};$$

die Zusammenhaltung der beiden Werthe für G führt zu der Gleichung:

$$l \cdot \frac{V}{v} = p_1 l \cdot \frac{v + g_1}{v} + p_2 l \cdot \frac{v + g_2}{v} + \cdots,$$

aus welcher zunächst

$$\frac{V}{v} = \frac{(v + g_1)^{p_1} (v + g_2)^{p_2} \cdots}{v^{p_1 + p_2 + \cdots}}$$

und wegen $p_1 + p_2 + \cdots = 1$ weiter

$$V = (v + g_1)^{p_1} (v + g_2)^{p_2} \cdots \qquad (5)$$

folgt.

Zieht man von V das ursprüngliche Vermögen v ab, so ist der Unterschied

$$V - v = (v + g_1)^{p_1} (v + g_2)^{p_2} \cdots - v$$

diejenige Vergrösserung des materiellen Vermögens, welche, wenn sie gewiss wäre, der Person denselben moralischen Werth verschaffen würde, wie er aus ihren Erwartungen für sie hervorgegangen ist. Es stellt die eben betrachtete Differenz denjenigen Werth vor, welchen Laplace als **moralische Hoffnung** der Person bezeichnet hat, während die mathematische Hoffnung ausgedrückt wird durch

$$E = p_1 g_1 + p_2 g_2 + \cdots$$

Sind die Gewinne $g_1, g_2, \cdots$ sehr klein in Ansehung des ursprünglichen Vermögens v, so unterscheidet sich die moralische Hoffnung nur sehr wenig von der mathematischen; denn aus der Formel (5) folgt

$$V = v^{p_1 + p_2 + \cdots}\left(1 + \frac{g_1}{v}\right)^{p_1}\left(1 + \frac{g_2}{v}\right)^{p} \cdots$$

$$= v\left(1 + \frac{p_1 g_1}{v}\right)\left(1 + \frac{p_2 g_2}{v}\right)\cdots,$$

wenn auf Grund der gemachten Voraussetzung die höheren Potenzen der Verhältnisse $\frac{g_1}{v}, \frac{g_2}{v}, \cdots$ vernachlässigt werden; daraus ist

$$V - v = p_1 g_1 + p_2 g_2 + \cdots + p_1 p_2 \frac{g_1 g_2}{v} + p_1 p_3 \frac{g_1 g_3}{v} + \cdots,$$

ein Werth, welcher sich nur wenig von E unterscheidet.

Folgerungen aus den vorangehenden Formeln.

65. *I. Die moralische Bedeutung einer Summe g ist kleiner, wenn sie einen Gewinn als wenn sie einen Verlust vorstellt.*

Beweis. Ist g ein Gewinn, so ist sein moralischer Werth

$$G = m\, l \cdot \frac{v+g}{v} = m\{l \cdot (v+g) - l \cdot v\};$$

bedeutet dagegen g einen Verlust, so ist sein moralischer Werth

$$G' = m\, l \cdot \frac{v-g}{v} = m\{l \cdot (v-g) - l \cdot v\}.$$

Nachdem nun

$$(v+g)(v-g) < v^2,$$

so folgt

$$l \cdot (v+g) - l \cdot v < l \cdot v - l \cdot (v-g),$$

also ist dem absoluten Betrage nach

$$G < G'.$$

II. Ein Spiel oder eine Wette, auch wenn sie nach den Regeln der mathematischen Billigkeit geordnet sind, erweisen sich stets als moralisch nachtheilig.

Beweis. Es sei v das Vermögen von A vor dem Spiele, p seine Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, s sein Einsatz; dagegen sei x der Einsatz des Gegners, $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit, dass er gewinnt. Die Billigkeit erfordert, dass

$$x : s = 1 - p : p, \qquad x = \frac{1-p}{p} s.$$

Gewinnt A, so ist sein Vermögen nach dem Spiele $v + \frac{1-p}{p} s$, und die Wahrscheinlichkeit hiefür ist p.

Verliert A, so ist sein Vermögen nach dem Spiele $v - s$, und die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $(1 - p)$.

Das dieser Erwartung entsprechende Vermögen V von A ist

$$V = \left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v - s)^{1-p},$$

und es soll gezeigt werden, dass $V < v$, oder dass

$$\left(v + \frac{1-p}{p} s\right)^p (v - s)^{1-p} < v,$$

oder, unter Beachtung, dass $v^{p+1-p} = v$:

$$\left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right)^p \left(1 - \frac{s}{v}\right)^{1-p} < 1,$$

oder endlich

$$p \cdot l\left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right) + (1 - p)\, l \cdot \left(1 - \frac{s}{v}\right) < 0. \; . \; . \quad \text{(a)}$$

Nun ist

$$pl \cdot \left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right) = \frac{1-p}{v} \int \frac{ds}{1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}},$$

$$(1 - p)\, l \cdot \left(1 - \frac{s}{v}\right) = -\frac{1-p}{v} \int \frac{ds}{1 - \frac{s}{v}},$$

daher

$$pl \cdot \left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}\right) + (1-p) l \cdot \left(1 - \frac{s}{v}\right) = \frac{1-p}{v} \int \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1-p}{p} \frac{s}{v}} - \frac{1}{1 - \frac{s}{v}} \right\} ds <$$

wie es zum Beweise des vorliegenden Satzes gefordert wurde.

III. Der Werth des Einsatzes ist so zu bestimmen, dass der Nachtheil im Vergleich zum Vermögen v des Spielers unmerklich ausfalle.

Für das durch die Erwartungen geänderte Vermögen V wurde vorhin der Ausdruck gefunden:

$$V = v\left(1 + \frac{1-p}{p}\frac{s}{v}\right)^p \left(1 - \frac{s}{v}\right)^{1-p};$$

s ist unbekannt; doch wird sein Werth im Vergleich zu v gewiss sehr klein ausfallen, so dass man bei der Entwickelung der beiden Binome die höheren Potenzen des Verhältnisses $\frac{s}{v}$ von der zweiten an wird vernachlässigen dürfen; man findet so

$$V = v - \frac{1-p}{2pv}s^2;$$

ist $\frac{1-p}{2pv}s^2$ ein sehr kleiner Bruchtheil von v, so ist der aus der Wette entspringende Nachtheil nur gering; wir setzen daher

$$\frac{1-p}{2pv}s^2 = \frac{v}{n}$$

und finden

$$s = v\sqrt{\frac{2p}{n(1-p)}}.$$

Das durch das Eingehen in die Wette geänderte Vermögen ist jetzt

$$V = v - \frac{v}{n},$$

also von dem ursprünglichen Vermögen unmerklich verschieden, wenn n sehr gross ist.

IV. Welche Wahrscheinlichkeit muss eine Person für das Gewinnen haben, um ihr ganzes Vermögen v weniger einem unmerklichen Theile $\frac{v}{n}$ desselben wagen zu dürfen, ohne dadurch einen wesentlichen Nachtheil zu erleiden?

Ersetzt man in der Formel

$$V = \left(v + \frac{1-p}{p}s\right)^p \left(v - s\right)^{1-p}$$

s durch $v - \frac{v}{n}$, so wird

$$V = v\left\{1 + \frac{1-p}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}^p \left\{\frac{1}{n}\right\}^{1-p}$$

das durch die Erwartung geänderte Vermögen. **Andererseits** soll dasselbe nur um ein Geringes, $\frac{v}{n}$, von dem **ursprünglichen** Vermögen verschieden, also

$$V = v - \frac{v}{n}$$

sein. Die Gleichsetzung der beiden Werthe von V liefert die zur Bestimmung von p führende Gleichung

$$1 - \frac{1}{n} = \left\{1 + \frac{1-p}{p}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}^p \left\{\frac{1}{n}\right\}^{1-p}.$$

Für $\frac{1}{n} = \frac{1}{10000}$ findet sich

$$p = \frac{82303}{82304}, \quad 1 - p = \frac{1}{82304},$$

die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens muss also der Gewissheit nahe kommen, soll aus der Wette, bei welcher nahezu das ganze Vermögen auf's Spiel gesetzt wird, kein merklicher Nachtheil erwachsen.

V. Es ist zu zeigen, dass es nicht von Vortheil ist, sein Vermögen oder einen Theil desselben einer einzigen Gefahr auszusetzen, dass es im Gegentheil vorzuziehen ist, dasselbe auf mehrere, unter einander unabhängige Gefahren zu vertheilen.

Angenommen, ein Kaufmann, dessen Vermögen v ist, erwarte eine Schiffsladung im Werthe s, welche einem einzigen Schiffe anvertraut ist, und es sei aus Beobachtungen bekannt, dass das glückliche Einlaufen eines Schiffes dieser Art die Wahrscheinlichkeit p besitzt.

Das moralische Vermögen des Kaufmannes, in Folge dieser Erwartung, ist

$$V = (v + s)^p,$$

woraus

$$l \cdot V = p\, l \cdot (v + s) = p \int \frac{ds}{v + s} \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Nun setzen wir voraus, der Kaufmann habe den Betrag s auf r Schiffe derselben Gattung zu gleichen Theilen ver-

theilt; treffen alle ein, so wird sein Vermögen $v + s$, und die Wahrscheinlichkeit dafür ist p^r; laufen $r - 1$ der Schiffe glücklich ein, so wird sein Vermögen $v + \frac{r-1}{r} s$, und die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $rp^{r-1}(1-p)$; treffen $r - 2$ der Schiffe ein, so wird sein Vermögen $v + \frac{r-2}{r} s$, und die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} p^{r-2}(1-p)^2$ u. s. w.

Das gesammte moralische Vermögen in Folge dieser Erwartungen ist

$$V' = (v+s)^{p^r}\left(v + \frac{r-1}{r}s\right)^{rp^{r-1}(1-p)}\left(v + \frac{r-2}{r}s\right)^{\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}p^{r-2}(1-p)^2} \cdots,$$

woraus

$$' = p^r l\cdot(v+s) + rp^{r-1}(1-p) l\cdot\left(v + \frac{r-1}{r}s\right) + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}p^{r-2}(1-p)^2 l\cdot\left(v + \frac{r-2}{r}s\right) + \cdots$$

$$= \int \left\{ \frac{p^r ds}{v+s} + \frac{rp^{r-1}(1-p)\frac{r-1}{r}ds}{v + \frac{r-1}{r}s} + \frac{\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}p^{r-2}(1-p)^2\frac{r-2}{r}ds}{v + \frac{r-2}{r}s} + \cdots \right\}$$

$$= p\int \left\{ \frac{p^{r-1}}{v+s} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v + \frac{r-1}{r}s} + \frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1 \cdot 2\left(v + \frac{r-2}{r}s\right)} + \cdots \right\} ds \quad \text{(b)}.$$

Zur Vergleichung von V mit V' beachten wir, dass im Hinblick auf die Identität

$$p + 1 - p)^{r-1} = p^{r-1} + (r-1)p^{r-2}(1-p) + \frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2}p^{r-3}(1-p)^2$$
$$+ \cdots + (1-p)^{r-1} = 1$$

die Formel (a) auf folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$l \cdot V = p\int 1 \cdot \frac{ds}{v+s}$$

$$= p\int \left\{ \frac{p^{r-1}}{v+s} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{v+s} + \frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1 \cdot 2(v+s)} + \cdots \right\} ds. \quad \text{(a')}$$

Subtrahirt man dies von der Gleichung (b), so ergibt sich

$$l \cdot V' - l \cdot V = \frac{r-1}{r}(1-p)\int \frac{s\,ds}{v+s}\left\{ \frac{p^{r-1}}{v + \frac{r-1}{r}s} + \frac{(r-2)p^{r-2}(1-p)}{v + \frac{r-2}{r}s} + \cdots \right\};$$

die Differenz ist positiv, daher $l \cdot V' > l \,.\, V$, also auch $V' > V$; es erscheint also die Vertheilung der Summe s auf mehrere gleichartige Schiffe moralisch vortheilhafter.

Der Vortheil wächst mit r und fällt für einen unendlich grossen Werth von r mit dem mathematischen Vortheil überein.

Um dies zu zeigen, nehmen wir die Formel (b) wieder auf und setzen darin $v = 1$; dadurch wird

$$l \cdot V' = p \int \left\{ \frac{p^{r-1}}{1+s} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\frac{r-1}{r}s} + \frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1 \cdot 2\left(1+\frac{r-2}{r}s\right)} + \cdots \right\} ds.$$

Die eingeklammerte Summe lässt sich unter die Form eines bestimmten Integrales bringen, indem man die Gleichung

$$e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)^{r-1} = p^{r-1}e^{-x(1+s)} + (r-1)p^{r-2}(1-p)e^{-x\left(1+\frac{r-1}{r}s\right)}$$
$$+ \frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2}p^{r-3}(1-p)^2 e^{-x\left(1+\frac{r-2}{r}s\right)} + \cdots$$

nach erfolgter Multiplication mit dx innerhalb der Grenzen 0 und ∞ integrirt, wobei wiederholt von der Formel

$$\int_0^\infty e^{-mx}\,dx = \frac{1}{m}$$

Gebrauch zu machen ist. Man erhält auf diese Weise:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)^{r-1} = \frac{p^{r-1}}{1+s} + \frac{(r-1)p^{r-2}(1-p)}{1+\frac{r-1}{r}s}$$
$$+ \frac{(r-1)(r-2)p^{r-3}(1-p)^2}{1 \cdot 2\left(1+\frac{r-2}{r}s\right)} + \cdots,$$

und der Ausdruck für $l \cdot V'$ übergeht in

$$l \cdot V' = p\int ds \int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)^{r-1} dx.$$

Zum Zwecke der Integration bemerken wir, dass die Function

$$y = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x} + 1 - p\right)^{r-1}$$

innerhalb der Integrationsgrenzen $x = 0$ und $x = \infty$ weder ein Maximum noch ein Minimum besitzt, nachdem der erste Differentialquotient, welcher gleich ist

$$-e^{-\frac{r+s}{r}}\left(pe^{-\frac{s}{r}x} + 1 - p\right)^{r-2}\left\{p(1+s)e^{-\frac{s}{r}x} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right\},$$

innerhalb dieses Intervalls negativ bleibt. Es ist daher erlaubt,

$$y = y_0\, e^{-t}$$

zu setzen, wobei y_0 der Werth von y für $x = 0$ ist. Nachdem aber für $t = 0$ ebenfalls $y = y_0$ wird, so folgt, dass $t = 0$ auch $x = 0$ entspricht. Für $x = 0$ nimmt aber y den Werth 1 an, so dass also $y_0 = 1$ ist. Mithin hat man

$$\int_0^\infty y\,dx = \int_0^\infty e^{-t}\,dt\frac{dx}{dt}.$$

Es kommt jetzt darauf an, $\frac{dx}{dt}$ als Function von t darzustellen. Zunächst ist nach der Mac Laurin'schen Reihe

$$x = f(t) = f(0) + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} t + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0}\frac{t^2}{1\cdot 2} + \cdots, \quad (1)$$

und weil $t = l\cdot\frac{y^0}{y} = l\cdot\frac{1}{y}$, so findet sich

$$dt = -\frac{dy}{y} = \frac{dx}{-\frac{y\,dx}{dy}} = \frac{dx}{u},$$

wenn man

$$u = -\frac{y\,dx}{dy}$$

setzt, woraus wieder berechnet wird:

$$\frac{dx}{dt} = u;\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{u\,du}{dx} \text{ u. s. w.}$$

Beachtet man ferner, dass die Werthe $t = 0$ und $x = 0$ einander entsprechen, so folgt weiter:

$$f(0) = 0;\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = u_{x=0};\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{u\,du}{dx}\right)_{x=0};\text{ u. s. w.}$$

Nach Einsetzung dieser Werthe lautet die Formel (1):

$$x = u_0 t + \left(\frac{u\,du}{dx}\right)_0 \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

und liefert

$$\frac{dx}{dt} = u_0 + \left(\frac{u\,du}{dx}\right)_0 t + \cdots = u_0 \left\{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 t + \cdots\right\}.$$

Damit hat man jetzt

$$\int\limits_0^\infty y\,dx = u_0 \left\{\int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 \int\limits_0^\infty t e^{-t}\,dt + \cdots\right\}$$

$$= u_0 \left\{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 + \cdots\right\},$$

weil beide Integrale in der Klammer die Einheit ergeben; nun wurde aber

$$u = -\frac{y\,dx}{dy} = \frac{p e^{-\frac{s}{r}x} + 1 - p}{p(1+s)e^{-\frac{s}{r}x} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)}$$

gesetzt; daraus folgt

$$\frac{du}{dx} = \frac{-(1-p)p\frac{s^2}{r^2}(1-r)e^{-\frac{s}{r}x}}{\left\{p(1+s)e^{-\frac{s}{r}x} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right\}^2}, \text{ u. s. w.};$$

also ist

$$u_0 = \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}},$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left\{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right\}^2}.$$

Das gesuchte Integral nimmt mit diesen beiden Ausdrücken den Werth

$$\int\limits_0^\infty y\,dx = \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}} \left\{1 + \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left\{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right\}^2} + \cdots\right\}$$

an, und führt man diesen in die Gleichung

$$l \cdot V' = p\int ds \int\limits_0^\infty y\,dx$$

ein, so wird

$$l \cdot V' = \int \frac{p\,ds}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}} \left\{1 + \frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left\{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right\}^2} + \cdots\right\}.$$

Unter Annahme eines sehr hohen Werthes für r hat man, bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r}$ genau,

$$l \cdot V' = \int^s \frac{p\,ds}{1+ps} = l \cdot (1+ps),$$

also

$$V' = 1 + ps,$$

und wenn anstatt 1 wieder wie ursprünglich v geschrieben wird,

$$V' = v + ps.$$

Daher ist $V' - v = ps$, die moralische Hoffnung gleich der mathematischen.

VI. *Es ist moralisch vortheilhaft, eine von einem ungewissen Ereigniss abhängige Summe zu versichern.*

Um dies zu erweisen, suchen wir diejenige Summe, welche der Kaufmann einer Versicherungsgesellschaft zahlen darf, ohne dadurch moralisch in Nachtheil zu gerathen.

Der Kaufmann erwarte die Summe s, welche einem Schiffe anvertraut ist, dessen Eintreffen die Wahrscheinlichkeit p hat. Besitzt er ein Vermögen v, so nimmt dasselbe durch die Erwartung den Werth

$$V = (v+s)^p$$

an. Versichert er die erwartete Summe, so sollte er nach den Grundsätzen, welche sich auf mathematische Hoffnung beziehen, die Prämie $(1-p)s$ erlegen; dieselbe wird jedoch durch die Verwaltungskosten und den angestrebten Vortheil der Gesellschaft um einen Betrag u erhöht; sein wirkliches Vermögen ist also nach erfolgter Versicherung

$$v + s - (1-p)s - u = v + ps - u \quad \ldots . \text{(b)}$$

Soll das moralische Vermögen des Kaufmannes durch

die Versicherung nicht geändert worden sein, so muss die Gleichung bestehen:

$$(v+s)^p = v + ps - u,$$

aus welcher für u der Werth

$$u = v + ps - (v+s)^p \quad \text{. . . . . (c)}$$

fliesst; dieser Werth ist immer positiv, denn aus der selbstverständlichen Beziehung

$$\int \frac{p\,ds}{v+s} < \int \frac{p\,ds}{v+ps}$$

folgt

$$pl \cdot (v+s) < l \cdot (v+ps),$$
$$(v+s)^p < v+ps,$$

daher

$$v + ps - (v+s)^p = u > 0.$$

Der Kaufmann darf also einen Betrag über die nach mathematischen Grundsätzen geregelte Prämie $(1-p)\,s$ leisten, ohne dadurch in moralischen Nachtheil zu gerathen; er befindet sich sogar moralisch im Vortheil, wenn die von der Gesellschaft geforderte Ueberzahlung kleiner ist als der durch die Formel (c) angegebene Werth; erst wenn die Ueberzahlung diesen Werth übersteigt, erwächst ihm aus der Versicherung ein Nachtheil.

Petersburger Problem.

66. *Zwei Personen A und B spielen Wappen und Schrift unter der Bedingung, dass B dem A, wenn dieser Wappen auf den ersten Wurf trifft, 2 Francs, wenn er Wappen auf den zweiten Wurf trifft, 4 Francs, $\cdots$ wenn er Wappen auf den n^{ten} Wurf trifft, 2^n Francs zahlt; es ist die Frage nach dem Einsatze, welchen A zu leisten hat.*

Mathematische Lösung. Die mathematische Gleichheit des Spieles erfordert, dass der Einsatz von A gleich sei dem von ihm zu erhoffenden Gewinn oder seiner mathematischen Hoffnung; nun sind die Wahrscheinlichkeiten, Wappen auf den 1., 2., $\cdots$ n^{ten} Wurf zu treffen,

$$\frac{1}{2}, \; \frac{1}{4}, \; \cdots \; \frac{1}{2^n};$$

die mathematische Hoffnung von A ist daher

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \cdots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = n.$$

Dies also der Einsatz von A. Ist aber n sehr gross, so wird Niemand eine gleiche Summe wagen wollen. Hier also steht die Regel von der mathematischen Hoffnung mit den Eingebungen des gemeinen Verstandes im Widerspruche: jene lässt die Wette annehmbar erscheinen, diese rathen davon ab.

Moralische Lösung Daniel Bernoulli's. Es sei v das Vermögen, welches A vor dem Spiele besitzt, x der Einsatz, welchen er wagen darf. Fällt Wappen auf den 1., 2., $\cdots$ n^{ten} Wurf, so verwandelt sich sein Vermögen beziehungsweise in

$$v + 2 - x, \quad v + 2^2 - x, \cdots v + 2^n - x;$$

die diesen Veränderungen zukommenden Wahrscheinlichkeiten sind wie vorhin

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2}, \cdots \quad \frac{1}{2^n};$$

das moralische Vermögen, in dessen Besitz sich A in Folge seiner Erwartungen befindet, beträgt

$$V = (v + 2 - x)^{\frac{1}{2}} (v + 2^2 - x)^{\frac{1}{2^2}} \cdots (v + 2^n - x)^{\frac{1}{2^n}}.$$

Soll dasselbe seinem ursprünglichen Vermögen gleich sein, so muss

$$v = (v + 2 - x)^{\frac{1}{2}} (v + 2^2 - x)^{\frac{1}{2^2}} \cdots (v + 2^n - x)^{\frac{1}{2^n}}$$

werden, oder, wenn $v - x = v'$ gesetzt wird,

$$v = v' + x = (v' + 2)^{\frac{1}{2}} (v' + 2^2)^{\frac{1}{2^2}} \cdots (v' + 2^n)^{\frac{1}{2^n}} \,..(1)$$

$$= v'^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}} \left(1 + \frac{2}{v'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^2}{v'}\right)^{\frac{1}{2^2}} \cdots \left(1 + \frac{2^n}{v'}\right)^{\frac{1}{2^n}};$$

ist aber n sehr gross, so kann annähernd

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1$$

gesetzt werden; indem man dann beide Seiten durch v' dividirt und zur Abkürzung $\frac{1}{v'} = \alpha$ setzt, ergibt sich endlich

$$1 + \alpha x = (1 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}} (1 + 2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}} \cdots (1 + 2^n\alpha)^{\frac{1}{2^n}} \quad (2)$$

als zur Bestimmung von x führende Gleichung.

Zum Zwecke der Auflösung beachten wir, dass die Factoren der rechten Seite gegen die Einheit, ihre Logarithmen also gegen die Nulle convergiren. Denn es ist

$$(1 + 2^u\alpha)^2 > 1 + 2 \cdot 2^u \alpha$$

oder

$$(1 + 2^u\alpha)^{\frac{2^u+1}{2^u}} > 1 + 2^{u+1}\alpha$$

oder

$$(1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} > (1 + 2^{u+1}\alpha)^{\frac{1}{2^{u+1}}};$$

damit ist vorderhand das Fallen der Factoren nachgewiesen.

Andererseits ist

$$l \cdot (1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} = \frac{1}{2^u} l \cdot (1 + 2^u\alpha) = \frac{1}{2^u} l \cdot 2^u \left(\frac{1}{2^u} + \alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2^u} l \cdot 2^u + \frac{1}{2^u} l \cdot \left(\frac{1}{2^u} + \alpha\right)$$

$$= \frac{u}{2^u} l \cdot 2 + \frac{1}{2^u} l \cdot \left(\frac{1}{2^u} + \alpha\right),$$

und man überblickt sofort, dass beide Glieder der rechten, mithin auch die linke Seite gegen die Nulle convergiren, wenn u in's Unendliche wächst; es ist also

$$\lim (1 + 2^u\alpha)^{\frac{1}{2^u}} = 1 \quad \text{für } \lim u = \infty.$$

Der vortheilhafteste Fall für A trifft ein, wenn n, d. i. die Anzahl der Partien, unendlich gross wird. Es reicht jedoch hin, in der Formel (2) bis zu einem genügend grossen Werthe $u - 1$ von n fortzuschreiten, so dass das im nächsten Factor auftretende $2^u\alpha$ mindestens gleich 10 wird. Mit Vernachlässigung der übrigen Glieder hat man dann die näherungsweise richtige Gleichung

$$\log(1 + \alpha x) = \frac{1}{2} \log (1 + 2\alpha) + \frac{1}{2^2} \log (1 + 2^2\alpha)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2^{u-1}} \log (1 + 2^{u-1}\alpha), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

aus welcher bei bekannt vorausgesetztem v' und also auch

$\alpha = \frac{1}{v}$ der Einsatz x berechnet werden kann; dieser gibt dann $v = v' + x$.

Beispiel. Es sei $v' = 100$, also $\alpha = \frac{1}{100} = 0{\cdot}01$; für diesen Fall berechnet Laplace $x = 7{\cdot}89$, daher $v = 107{\cdot}89$.

Besitzt also A vor dem Spiele 107·89 Fr., so schreibt ihm die Klugheit vor, nur 7·89 Fr. auf das Spiel zu wagen, um dasselbe moralische Vermögen zu bewahren.

VI. Capitel.

Von den Wahrscheinlichkeiten der Ursachen und künftigen Ereignisse.

A. Theorie.

I. Ursachen.

67. *Definition der Ursachen.* Die Umstände, welche an der Hervorbringung eines Ereignisses theilnehmen, sind entweder constant oder stetig veränderlich.

Die ersten, welche man als Chancen des Ereignisses zu bezeichnen pflegt, können bekannt oder unbekannt sein, sie sind entweder einer genauen Berechnung fähig oder lassen nur eine näherungsweise Schätzung zu.

Die Umstände der zweiten Art sind der Rechnung völlig unzugänglich.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet man die Umstände der ersten Art oder die Chancen als *Ursachen* der Ereignisse, während man die Gesammtheit der veränderlichen Umstände *Zufall* nennt.

Sind die Chancen eines Ereignisses bekannt, so lässt sich auch seine Wahrscheinlichkeit angeben, und man sagt, dass seine Ursache *gewiss* ist.

Kann dagegen ein beobachtetes Ereigniss mehreren Ur-

sachen zugeschrieben werden, ohne dass man weiss, welche sein Eintreffen herbeigeführt hat, so bezeichnet man seine Ursache als *ungewiss*, und die verschiedenen Ursachen, denen es zugeschrieben werden kann, sind mehr oder weniger *wahrscheinlich*, jenachdem sie dem beobachteten Ereigniss mehr oder weniger günstige Fälle zuweisen.

Lässt sich über die unbekannten Chancen eines beobachteten Ereignisses eine gewisse Anzahl gleich zulässiger Hypothesen aufstellen, wovon aber nur eine nothwendig wahr ist, so können diese Hypothesen als mehr weniger wahrscheinliche Ursachen angesehen werden, und diejenige davon, welcher die grösste Wahrscheinlichkeit zukommt, kann einstweilen als die wahre Ursache angesehen werden.

Die Ursachen oder Hypothesen haben a priori entweder denselben Grad von Möglichkeit oder erscheinen als in verschiedenem Grade möglich.

Wir wollen nunmehr die eben gegebenen Erklärungen auf analytisches Gebiet übertragen. — Sei x die Wahrscheinlichkeit eines einfachen Ereignisses, $y = f(x)$ die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses E, welches von jenem einfachen in irgendwelcher Weise abhängt; man sagt dann, x sei die Ursache von E und y die Wahrscheinlichkeit von E nach dieser Ursache. Ist x bekannt, so ist die Ursache von E gewiss; kennt man dagegen den wahren Werth von x nicht und weiss nur, dass es einer der Werthe $a, b, \cdots i$ sein muss, so kann jeder dieser genannten Werthe als eine Ursache von E angesehen werden. Diesen Ursachen kommen im Allgemeinen verschiedene Wahrscheinlichkeiten zu, deren Berechnung Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein soll.

Grundsätze.

68. 1) Die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen oder Ursachen, denen ein beobachtetes Ereigniss zugeschrieben werden kann, sind proportional den Anzahlen der günstigen Fälle, welche sie diesem Ereigniss ertheilen.

2) Der wahrscheinlichste Werth der unbekannten Ursache x eines beobachteten Ereignisses E ist derjenige, welcher die

Wahrscheinlichkeit $y = f(x)$ desselben zu einem Maximum macht.

3) Bedeutet

v die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E,

V jene des zusammengesetzten Ereignisses (E, F),

P die Wahrscheinlichkeit, dass, indem E eintrifft, auch F sich ereignet, so ist offenbar

$$V = Pv,$$

woraus

$$P = \frac{V}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

geschlossen wird.

Diese drei Sätze bilden die Grundlage der Theorie der Wahrscheinlichkeiten von Ursachen und künftigen Ereignissen, abgeleitet aus der Beobachtung vergangener oder stattgehabter Ereignisse.

69. **Erstes Theorem** *(von Bayes). Ist p_i die Wahrscheinlichkeit, welche die Ursache c_i (i kann die Werthe $1, 2, \cdots n$ annehmen) einem beobachteten Ereigniss E ertheilen würde, wenn sie gewiss wäre, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Ursache c_i bei der Hervorbringung des Ereignisses thätig war, ausgedrückt durch*

$$P_i = \frac{p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Erster Beweis. Es sei a_i die Zahl der günstigen Fälle, welche die Ursache c_i dem Ereigniss E verleiht, μ die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle; letztere wird für alle Ursachen als gleich gross vorausgesetzt*); die Wahrscheinlichkeit von E, wenn c_i thätig ist, lautet

*) Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt. Wären nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i, \cdots \alpha_n$ die den einzelnen Ursachen entsprechenden Anzahlen günstiger Fälle, μ_1, $\mu_2, \cdots \mu_i, \cdots \mu_n$ die Anzahlen aller möglichen Fälle, letztere also unter einander nicht gleich, so ersetze man sie durch irgend ein gemeinschaftliches Vielfache μ und bestimme die Zahlen der günstigen Fälle, $a_1, a_2, \cdots a_i, \cdots a_n$, so, dass $\frac{a_1}{\mu} = \frac{\alpha_1}{\mu_1}, \frac{a_2}{\mu} = \frac{\alpha_2}{\mu_2}, \ldots \frac{a_i}{\mu} = \frac{\alpha_i}{\mu_i}$ wird. Die Wahrscheinlichkeiten bleiben dadurch ungeändert.

$$p_i = \frac{a_i}{\mu}.$$

Dem Grundsatze 1) zufolge verhält sich

$$P_1 : P_2 : \cdots : P_i : \cdots : P_n = a_1 : a_2 : \cdots : a_i : \cdots : a_n,$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$, da eine der Ursachen nothwendig wahr ist,

$$P_i : 1 = a_i : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_i}{\mu} : \frac{a_1}{\mu} + \frac{a_2}{\mu} + \cdots + \frac{a_n}{\mu}$$
$$= p_i : p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$

folgt; mithin ist thatsächlich

$$P_i = \frac{p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i}.$$

Zweiter Beweis (nach Laplace).

Es sei: E ein Ereigniss, herbeigeführt durch eine der Ursachen c_i ($i = 1, 2, \cdots n$);

P_i die Wahrscheinlichkeit, dass c_i stattfindet, wenn E eingetroffen ist;

V die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses (E, c_i);

v die Wahrscheinlichkeit von E.

Nach dem Grundsatze 3) hat man dann

$$P_i = \frac{V}{v}.$$

Die sämmtlichen Ursachen werden a priori als gleich wahrscheinlich vorausgesetzt; ihre Anzahl ist n; die Wahrscheinlichkeit der Ursache c_i ist daher $\frac{1}{n}$; und ist p_i die Wahrscheinlichkeit von E, wenn die Ursache c_i gewiss ist, so hat man für die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses (E, c_i) den Ausdruck

$$V = \frac{1}{n} p_i.$$

Nachdem das Ereigniss E die Folge einer der Ursachen $c_1, c_2, \cdots c_n$ sein muss, so ist seine vollständige Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten von (E, c_1), (E, c_2), $\cdots$ (E, c_n), also

$$v = \frac{1}{n} p_1 + \frac{1}{n} p_2 + \cdots + \frac{1}{n} p_n = \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{1}{S}} p_i.$$

Folglich ist das gesuchte

$$P_i = \frac{V}{v} = \frac{p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i}.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer der Ursachen ist also gleich der Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache dem beobachteten Ereigniss verleihen würde, wenn sie gewiss wäre, dividirt durch die Summe aller ähnlichen auf die einzelnen Ursachen bezüglichen Wahrscheinlichkeiten.

70. **Anmerkung I.** Die Wahrscheinlichkeit P, dass das Ereigniss E in Folge der Wirkung einer der Ursachen $c_a \cdots c_i \cdots c_b$ eingetroffen ist, lautet:

$$P = P_a + \cdots + P_i + \cdots + P_b = \overset{b}{\underset{a}{S}} P_i = \frac{\overset{b}{\underset{a}{S}} p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i} \ldots (3)$$

Anmerkung II. Bei der Mehrzahl einfacher Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit unbekannt und erscheint aller Werthe zwischen 0 und 1 gleich fähig.

Ist x einer dieser Werthe, y die Wahrscheinlichkeit eines von dem betreffenden Ereigniss abhängigen zusammengesetzten Ereignisses A, das beobachtet wurde, so hat man $y = f(x)$, und es kann x als Ursache von A angesehen werden; bezeichnet P_i die Wahrscheinlichkeit dieser Ursache, so ist dem vorigen zufolge

$$P_i = \frac{y}{\overset{1}{\underset{0}{S_x}} y} = \frac{f(x)}{\overset{1}{\underset{0}{S}} f(x)} = \frac{f(x)\, dx}{dx \overset{1}{\underset{0}{S}} f(x)};$$

nun ist bekanntlich, wenn $b = a + n da$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = dx \{ (a) + f(a + da) + \cdots + f(a + \overline{n-1} da \};$$

man kann also $dx \overset{1}{\underset{0}{S}} f(x)$ durch $\int_0^1 f(x)\, dx$ ersetzen, wodurch

$$P_i = \frac{f(x)\,dx}{\int\limits_0^1 f(x)\,dx} = \frac{y\,dx}{\int\limits_0^1 y\,dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wird.

Für denjenigen Werth von x, — er heisse m, — welcher y zum Maximum macht, wird auch P_i am grössten; man nennt daher m die Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses nach der wahrscheinlichsten Hypothese.

Im Hinblick auf Gleichung (3) ist die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen den Grenzen a und b enthalten ist,

$$P = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{\int\limits_0^1 f(x)\,dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Anmerkung III. Es sei $u = f(x, y)$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E, welches aus zwei einfachen Ereignissen in irgend welcher Art zusammengesetzt ist, deren Wahrscheinlichkeiten mit x und y bezeichnet werden; x und y sind demnach als Ursachen von E anzusehen und die Wahrscheinlichkeit ihrer Coexistenz ist

$$P_i = \frac{u}{\mathop{S}\limits_0^1{}_y \mathop{S}\limits_0^1{}_x u} = \frac{u\,dx\,dy}{dx\,dy \mathop{S}\limits_0^1{}_y \mathop{S}\limits_0^1{}_x u} = \frac{u\,dx\,dy}{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u\,dx\,dy};$$

die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen a und b und y gleichzeitig zwischen α und β enthalten ist, hat zum Ausdruck

$$P = \frac{\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^b u\,dx}{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 u\,dx\,dy}.$$

Die obige Betrachtung lässt sich leicht auf ein Ereigniss E von der Wahrscheinlichkeit

$$u = f(x, y, \cdots w)$$

ausdehnen, welches aus einfachen Ereignissen in irgend welcher Art zusammengesetzt ist, deren Wahrscheinlichkeiten $x, y, \cdots w$ sein mögen; die Wahrscheinlichkeit, dass diese Grössen, als Ursachen von E aufgefasst, zwischen den Grenzen

$$x = \begin{cases} b \\ a \end{cases}, \quad y = \begin{cases} \beta \\ \alpha \end{cases}, \quad \cdots \quad w = \begin{cases} \delta \\ \gamma \end{cases}$$

enthalten sind, ist gegeben durch

$$P = \frac{\int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy \cdots \int_\gamma^\delta u\, dw}{\int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 u\, dx\, dy \cdots dw}.$$

Anmerkung IV. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass *vor* der Beobachtung alle Ursachen c_i denselben Grad von Wahrscheinlichkeit besitzen. Nun soll angenommen werden, dass jeder Ursache vor der Beobachtung von E eine andere, und speciell der Ursache c_i die Wahrscheinlichkeit q_i zukommt; alsdann ist, wenn unter p_i wieder die Wahrscheinlichkeit von E, die Ursache c_i als gewiss vorausgesetzt, verstanden wird, die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Ursache c_i mit dem Ereigniss E:

$$p_i' = p_i q_i,$$

und die Wahrscheinlichkeit P_i', dass bei der Hervorbringung von E die Ursache c_i thätig war:

$$P_i' = \frac{p_i'}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i'} = \frac{p_i q_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i q_i}.$$

Ebenso ist, wenn $z = \varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeit von x vor der Beobachtung und $y = f(x)$ die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses E, gefolgert aus der Ursache x, bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, dass das unbekannte x zwischen den Grenzen a und b gelegen ist,

$$P = \frac{\int_a^b yz\, dx}{\int_0^1 yz\, dx} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\, dx}{\int_0^1 f(x) \cdot \varphi(x)\, dx}.$$

71. **Zweites Theorem** *(von Laplace.) Die Wahrscheinlichkeit, dass die aus einem beobachteten Erfolg abgeleiteten unbekannten Wahrscheinlichkeiten der diesen Erfolg zusammensetzenden einfachen Ereignisse zwischen Grenzen eingeschlossen sind, welche sich beständig und zwar in dem Maasse zusammenziehen, als die Zahl der einfachen Ereignisse wächst, nähert sich immer mehr der Einheit und wird zur Gewissheit, wenn jene Zahl unendlich gross geworden ist, wobei gleichzeitig die*

erwähnten Grenzen mit denjenigen Werthen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten zusammenfallen, welche die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolges zum Maximum erheben.

Beweis. Der beobachtete Erfolg hänge von *einem* einfachen Ereigniss ab, dessen unbekannte Wahrscheinlichkeit mit x bezeichnet werden soll, und seine Wahrscheinlichkeit sei $y = [f(x)]^\mu$; μ wird als sehr gross vorausgesetzt. Nun sei m derjenige Werth von x, für welchen y ein Maximum wird, das mit y_m bezeichnet werden soll. Wir setzen

$$y = y_m e^{-t^2},$$

woraus

$$t = \sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y}$$

abgeleitet wird.

Vorausgesetzt, das x nur innerhalb sehr enger Grenzen α und β um m sich bewegt, welchen die Grenzen

$$\gamma = \sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y_\beta}, \qquad -\gamma' = \sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y_\alpha}$$

der neuen Variablen t entsprechen, so hat man näherungsweise

$$\int_\alpha^\beta y\,dx = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2}\,dt; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

in dieser Formel ist

$$u = \frac{x - m}{\sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y}}, \qquad u_m = \left(\frac{x - m}{\sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y}}\right)_{x=m}.$$

Bezeichnen ferner a und b jene Werthe von x, welche y auf Null bringen, so ergibt sich*)

$$\int_a^b y\,dx = y_m u_m \sqrt{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns dem Ausdrucke

$$P = \frac{\int_{m-\omega}^{m+\omega} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} = \frac{Z}{N}$$

für die Wahrscheinlichkeit zu, dass der Werth von x zwischen

*) Für die Formeln (A) und (B) vergleiche man Note IV. am Ende des Buches.

den Grenzen $m - \theta$ und $m + \theta$ enthalten ist. Wird θ sehr klein vorausgesetzt, so kann der Formel (A) entsprechend

$$Z = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

genommen werden, wenn man unter γ und $-\gamma'$ die Werthe

$$\gamma = \sqrt{l . y_m - l \cdot y_{m+\theta}}\,, \qquad -\gamma' = \sqrt{l . y_m - l . y_{m-\theta}}$$

versteht; ferner ist, wenn y, wie dies fast immer geschieht, für $x = 0$ und $x = 1$ in Null übergeht, der Formel (B) zufolge

$$N = y_m u_m \sqrt{\pi};$$

dadurch wird

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt.$$

Für unseren Fall ist

$$y = [f(x)]^{\mu},$$

daher

$$l \cdot y = \mu\, l \cdot f(x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

woraus

$$l \cdot y_{m-\theta} = \mu\, l \cdot f(m - \theta) = \mu\, l \cdot f(m) - \mu\,\theta \frac{d\, l \cdot f(m)}{d\, m} + \mu \frac{\theta^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2\, l \cdot f(m)}{d\, m^2} + \cdots$$

In Folge der Gleichung (1) ist aber

$$\mu\, l \cdot f(m) = l \cdot y_m;$$

ferner ergibt sich aus

$$\frac{d\, l \cdot y}{d\, x} = \frac{1}{y} \frac{d\, y}{d\, x}$$

mit Rücksicht darauf, dass $x = m$ aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ gerechnet wurde:

$$\frac{d\, l \cdot f(m)}{d\, m} = 0;$$

endlich folgt aus

$$\frac{d^2\, l \cdot f(x)}{d\, x^2} = \frac{d^2 f(x)}{f(x) \cdot d\, x^2} - \left(\frac{d\, f(x)}{f(x) \cdot d\, x}\right)^2,$$

wieder mit Beachtung des Umstandes, dass $\frac{d f(m)}{d\, m} = 0$ ist,

$$\frac{d^2\, l \cdot f(m)}{d\, m^2} = \left(\frac{d^2 f(x)}{f(x)\, d\, x^2}\right)_{x=m} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{d^2 y}{y\, d\, x^2}\right)_{x=m}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck für $l \cdot y_{m-\theta}$, so übergeht derselbe in

$$l \cdot y_{m-\theta} = l \cdot y_m + \frac{\mu\,\theta^2}{2}\left(\frac{d^2 f(x)}{f(x)\,d\,x^2}\right)_{x=m} - \cdots$$

In gleicher Weise findet sich

$$l \cdot y_{m+\theta} = l \cdot y_m + \frac{\mu\,\theta^2}{2}\left(\frac{d^2 f(x)}{f(x)\,d\,x^2}\right)_{x=m} + \cdots$$

Durch Zusammenhaltung der beiden letzten Formeln und unter Vernachlässigung höherer Potenzen von θ ergibt sich:

$$l \cdot y_m - l \cdot y_{m+\theta} = l \cdot y_m - l \cdot y_{m-\theta} = -\frac{\mu\,\theta^2}{2}\left(\frac{d^2 f(x)}{f(x)\,d\,x^2}\right)_{x=m}$$
$$= \mu\,\theta^2\left(-\frac{1}{\mu}\,\frac{d^2 y}{2\,y\,d\,x^2}\right)_m,$$

also

$$\gamma^2 = \gamma'^2.$$

Der Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P nimmt dadurch die Gestalt an:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,d\,t,$$

worin

$$\gamma = \theta\sqrt{\mu}\sqrt{-\frac{1}{\mu}\left(\frac{d^2 y}{2\,y\,d\,x^2}\right)_m} = \theta\sqrt{\mu}\cdot k;$$

daraus berechnet sich

$$\theta = \frac{\gamma}{k\sqrt{\mu}}.$$

P stellt also die Wahrscheinlichkeit vor, dass x zwischen den Grenzen

$$m \pm \theta = m \pm \frac{\gamma}{k\sqrt{\mu}}$$

enthalten ist; und man sieht, dass sich diese Grenzen in dem Masse zusammenziehen, als μ wächst. Ueberdies strebt P in dem Masse, als γ wächst, der Einheit zu, und wird γ genügend gross, jedoch endlich, so hat man

$$P = 1, \quad \theta = 0, \quad x = m,$$

womit das Theorem erwiesen ist.

72. **Anmerkung I.** *Regel zur Entscheidung, ob die Ursache x mit grosser Wahrscheinlichkeit stattfindet.*

Durch Entwickelung des Ausdruckes für P in eine Reihe erhält man

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\gamma^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma \sqrt{\pi}} (1 - \cdots).$$

Nun war

$$\gamma^2 = - \theta^2 \left(\frac{d^2 y}{2 y\, d x^2}\right)_m,$$

daher ist weiter

$$P = 1 - \frac{e^{\theta^2 \left(\frac{d^2 y}{2 y\, d x^2}\right)_m}}{\theta \sqrt{\pi} \sqrt{- \left(\frac{d^2 y}{2 y\, d x^2}\right)_m}} + \cdots = 1 - \frac{e^{\theta^2 \left(\frac{d^2 y}{2 y\, d x^2}\right)_m}}{\sqrt{\pi} \sqrt{- \theta^2 \left(\frac{d^2 y}{2 y\, d x^2}\right)_m}} + \cdots;$$

P fällt also sehr gross aus, wenn $- \theta^2 \left(\frac{d^2 y}{2 y\, d x^2}\right)_m$ einigermassen beträchtlich wird.

73. **Anmerkung II.** Es ist bei dieser Gelegenheit leicht, die Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems nachzuweisen, mit der wir uns übrigens später eingehend befassen werden.

Gesetzt, m_1, m_2 seien die Wiederholungszahlen der entgegengesetzten Ereignisse A und B in einer sehr grossen Anzahl s von Versuchen; x_1 stelle die unbekannte Wahrscheinlichkeit ven A vor. Alsdann ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Werth von x_1 zwischen den Grenzen

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{\mu} \cdot k}$$

eingeschlossen ist.

Im vorliegenden Falle ist

$$y = x_1^{m_2} (1 - x_1)^{m_1} = \left\{ x_1^{\frac{m_2}{m_1}} (1 - x_1) \right\}^{m_1},$$

daher folgt durch Vergleichung mit $y = \{f(x_1)\}^\mu$

$$\mu = m_1.$$

Weiter hat man

$$l \cdot y = m_1\, l \cdot x_1 + m_2\, l \cdot (1 - x_1),$$

woraus

$$\frac{dl \cdot y}{dx_1} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx_1} = \frac{m_1}{x_1} - \frac{m_2}{1 - x_1} = \frac{m_1 - (m_1 + m_2)\, x_1}{x_1\,(1 - x_1)}.$$

Der dem Maximum von y entsprechende Werth von x_1 ist also

$$m = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{s}.$$

Durch nochmalige Differentation obiger Formel wird

$$-\frac{d^2 l \cdot y}{dx_1^2} = \frac{m_1}{x_1^2} + \frac{m_2}{(1 - x_1)^2};$$

daraus folgt

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l \cdot y}{d x_1^2}\right)_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 y}{y\, dx^2}\right)_m = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1}{\left(\frac{m_1}{s}\right)^2} + \frac{m_2}{\left(1 - \frac{m_1}{s}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{s^3}{2 m_1 m_2}.$$

Nun ward zur Abkürzung

$$k = \sqrt{-\frac{1}{\mu}\left(\frac{d^2 y}{2 y\, dx^2}\right)_m}$$

gesetzt; für den gegenwärtigen Fall ist also

$$k = \sqrt{\frac{1}{m_1} \cdot \frac{s^3}{2 m_1 m_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{m_1} \cdot \frac{s^3}{2 m_1 (s - m_1)}};$$

folglich stellt P die Wahrscheinlichkeit vor, dass x_1 zwischen den Grenzen

$$m \pm \frac{\gamma}{\sqrt{m_1}\, k} = \frac{m_1}{s} \pm \frac{\gamma}{\sqrt{m_1}\sqrt{\frac{1}{m_1}\,\frac{s^3}{2 m_1 (s - m_1)}}} = \frac{m_1}{s} \pm \gamma \sqrt{\frac{2 m_1 (s - m_1)}{s^3}}$$

enthalten ist.

II. Zukünftige Ereignisse.

74. **Drittes Theorem.** *Die Wahrscheinlichkeit Π_i für das Eintreffen eines zukünftigen Ereignisses F in Folge der Ursache c_i eines beobachteten Ereignisses E ist gleich dem Producte der Wahrscheinlichkeit P_i der Ursache c_i mit der Wahrscheinlichkeit ϖ_i, welche diese Ursache dem künftigen Ereigniss ertheilt.*

Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet ohne weiteres ein,

wenn man bedenkt, dass Π_i die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses vorstellt, bestehend in dem Vorhandensein der Ursache c_i und dem Eintreffen des Ereignisses F, wenn diese Ursache als gewiss vorausgesetzt wird. Daher ist thatsächlich

$$\Pi_i = P_i \varpi_i = \frac{\varpi_i p_i}{\overset{n}{\underset{1}{S}} p_i}.$$

Anmerkung I. Nehmen wir $p_i = y = f(x)$, wobei x die Ursache und y die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses E nach dieser Ursache ist, ferner $\varpi_i = z = \psi(x)$, wobei ϖ_i die Wahrscheinlichkeit des zukünftigen Ereignisses F nach derselben Ursache vorstellt, so ergibt sich

$$\Pi_i = \frac{yz}{\sum_0^1 {}_x y} = \frac{yz\,dx}{\int_0^1 y\,dx}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss F in Folge eines zwischen den Grenzen a und b gelegenen Werthes von x eintreffen wird, findet sich

$$\Pi = \frac{\int_a^b yz\,dx}{\int_0^1 y\,dx}.$$

Anmerkung II. Die vorangehenden Formeln sind unter der stillschweigenden Voraussetzung abgeleitet worden, dass die einzelnen Ursachen c_i, oder, was dasselbe bedeutet, die einzelnen Werthe von x vor der Beobachtung die gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen. Kommt jedoch jeder Ursache c_i a priori ein besonderer Grad q_i der Möglichkeit zu, dann ist (im Einklange mit Anmerk. IV, Nr. 70)

$$\Pi_i = P_i' \varpi_i = \frac{\varpi_i q_i p_i}{\sum_1^n q_i p_i}.$$

Anmerkung III. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss F in Folge der Wirkung einer der Ursachen $c_1, c_2, \cdots c_n$ eintreffen wird, ist

$$\Pi' = \Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_n = \frac{\sum_1^n \varpi_i p_i}{\sum_1^n p_i};$$

lässt man die in Anmerkung I getroffenen Annahmen gelten, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass F in Folge eines der möglichen Werthe von x eintreffen wird,

$$\Pi' = \frac{\int_0^1 y\, x\, dx}{\int_0^1 y\, dx}.$$

Allgemeine Bemerkung.

Es empfiehlt sich, an dieser Stelle einen Rückblick auf die verschiedenen Aufgaben der Theorie des Zufalls zu machen; dieselben sind von dreifacher Art.

1. *Das Ereigniss ist ungewiss; die Ursachen oder einfachen Wahrscheinlichkeiten sind bekannt. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit des ungewissen Ereignisses.*

Beispiel. Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln in dem gegebenen Verhältniss p zu q; es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit, in s aufeinanderfolgenden Ziehungen m mal eine weisse Kugel zu treffen.

Die Ursache oder die einfache Wahrscheinlichkeit $\frac{p}{p+q}$ ist gewiss; das fragliche Ereigniss ist ungewiss.

2. *Das Ereigniss ist gewiss; die Ursache oder einfache Wahrscheinlichkeit ist ungewiss. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit einer jeden Voraussetzung, welche man über den Werth der Ursache oder der unbekannten einfachen Wahrscheinlichkeit aufstellen kann.*

Beispiel. Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln in einem unbekannten Verhältnisse; nach s aufeinanderfolgenden Ziehungen sind m weisse Kugeln zum Vorschein gekommen; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass das unbekannte Verhältniss gleich ist jenem der Zahlen p und q?

Das Ereigniss ist gewiss; die Ursache $\frac{p}{p+q}$ ist ungewiss.

3. *Das beobachtete Ereigniss ist gewiss; seine Ursache ist ungewiss, ebenso ein zukünftiges Ereigniss. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit des letzteren.*

Beispiel. Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln in einem unbekannten Verhältnisse; in s aufeinanderfolgendan Ziehungen ist m mal eine weisse Kugel zum Vorschein gekommen; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine künftige Ziehung eine weisse Kugel bringen werde?

Das beobachtete Ereigniss ist gewiss; seine Ursache sowie das zukünftige Ereigniss sind ungewiss.

B. Anwendungen.

1. Vermischte Beispiele.

75. **Erstes Beispiel.** *Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln, zusammen in der Anzahl r; bei einer vorgenommenen Ziehung kam eine weisse Kugel zum Vorschein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne n weisse Kugeln enthält?*

Lösung. Die verschiedenen Ursachen des Ziehens einer weissen Kugel sind:

1 weisse,	$r - 1$	schwarze	Kugeln;	Ursache	c_1;
2 „	$r - 2$	„	„	„	c_2;
. . . .					. . .
r „	0	„	„	„	c_r.

Die nach diesen Hypothesen gerechneten Wahrscheinlichkeiten des Ziehens einer weissen Kugel sind

$$p_1 = \frac{1}{r}, \qquad p_2 = \frac{2}{r}, \cdots, \qquad p_r = \frac{r}{r};$$

insbesondere ist unter Zugrundelegung der Ursache c_n

$$p_n = \frac{n}{r}.$$

Dem Theorem von Bayes zufolge ist also

$$P_n = \frac{\frac{n}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \cdots + \frac{r}{r}} = \frac{2n}{r(r+1)} \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Zweites Beispiel. *Von zwei Urnen A und B enthält die erste p weisse und q schwarze, die zweite p' weisse und q'*

schwarze Kugeln. Aus einer der Urnen, unbekannt aus welcher, werden nach und nach $m+n$ Kugeln gezogen; m davon sind weiss, n schwarz. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln aus der Urne A, beziehungsweise aus jener B stammen?

Lösung. Nach der ersten Hypothese ist die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses

$$P = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{p^{m|-1}\,q^{n|-1}}{(p+q)^{m+n|-1}},$$

nach der zweiten Hypothese ist sie

$$P' = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{p'^{m|-1}\,q'^{n|-1}}{(p'+q')^{m+n|-1}}.$$

Daraus berechnet sich die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese:

$$\Pi = \frac{P}{P+P'} = \frac{\dfrac{p^{m|-1}\,q^{n|-1}}{(p+q)^{m+n|-1}}}{\dfrac{p^{m|-1}\,q^{n|-1}}{(p+q)^{m+n|-1}} + \dfrac{p'^{m|-1}\,q'^{n|-1}}{(p'+q')^{m+n|-1}}},$$

und in gleicher Weise die Wahrscheinlichkeit der zweiten Hypothese:

$$\Pi' = \frac{P'}{P+P'}.$$

Drittes Beispiel. *Eine Urne enthält weisse und schwarze Kugeln, im Ganzen r an der Zahl; bei einer vorgenommenen Ziehung kam eine weisse Kugel zum Vorschein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zweite Kugel, welche man zieht, weiss sein wird?*

Lösung. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die erstgezogene Kugel in die Urne zurückgelegt wurde oder nicht.

Erster Fall. Das beobachtete Ereigniss E ist das Ziehen einer weissen Kugel, das künftige Ereigniss F ebenfalls. Enthält die Urne n weisse Kugeln, so sind die Wahrscheinlichkeiten von E und F beziehungsweise

$$p_n = \frac{n}{r}, \qquad \varpi = \frac{n}{r};$$

demnach hat man

$$\Pi = \frac{p_1 \varpi_1 + p_2 \varpi_2 + \cdots + p_r \varpi_r}{p_1 + p_2 + \cdots + p_r} = \frac{\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + r^2}{r^2}}{\frac{1}{2}(r+1)}$$

$$= \frac{\frac{r(r+1)(2r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^2}}{\frac{1}{2}(r+1)} = \frac{2r+1}{3r} = \frac{2 + \frac{1}{r}}{3}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit convergirt in dem Masse gegen den Werth $\frac{2}{3}$, als r zunimmt. Setzt man letztere Zahl unendlich gross voraus und bezeichnet mit x die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer weissen Kugel, so kann diese alle zwischen 0 und 1 gelegenen Werthe annehmen. Man hat daher

$$\Pi = \frac{\int_0^1 x^2 \, dx}{\int_0^1 x \, dx} = \frac{2}{3}.$$

Zweiter Fall. Wurde die erstgezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt, so sind die Wahrscheinlichkeiten von E und F beziehungsweise

$$p_n = \frac{n}{r}, \qquad \varpi_n = \frac{n-1}{r-1};$$

daher wird jetzt

$$\Pi = \frac{\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots (r-1)r}{(r-1)r}}{\frac{1 + 2 + \cdots + r}{r}} = \frac{\frac{(r-1)r(r+1)1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (r-1)r}}{\frac{r+1}{2}} = \frac{2}{3};$$

die Wahrscheinlichkeit ist in diesem Falle von der Zahl der Kugeln in der Urne unabhängig.

Viertes Beispiel. *Die Zahl der in einer Urne enthaltenen Kugeln beträgt höchstens drei; in n Ziehungen, wobei die gezogene Kugel jedesmal in die Urne zurückgelegt wurde, sind x weisse Kugeln zum Vorschein gekommen. Es ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass die nächste Ziehung wieder eine weisse Kugel bringen werde.*

Lösung. Die Ereignisse E und F sind beide das Ziehen einer weissen Kugel; unter der Voraussetzung, dass x weder

Null noch n ist, können über ihre gemeinschaftliche Ursache nur drei Hypothesen aufgestellt werden:

1 weisse und 1 schwarze Kugel; Ursache c_1;
2 weisse und 1 schwarze Kugel; Ursache c_2;
1 weisse und 2 schwarze Kugeln; Ursache c_3.

Die aus diesen Ursachen gefolgerten Wahrscheinlichkeiten von E sind:

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \frac{1}{2^n};$$

$$p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^x}{3^n};$$

$$p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^{n-x}}{3^n}.$$

Die aus denselben Ursachen gefolgerten Wahrscheinlichkeiten von F sind:

$$\varpi_1 = \frac{1}{2};$$

$$\varpi_2 = \frac{2}{3};$$

$$\varpi_3 = \frac{1}{3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Ursache c_1 ist demnach

$$P_1 = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n} + \frac{2^x}{3^n} + \frac{2^{n-x}}{3^n}} = \frac{3^n}{3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}};$$

in gleicher Weise findet man die Wahrscheinlichkeiten für c_2 und c_3:

$$P_2 = \frac{2^{n+x}}{3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}}; \qquad P_3 = \frac{2^{2n-x}}{3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}};$$

damit ergibt sich schliesslich das gesuchte

$$\Pi = P_1\varpi_1 + P_2\varpi_2 + P_3\varpi_3 = \frac{\frac{1}{2}3^n + \frac{2}{3}2^{n+x} + \frac{1}{3}2^{2n-x}}{3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}}.$$

Fünftes Beispiel. *Eine Urne enthält eine unbegrenzte Anzahl weisser und schwarzer Kugeln; bei einer ausgeführten Ziehung wurde eine weisse Kugel getroffen; welche Wahrschein-*

lichkeit hat man, nachher n-mal nach einander eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn die gezogene jedesmal wieder zurückgelegt wird?

Bezeichnet x die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer weissen Kugel, so ist $1 - x$ die für das Ziehen einer schwarzen Kugel, und man findet das gesuchte

$$\Pi = \frac{\int_0^1 x(1-x)^n dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Sechstes Beispiel. *Zwei Spieler A und B, deren Wahrscheinlichkeiten für das Gewinnen einer Partie unbekannt sind, spielen unter der Bedingung, dass demjenigen von beiden, welcher zuerst n Partien gewonnen haben wird, der Einsatz a zufällt. Sie sind bemüssigt, das Spiel zu einem Zeitpunkt aufzugeben, wo dem A noch b Partien, dem B noch c Partien zum Gewinnen fehlen. Wie soll der Einsatz unter die Spieler vertheilt werden?*

Lösung. Es bezeichne x die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen einer Partie bei A, $1 - x$ die analoge Wahrscheinlichkeit bei B; x kann, nachdem es völlig unbekannt ist, alle Werthe zwischen 0 und 1 annehmen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass von $2n - b - c$ abgeführten Partien $n - b$ von A und $n - c$ von B gewonnen werden, ist

$$P = Gx^{n-b}(1-x)^{n-c},$$

und die Wahrscheinlichkeit eines Werthes x der Ursache, dieses beobachteten Erfolges ist (Nr. 70)

$$\Pi = \frac{x^{n-b}(1-x)^{n-c}dx}{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}dx}.$$

Die Summe S, welche B nach dieser Hypothese $x = x$ zu erhalten hätte, kommt gleich dem Producte aus a und der Wahrscheinlichkeit, welche B für das Gewinnen des Spieles besitzt; letztere wurde in Nr. 30 berechnet; man hat hiernach:

$$\left.\begin{aligned}S=a(1-x)^{b+c-1}\Big\{1+\frac{x}{1-x}(b+c-1)+\frac{x^2}{(1-x)^2}\frac{(b+c-1)(b+c-2)}{1\cdot 2}+\cdots\\+\frac{x^{b-1}}{(1-x)^{b-1}}\frac{(b+c-1)\cdots(c+1)}{1\cdot 2\cdots(b-1)}\Big\}.\end{aligned}\right\}\text{(a)}$$

Die auf Grund aller Hypothesen dem B gebührende Summe ist demnach

$$S'=\int_0^1 \Pi s$$

$$=\frac{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx\,\{(a)\}}{\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx}.$$

Durch Ausführung der in diesem Ausdrucke angezeigten Integrationen mit Hilfe der Formel

$$\int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{n-c}\,dx=\frac{1\cdot 2\cdots(n-c)}{(n-b+1)\cdots(2n-b-c+1)}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}S'=a\,\frac{(n-c+1)\cdots(n+b-1)}{(2n-b-c+2)\cdots 2n}\Big\{1+\frac{b+c-1}{1}\cdot\frac{n-b+1}{n+b-1}\\+\frac{(b+c-1)(b+c-2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n-b+1)(n-b+2)}{(n+b-1)(n+b-2)}+\cdots\\+\frac{(b+c-1)\cdots(c+1)}{1\cdot 2\cdots(b-1)}\cdot\frac{(n-b+1)\cdots(n-1)}{(n+b-1)\cdots(n+1)}\Big\}.\end{aligned}$$

Den Rest, nämlich $a-S'$, erhält A.

2. Probleme über das Verhältniss der männlichen und weiblichen Geburten.

76. **Erstes Problem.** *Es sei beobachtet worden, dass von einer sehr grossen Anzahl $p+q$ von Geburtsfällen p auf Knaben- und q auf Mädchengeburten entfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P sind unter $m+n$ künftigen Geburten m Knaben und n Mädchen zu erwarten?*

Lösung. Bezeichnet x die unbekannte Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, folglich $1-x$ die einer Mädchengeburt, so gilt für die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolges: unter $p+q$ Geburten p Knaben und q Mädchen — der Ausdruck

$$\varpi = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,x^p\,(1-x)^q;$$

der erwartete künftige Erfolg: unter $m+n$ Geburten m Knaben und n Mädchen — hat mit Zugrundelegung derselben Ursache die Wahrscheinlichkeit

$$\varpi' = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,x^m\,(1-x)^n.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$P = \frac{\int_0^1 \varpi\varpi'\,dx}{\int_1^1 \varpi\,dx} = k\,\frac{\int_0^1 x^{p+m}\,(1-x)^{q+n}\,dx}{\int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx},$$

$$k = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

Nun ist

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{1\cdot2\cdots p\cdot1\cdot2\cdots q}{1\cdot2\cdots p(p+1)\cdots(p+q+1)}$$

$$= \frac{1\cdot2\cdots q}{(p+1)\,(p+2)\cdots(p+q+1)},$$

ferner, nach Anwendung derselben Reduction:

$$\int_0^1 x^{p+m}\,(1-x)^{q+n}\,dx = \frac{1\cdot2\cdots(q+n)}{(p+m+1)\cdots(p+q+m+n+1)},$$

daher

$$P = k\,\frac{(q+1)\cdots(q+n)\cdot(p+1)\cdots(p+m)}{(p+q+2)\cdots(p+q+m+n+1)};$$

eine weitere Vereinfachung erfährt dieser Ausdruck, wenn man mit Rücksickt darauf, dass p und q sehr gross sind, von den Näherungsformeln*) Gebrauch macht:

$$(q+1)\cdots(q+n) = \frac{1\cdot2\cdots(q+n)}{1\cdot2\cdots q} = \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}}\,e^{-n},$$

$$(p+1)\cdots(p+m) = \frac{(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}}\,e^{-m},$$

$$(p+q+1)\cdots(p+q+m+n) = \frac{(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}}\,e^{-(m+n)}$$

*) Siehe Note I. am Ende des Buches.

und wenn ferner

$$\frac{p+q+1}{p+q+m+n+1} = \frac{p+q}{p+q+m+n}$$

gesetzt wird; auf diese Weise erhält man

$$P = k \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} (p+m)^{p+m+\frac{1}{2}} (p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}} p^{p+\frac{1}{2}} (p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}}} \quad . \; . \; \text{(a)}$$

Anmerkung. Sind p und q sehr gross, erstreckt sich also die Beobachtung auf eine grosse Menge von Geburten, so ist der wahre Werth der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt sehr nahe $\frac{p}{p+q}$, der einer Mädchengeburt sehr nahe $\frac{q}{p+q}$.

Vorausgesetzt, dass μ und s nur klein sind im Vergleich zu p, so hat man:

$$l \cdot (p+\mu)^{p+s} = (p+s)\, l \cdot (p+\mu) = (p+s)\left\{l \cdot p + l \cdot \left(1 + \frac{\mu}{p}\right)\right\}$$

$$= (p+s)\left\{l \cdot p + \frac{\mu}{p} - \frac{\mu^2}{2p^2} + \cdots\right\}$$

$$= (p+s)\, l \cdot p + (p+s)\frac{\mu}{p} + \cdots = (p+s)\, l \cdot p + \mu + \cdots,$$

woraus, bei Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{1}{p}$ angefangen,

$$(p+\mu)^{p+s} = p^{p+s} e^{\mu}$$

folgt. Können daher m und n neben p und q für klein angesehen werden, so ist es erlaubt zu setzen:

$$(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} = e^n q^{q+n+\frac{1}{2}},$$

$$(p+m)^{p+m+\frac{1}{2}} = e^m p^{p+m+\frac{1}{2}},$$

$$(p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}} = e^{m+n} (p+q)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}},$$

und die Formel (a) übergeht durch Substitution dieser Werthe in

$$P = \frac{(m+n)!}{m!\, n!} \frac{p^m q^n}{(p+q)^{m+n}}.$$

Dies ist aber genau jener Ausdruck, welcher sich für die Wahrscheinlichkeit des erwarteten Erfolgs ergeben würde, wenn $\frac{p}{p+q}$ die Wahrscheinlichkeit einer Knaben- und $\frac{q}{p+q}$ die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt wäre.

Es ist daher natürlich zu schliessen, dass die Wahrscheinlichkeiten dieser einfachen Ereignisse annähernd im Verhältnisse p zu q zu einander stehen, wenn p und q grosse Zahlen sind, dass also die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt näherungsweise gleich ist $\frac{p}{p+q}$.

77. **Zweites Problem.** *Man habe beobachtet, dass unter einer sehr grossen Anzahl $p+q$ von Geburten die Zahl p der Knaben grösser ist als die Zahl q der Mädchen. Auf Grund dieser Beobachtung ist die Wahrscheinlichkeit Q zu ermitteln, dass die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt grösser ist als die einer Mädchengeburt.*

Lösung. Wie vorhin sollen mit x und $1-x$ die unbekannten Wahrscheinlichkeiten einer Knaben- und Mädchengeburt bezeichnet werden. Die Wahrscheinlichkeit des beobachteten zusammengesetzten Ereignisses ist dann

$$\frac{1.2\cdots(p+q)}{1\cdot 2\cdots p\cdot 1.2\cdots q}x^p(1-x)^q = cy,$$

wenn zur Abkürzung

$$c = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}, \qquad y = x^p(1-x)^q$$

gesetzt wird. Die Wahrscheinlichkeit eines besonderen Werthes von x in Folge dieses Ereignisses ist

$$\frac{cy\,dx}{\int_0^1 cy\,dx} = \frac{y\,dx}{\int_0^1 y\,dx},$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass der Werth von x den Bruch $\frac{1}{2}$ nicht überschreitet, hat zum Ausdruck

$$P = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx}.$$

Daher ist endlich die fragliche Wahrscheinlichkeit eines über $\frac{1}{2}$ liegenden Werthes von x

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} = 1 - \frac{Z}{N}.$$

78. **Berechnung** von $Z = \int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx$, worin

$$y = x^p (1 - x)^q.$$

Bezeichnen y_0 und $y_{\frac{1}{2}}$ die Werthe von y für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$, so ist

$$y_0 = 0, \qquad y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{p+q}};$$

wird ferner $y = y_0 e^{-t}$ gesetzt, so entsprechen den Grenzen $\{_0^1$ von x jene $\{_0^\infty$ von t; nimmt man dagegen $y = y_{\frac{1}{2}} e^{-t}$, so entsprechen den Grenzen $\{_{\frac{1}{2}}^1$ von x jene $\{_0^\infty$ von t.

Zerlegt man Z:

$$Z = \int_0^1 y\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 y\,dx,$$

und führt in dem ersten Integral die erste, im andern die zweite der obigen Substitutionen durch, so wird

$$1) \qquad \int_0^1 y\,dx = y_0 \int_0^\infty e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt,$$

$$2) \qquad \int_{\frac{1}{2}}^1 y\,dx = y_{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt.$$

Zunächst handelt es sich um die Ausdrücke, welche in diesen beiden Integralen für $\frac{dx}{dt}$ einzutreten haben.

Nachdem x eine Function von t ist, entwickeln wir letztere nach der Mac-Laurin'schen Reihe und erhalten:

$$x = f(t) = f(0) + f'(0)\,t + f''(0)\,\frac{t^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$
$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

Für den Fall 1) ist

$$t = l \cdot \frac{y_0}{y}, \quad dt = -\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{y\frac{dx}{dy}} = \frac{dx}{v},$$

wenn man

$$v = -y\frac{dx}{dy}$$

setzt; daraus berechnet sich

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{d^2x}{d^2t} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{v\,dv}{dx},$$

folglich hat man für diesen Fall

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_{x=0}; \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{v\,dv}{dx}\right)_{x=0}.$$

Für den andern Fall 2), wo $y = y_{\frac{1}{2}}e^{-t}$ genommen wurde, ergibt sich nach übereinstimmender Rechnung

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = v_{x=\frac{1}{2}}; \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{v\,dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}}.$$

Demnach ist:

1) $$x = v_0 t + \left(\frac{v\,dv}{dx}\right)_0 \frac{t^2}{1\cdot 2} + \cdots,$$

2) $$x = v_{\frac{1}{2}} t + \left(\frac{v\,dv}{dx}\right)_{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1\cdot 2} + \cdots,$$

woraus

1) $$\frac{dx}{dt} = v_0 + \left(\frac{v\,dv}{dx}\right)_0 t + \cdots = v_0\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} t + \cdots\right\},$$

2) $$\frac{dx}{dt} = v_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{v\,dv}{dx}\right)_{\frac{1}{2}} t + \cdots = v_{\frac{1}{2}}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} t + \cdots\right\}$$

abgeleitet wird.

Durch Einsetzung dieser Werthe in die beiden Integrale 1) und 2) ergibt sich

$$\int_0^1 y\,dx = v_0 y_0\left\{\int_0^\infty e^{-t}\,dt + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0}\int_0^\infty te^{-t}\,dt + \cdots\right\}$$

$$= v_0 y_0\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} + \cdots\right\},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 y\,dx = v_{\frac{1}{2}} y_{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty e^{-t}\,dt + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}}\int_0^\infty te^{-t}\,dt + \cdots\right\}$$

$$= v_{\frac{1}{2}} y_{\frac{1}{2}}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} + \cdots\right\},$$

weil die in den Klammern eingeschlossenen Integrale den Werth 1 haben; folglich ist

$$Z = v_0 y_0 \left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} + \cdots\right\} - v_{\frac{1}{2}} y_{\frac{1}{2}} \left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} + \cdots\right\}.$$

Zur endgiltigen Berechnung von Z müssen noch die besondern, darin vorkommenden Werthe von v und $\frac{dv}{dx}$ ermittelt werden.

Aus $y = x^p (1-x)^q$ folgt

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1} (1-x)^{q-1} [p - (p+q) x],$$

und damit ergibt sich:

$$v = -\frac{y\,dx}{dy} = -\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x},$$

$$v_0 = 0; \quad v_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2(p-q)};$$

ferner

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(2x-1)[p-(p+q)x] + (p+q)x(x-1)}{[p-(p+q)x]^2},$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{p}; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{\frac{1}{2}} = -\frac{p+q}{(p-q)^2}.$$

Durch Einführung dieser Werthe in den Ausdruck für Z ergibt sich endlich

$$Z = \frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)} \left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right\}.$$

79. **Berechnung** von $N = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx$.

Der Werth dieses Integrals ist bekanntlich

$$\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)};$$

doch eignet sich dieser Ausdruck wegen der grossen Zahl seiner Factoren zur wirklichen Berechnung nicht. Wir wollen daher für das Integral einen Näherungswerth, und zwar nach dem Vorgange von Laplace, entwickeln.

Es sei a der dem Maximum von y entsprechende Werth von x; man findet ihn aus der Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = 0,$$

welche für den vorliegenden Fall

$$p(1-a) - qa = 0$$

lautet und

$$a = \frac{p}{p+q}$$

ergibt; das erwähnte Maximum ist also

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q.$$

Wird nun

$$y = y_a e^{-t^2}$$

gesetzt, so entsprechen den Werthen 0, a, 1 von x die Werthe $-\infty$, 0, ∞ von t, so dass

$$N = \int_0^1 y\,dx = y_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dx}{dt}\,dt.$$

Nun ergibt sich für $y = f(x) = f(a + (x-a))$ nach dem Mac-Laurin'schen Satze der Ausdruck

$$y = y_a + (x-a)\left(\frac{dy}{dx}\right)_a + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a + \cdots$$

oder wegen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = 0$

$$y = y_a + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a + \cdots = y_a\left\{1 + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \frac{1}{y_a} + \cdots\right\};$$

hieraus folgt leicht

$$y - l\cdot y_a = -t^2 = l\cdot\left\{1 + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a \cdot \frac{1}{y_a} + \cdots\right\} = (x-a)^2\left\{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_a \frac{1}{2y_a} + \cdots\right\};$$

nachdem also der Ausdruck für t^2 mit dem Coefficienten $(x-a)^2$ behaftet ist oder für $x = a$ verschwindet, so ist man berechtigt, $t = \frac{x-a}{v}$ oder $x = a + vt$ zu setzen, wobei $v = \frac{x-a}{t} = \frac{x-a}{\sqrt{l\cdot y_a - l\cdot y}}$ eine Function von x ist. Entwickelt man mit Beachtung dieses Umstandes den eben angeschriebenen Ausdruck für x nach der Formel von Lagrange *), so wird

*) Siehe Note II. am Ende des Bandes.

$$x = a + v_{x=a}\, t + \left(\frac{d \cdot v^2}{d x}\right)_{x=a} \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^2 \cdot v^3}{d x^2}\right)_{x=a} \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

woraus

$$\frac{d x}{d t} = v_a + \left(\frac{d \cdot v^2}{d x}\right)_a t + \left(\frac{d^2 \cdot v^3}{d x^2}\right)_a \frac{t^2}{1 \cdot 2} + \cdots.$$

Durch Einführung dieses Werthes in den Ausdruck für N nimmt letzterer folgende Gestalt an:

$$N = \int_0^1 y\, d x = y_a \left\{ v_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, d t + \left(\frac{d \cdot v^2}{d x}\right)_a \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2}\, d t \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2 \cdot v^3}{d x^2}\right)_a \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\, d t + \cdots \right\};$$

bekanntlich ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, d t = \sqrt{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\, d t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1} e^{-t^2}\, d t = 0;$$

macht man von diesen Beziehungen Gebrauch, so folgt weiter:

$$N = y_a \sqrt{\pi} \left\{ v_a + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 \cdot v^3}{2\, d x^2}\right)_a + \cdots \right\}.$$

Es handelt sich um die Bestimmung der in der Klammer vorkommenden, von v abhängigen Grössen. Zunächst ist

$$v = \frac{x - a}{t}$$

und

$$t = \sqrt{l \cdot y_a - l \cdot y}.$$

Einer früheren Entwickelung (S. 191) zufolge ist allgemein

$$t^2 = l \cdot y_a - l \cdot y = (x - a)^2 \{ A + B (x - a) + C (x - a)^2 + \cdots \};$$

durch successive Differentiation dieser Gleichung ergeben sich für die Coefficienten derselben die Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\left(- \frac{d^2 l \cdot y}{d x^2} \right)_{x=a} = A; \quad \left(- \frac{d^3 l \cdot y}{1 \cdot 2 \cdot 3\, d x^3} \right)_{x=a} = B;$$

$$\left(- \frac{d^4 l \cdot y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, d x^4} \right)_{x=a} = C; \text{ u. s. w.};$$

ferner wird

$$v = \frac{x - a}{t} = \frac{1}{\{ A + B (x - a) + \cdots \}^{\frac{1}{2}}},$$

woraus

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l\cdot y}{d x^2}\right)_a}}$$

gefunden wird. Nun ist

$$l\cdot y = p\, l\cdot x + q\, l\cdot(1-x),$$

also

$$-\frac{d^2 l\cdot y}{d x^2} = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{(1-x)^2},$$

und indem man $x = a = \frac{p}{p+q}$ nimmt, wird

$$-\left(\frac{d^2 l\cdot y}{d x^2}\right)_a = \frac{(p+q)^3}{p q},$$

daher

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^3}}.$$

Es bleibt noch $\left(\frac{d^2\cdot v^3}{d x^2}\right)_a$ zu bestimmen; aus einer früheren Gleichung folgt

$$v^3 = \{A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \cdots\}^{-\frac{3}{2}}$$
$$= A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots$$

und daraus berechnet sich

$$\frac{d^2\cdot v^3}{d x^2} = 2A_2 + (x-a)\{\cdots\},$$
$$\left(\frac{d^2\cdot v^3}{d x^2}\right)_a = 2A_2,$$

so dass nur die Bestimmung von A_2 erforderlich ist. A_2 ist der Coefficient von $(x-a)^2$ in der Entwickelung von v^3 und diese lautet:

$$\{A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \cdots\}^{-\frac{3}{2}}$$
$$= A^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} A^{-\frac{5}{2}} B(x-a)$$
$$+ \left[-\frac{3}{2} A^{-\frac{5}{2}} C + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} A^{-\frac{7}{2}} B^2\right](x-a)^2 + \cdots;$$

demnach ist

$$A_2 = -\frac{3}{2} A^{-\frac{5}{2}} C + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} A^{-\frac{7}{2}} B^2 = -\frac{3}{2}\frac{C}{A^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\frac{B^2}{A^{\frac{7}{2}}}.$$

Früher wurde bereits $A = \frac{(p+q)^3}{2pq}$ gefunden; in ähnlicher Weise ergibt sich

$$B = -\left(\frac{d^3 l\cdot y}{1\cdot 2\cdot 3\, d x^3}\right)_a = \left\{-\frac{p}{3x^3} + \frac{q}{3(1-x)^3}\right\}_a = \frac{(p+q)^4(p-q)}{3p^2q^2},$$

$$C = -\left(\frac{d^4 l \cdot y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, d x^4}\right) = \left\{\frac{p}{4 x^4} + \frac{q}{4(1-x)^4}\right\}_a$$
$$= \frac{(p+q)^5 (p^2 - p q + q^2)}{4 p^3 q^3}.$$

Führt man diese Ausdrücke in A_2 ein, so findet sich nach einigen Reductionen

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 \cdot v^3}{d x^2}\right)_a = \frac{\sqrt{2}\,(p^2 - 11 p q + q^2)}{6 p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} (p+q)^{\frac{5}{2}}}.$$

Dieser Werth, sowie jene

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q, \quad v_a = \frac{\sqrt{2 p q}}{\sqrt{(p+q)^3}}$$

in den für N gefundenen Ausdruck eingesetzt, ergeben

$$N = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, d x = \frac{p^{p+\frac{1}{2}} q^{q+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{(p+q)^2 - 13 p q}{12 p q (p+q)}\right\}.$$

80. Substituirt man die in Nr. 78 und Nr. 79 für Z und N gefundenen Werthe in den Ausdruck $Q = 1 - \frac{Z}{N}$, so erhält man

$$Q = 1 - \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{2^{p+q+\frac{3}{2}} p^{p+\frac{1}{2}} q^{q+\frac{1}{2}} (p-q)\sqrt{\pi}} \left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2}\right\}$$
$$\times \left\{1 + \frac{(p+q)^2 - 13 p q}{12 p q (p+q)}\right\}^{-1},$$

oder näherungsweise, da p und q sehr gross sind:

$$Q = 1 - \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{2^{p+q+\frac{3}{2}} p^{p+\frac{1}{2}} q^{q+\frac{1}{2}} (p-q)\sqrt{\pi}}$$
$$\times \left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - 13 p q}{12 p q (p+q)}\right\}.$$

Zum Zwecke der numerischen Berechnung schreiben wir diesen Ausdruck in der Form

$$Q = 1 - \frac{1}{\mu}\left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - 13 p q}{12 p q (p+q)}\right\},$$

wobei

$$\frac{1}{\mu} = \frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2(p-q)\sqrt{2 p q \pi}} \cdot \frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p q^q}$$

gesetzt wurde; daraus folgt, wenn man beiderseits Brigg's Logarithmen nimmt,

$$\log\frac{1}{\mu}=\log\frac{(p+q)^{\frac{3}{2}}}{2(p-q)\sqrt{2pq\pi}}+0{\cdot}43429448\,l\cdot\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p\,q^q};$$

der natürliche Logarithmus rechter Hand lässt sich, da $\frac{p-q}{p+q}$ ein sehr kleiner Bruch ist, in eine rasch convergirende Reihe umwandeln; man hat nämlich

$$l\cdot\frac{\left(\frac{p+q}{2}\right)^{p+q}}{p^p\,q^q}=l\cdot\left\{\left(\frac{2p}{p+q}\right)^{-p}\left(\frac{2q}{p+q}\right)^{-q}\right\}=l\cdot\left\{\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)^{-p}\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right)^{-q}\right\}$$

$$=-p\,l\cdot\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)-q\,l\cdot\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right)$$

$$=-p\left(\frac{p-q}{p+q}-\frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3-\cdots\right)$$

$$-q\left(-\frac{p-q}{p+q}-\frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3-\cdots\right)$$

$$=-(p+q)\left\{\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2}{1\cdot2}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4}{3\cdot4}+\frac{\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6}{5\cdot6}+\cdots\right\}.$$

Beispiel. In Paris sind innerhalb eines Zeitraumes von 40 Jahren, vom Beginn des Jahres 1745, wo man anfing, in den Geburtsregistern die Kinder nach dem Geschlechte zu unterscheiden, bis zum Ende des Jahres 1784

$$p=393\,386 \text{ Knaben und } q=377\,555 \text{ Mädchen}$$

geboren worden. Mit diesen Zahlen findet man

$$\log\mu=72{\cdot}2511780$$

und

$$Q=1-\frac{1}{\mu}\{1-0{\cdot}0030761+\cdots\};$$

mit Rücksicht auf den äusserst geringen Werth des zweiten Gliedes, da μ eine in den Ganzen mit 73 Ziffern geschriebene Zahl bedeutet, kann Q ohne weiteres mit 1 vertauscht werden. Aus den vorangeführten Beobachtungen geht also mit einer der Gewissheit sehr nahe stehenden Wahrscheinlichkeit hervor, dass eine constante Ursache existirt, welche Knabengeburten häufiger eintreten lässt als Mädchengeburten.

81. **Drittes Problem.** *An einem Orte A wurde eine grosse Anzahl $p+q$ von Geburten beobachtet; davon waren p männ-*

lich, q weiblich; hieraus wurde das Verhältniss r der Knabengeburten zu den Mädchengeburten abgeleitet. An einem andern Orte B ergaben sich in analoger Weise die Zahlen p', q', r'. Ist nun r' > r, so soll die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, dass eine Knabengeburt am Orte B wahrscheinlicher ist als in A.

Lösung. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Problems ist

$$P_n = \frac{y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (\alpha)$$

die Wahrscheinlichkeit eines besonderen Werthes von x, desjenigen nämlich, welcher der Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolges den Werth y verleiht. Insbesondere ist $a = \frac{p}{p+q}$ derjenige Werth von x, welcher y zum Maximum erhebt; wir setzen daher

$$x = \frac{p}{p+q} + \theta$$

und es entsprechen dann den Grenzen

$$t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{jene} \quad \theta = \begin{cases} \frac{q}{p+q} \\ -\frac{p}{p+q} \end{cases};$$

die Wahrscheinlichkeit eines Werthes von θ lautet

$$P_n = \frac{\left(\frac{p}{p+q} + \theta\right)^p \left(\frac{q}{p+q} - \theta\right)^q d\theta}{\int_0^1 y\,dx} = \frac{Z}{N}.$$

Berechnung von Z. Es ist

$$l \cdot \left(\frac{p}{p+q} + \theta\right)^p \left(\frac{p}{p+q} - \theta\right)^q = l \cdot \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} + pl \cdot \left(1 + \frac{p+q}{p}\theta\right)$$

$$+ ql \cdot \left(1 - \frac{p+q}{p}\theta\right) = l \cdot \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} + p\,\frac{p+q}{p}\theta - p\,\frac{(p+q)^2\theta^2}{2p^2} - q\,\frac{p+q}{q}$$

$$- q\,\frac{(p+q)^2\theta^2}{2q^2} = l \cdot \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} - \frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2,$$

wenn man mit der zweiten Potenz von θ schliesst; durch Uebergang zu den Zahlen ergibt sich

$$\left(\frac{p}{p+q} + \theta\right)^p \left(\frac{q}{p+q} - \theta\right)^q = \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}\, e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2}.$$

Berechnung von N. Der Werth des Integrals $\int_0^1 y\,dx$ wurde bereits in Nr. 79 ermittelt; nehmen wir denselben, jedoch mit Beschränkung auf das erste Glied, wieder auf, so wird

$$N = \int_0^1 y\,dx = \frac{p^p\, q^q \sqrt{\pi}}{(p+q)^{p+q}} \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{(p+q)^3}}.$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe in den Ausdruck für P_n übergeht dieser in

$$P_n = \frac{Z}{N} = \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(p+q)^3}{2pq}}\, e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Derselbe Weg führt zur Wahrscheinlichkeit eines Werthes θ' am Orte B, wenn wieder $x' = \frac{p'}{p'+q'} + \theta'$ gesetzt wird; man erhält

$$P'_n = \frac{d\theta'}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}}\, e^{-\frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2} \quad \ldots\ldots \quad (\beta')$$

Die Wahrscheinlichkeit der Coexistenz der Werthe θ und θ' ist daher

$$P_n P'_n = \frac{d\theta\, d\theta'}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}}\, e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\theta^2 - \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}\theta'^2}.$$

Setzt man jetzt

$$\frac{p'}{p'+q'} + \theta' = \frac{p}{p+q} + \theta + t,$$

woraus bei der Unabhängigkeit der Grössen θ und θ'

$$d\theta' = dt$$

folgt, so muss t positiv sein, soll der Bedingung $x' > x$ entsprochen werden. Der obige Ausdruck verwandelt sich durch diese Substitution in

$$P_n P'_n = \frac{d\theta \cdot dt}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pqp'q'}}\, e^{-(A\theta^2 + 2B(t-h)\theta + C(t-h)^2)};$$

darin ist zur Abkürzung

$$h = \frac{p'q - pq'}{(p+q)(p'+q')}; \qquad A = \frac{(p+q)^3}{2pq} + \frac{(p'+q')^3}{2p'q'};$$

$$B = \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}; \qquad C = \frac{(p'+q')^3}{2p'q'}.$$

Der Exponent kann leicht zu einem vollständigen Qua-

drate ergänzt werden; bedient man sich dabei der weiteren Abkürzung

$$k^2 = \frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{2p'q'(p+q)^3 + 2pq(p'+q')^3},$$

so wird nach einiger Reduction

$$P_n P_n' = \frac{d\theta \cdot dt}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{4pq p' q'}}\, e^{-A\left[\theta + \frac{2pq}{(p+q)^3} k^2 (t-h)\right]^2} e^{-k^2(t-h)^2}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck zunächst innerhalb der Grenzen

$$\theta = \begin{cases} \frac{q}{p+q} \\ -\frac{p}{p+q} \end{cases}$$

und hierauf in Bezug auf t innerhalb der Grenzen

$$t = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

— dies sind offenbar alle Werthe, welche t annehmen kann, während θ von $-\frac{p}{p+q}$ bis $\frac{q}{p+q}$, also x von 0 bis 1 sich ändert, — so ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dafür nämlich, dass die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt in B grösser ist als in A. Es ist also

$$P = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(p+q)^3 (p'+q')^3}{2pq \cdot 2p'q'}} \int_{-\frac{p}{p+q}}^{\frac{q}{p+q}} d\theta \int_0^1 dt\, e^{-A[\cdots]^2} e^{-k^2(t-h)^2}.$$

Nachdem jedoch $A\,[\cdots]^2$ sehr gering ausfällt für Werthe von θ, welche über die Integrationsgrenzen hinaus liegen, so können letztere unbeschadet der Genauigkeit bis $\pm\infty$ ausgedehnt werden; setzt man

$$\sqrt{A}\,(\theta + \cdots) = \tau,$$

so wird

$$d\theta = \frac{d\tau}{\sqrt{A}} = k \sqrt{\frac{2pq \cdot 2p'q'}{(p+q)^3 (p'+q')^3}}\, d\tau$$

und demnach

$$P = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \int_0^1 e^{-k^2(t-h)^2} dt$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-k^2(t-h)^2} dt.$$

Auch in diesem Integral kann die obere Grenze in ∞ umgewandelt werden, indem die unter demselben stehende Function bei hohen Werthen von p und q sehr rasch fällt, so dass

$$P = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-k^2(t-h)^2} dt;$$

nimmt man $k(t - h) = u$, so werden die neuen Grenzen $-hk$ und ∞, also

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-kh}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots - \int_{kh}^{\infty}\cdots\right\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{kh}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= 1 - \frac{e^{-k^2h^2}}{2\sqrt{\pi}\cdot kh}\left(1 - \frac{1}{2k^2h^2} + \frac{1\cdot 3}{4k^4h^4} - \cdots\right);$$

darin ist

$$\frac{1}{2k^2h^2} = \frac{p'q'(p+q)^3 + pq(p'+q')^3}{(p+q)(p'+q')(p'q-pq')^2}.$$

Beispiel. Die schon im vorigen Problem erwähnten Beobachtungen in Paris ergaben

$$p = 393386, \quad q = 377555; \quad r = \frac{p}{q} = \frac{25}{24};$$

dagegen fand man in London in dèm 95jährigen Zeitraume vom Beginn des Jahres 1664 bis Ende 1758

$$p' = 737629, \quad q' = 698958; \quad r' = \frac{p'}{q'} = \frac{19}{18},$$

also $r' > r$. Die zuletzt gefundene Formel liefert angenähert

$$P = 1 - \frac{1}{328269}$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine constante Ursache existirt, welche der Knabengeburt in London eine grössere Wahrscheinlichkeit verleiht als in Paris; man kann also auf das Vorhandensein einer solchen Ursache 328268 gegen 1 wetten.

Zusatz. Die Lösung des vorliegenden Problems findet auch Anwendung, wenn es sich um die Vergleichung zweier verschiedenen Kategorien von Geburtsfällen handelt, z. B. von ehelichen und unehelichen, von lebend- und todtgebornen Kindern u. s. w.

Erstes Beispiel. Die in dem zwölfjährigen Zeitraume von Beginn 1866 bis Ende 1877 in Oesterreich lebend gebornen ehelichen Kinder vertheilen sich wie folgt:

$$p = 4311076, \quad q = 4052193, \quad \text{daraus } \frac{p}{p+q} = 0{\cdot}51548;$$

die unehelichen Geburten derselben Art ergaben:

$$p' = 651303, \quad q' = 616621, \quad \text{daraus } \frac{p'}{p'+q'} = 0{\cdot}51368;$$

mithin ist $r = \frac{p}{q} > r' = \frac{p'}{q'}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass für diese Ungleichheit eine constante Ursache existirt, ist nach der Formel

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{kh}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

zu rechnen; darin ist im gegenwärtigen Falle

$$kh = \frac{(pq' - p'q)\sqrt{(p+q)(p'+q')}}{\sqrt{2\{p'q'(p+q)^3 + pq(p'+q')^3\}}} = 2{\cdot}6733.$$

Die weitere Rechnung kann mit Hilfe der Tafel I. geführt werden; es ist nämlich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du = 1,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{kh} e^{-u^2}\, du = 0{\cdot}9998435;$$

daraus folgt durch Subtraction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{kh}^{\infty} e^{-u^2}\, du = 0{\cdot}0001565,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{kh}^{\infty} e^{-u^2}\, du = 0{\cdot}0000782;$$

daher ist schliesslich

$$P = 0{\cdot}9999218 = 1 - \frac{1}{12781}.$$

Man kann also nahe 12780 gegen 1 wetten, dass die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt unter den lebend gebornen ehelichen Kindern grösser ist als bei den unehelichen.

Zweites Beispiel. Die aus demselben Zeitraume stammenden Lebendgebornen (ehelich und unehelich) betrugen:

$$p = 4962379, \quad q = 4668814, \quad \text{daraus } \frac{p}{p+q} = 0{\cdot}51524;$$

die Todtgeborenen (ehelich und unehelich) vertheilten sich in folgender Weise:

$$p' = 127449, \; q' = 97308, \; \text{daraus } \frac{p'}{p'+q'} = 0{\cdot}56705.$$

Es ist also $r' = \frac{p'}{q'} > r = \frac{p}{q}$; die Wahrscheinlichkeit, dass diese Ungleichheit aus der Wirkung einer constanten Ursache entsprungen ist, wird abermals nach der Formel

$$P = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{kh}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

zu rechnen sein. Nun findet man nach Einführung der Zahlenwerthe

$$kh = \frac{(p'q - pq')\sqrt{(p+q)(p'+q')}}{\sqrt{2\{p'q'(p+q)^3 + pq(p'+q')^3}} > 34;$$

für diesen Werth der untern Grenze weicht aber das obige Integral von der Null überaus wenig ab, P ist von der Einheit unmerklich verschieden.

Mit einer hart an die Gewissheit streifenden Wahrscheinlichkeit kann also auf Grund des vorliegenden Beobachtungsmateriales geschlossen werden, dass die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt unter den Todtgebornen grösser ist als unter den Lebendgebornen.

82. **Viertes Problem.** *Die Wahrscheinlichkeit P zu bestimmen, dass die Wahrscheinlichkeit x einer Knabengeburt zwischen den Grenzen $\frac{p}{p+q} \pm v_a z$ enthalten ist; z bedeutet einen kleinen Zahlenwerth.*

Lösung. Bezeichnet man die Grenzen, zwischen welchen man x erwartet, kurz mit α und β, so ist die fragliche Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\int_\alpha^\beta y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} = \frac{Z}{N},$$

wobei $y = x^p(1-x)^q$.

Berechnung von N. Auf dem in Nr. 79 eingeschlagenen Wege findet man für den Nenner den Näherungswerth

$$N = \int_0^1 y\,dx = y_a v_a \sqrt{\pi},$$

wenn man Potenzen von

$$\frac{1}{p+q} \text{ und } v_a = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l \cdot y}{dx^2}\right)_a}} = \sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}}$$

in Anbetracht der grossen Werthe von p und q ausser Acht lässt.

Berechnung von Z. Wird $x = a + v_a\theta$ gesetzt, so entsprechen den Grenzen $x = \begin{cases}\beta\\ \alpha\end{cases}$ offenbar jene

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\beta - a}{v_a} \\ \dfrac{\alpha - a}{v_a} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{a + v_a\varepsilon + a}{v_a} \\ \dfrac{a - v_a\varepsilon - a}{v_a} \end{cases} = \begin{cases} +\varepsilon \\ -\varepsilon \end{cases};$$

nimmt man ferner den in Nr. 79 für x entwickelten Werth

$$x = a + v_a t + \frac{1}{2}\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_a t^2 + \cdots$$

wieder auf und vergleicht ihn mit dem obigen

$$x = a + v_a\theta,$$

so ergeben sich zwischen den Variablen t und θ die näherungsweisen Beziehungen:

$$\theta = t + \frac{1}{v_a}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_a t^2,$$

$$t = \theta - \frac{1}{v_a}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_a \theta^2, \quad dt = d\theta,$$

$$t^2 = \theta^2 - \frac{1}{v_a}\cdot\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_a \theta^3,$$

durch welche

$$Z = \int_\alpha^\beta y\,dx = y_a\,v_a \int_{-z}^{z} e^{-\theta^2 + \frac{1}{v_a}\left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_a \theta^3}\,d\theta$$

$$= y_a\,v_a \int_{-z}^{z} e^{-\theta^2}\left[1 + \frac{1}{v_a}\left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_a \theta^3\right] d\theta \,.\,.\,.\,.\,.\quad (\alpha)$$

$$= 2\,y_a\,v_a \int_0^z e^{-\theta^2}\,d\theta$$

wird. Setzt man die für Z und N gefundenen Werthe in den Ausdruck für P ein, so folgt

$$P = \frac{Z}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\theta^2}\,d\theta.$$

Beispiel nach Poisson. Während der zehn Jahre 1817 bis 1826 sind in Frankreich $9656135 = p + q$ Kinder geboren worden, davon waren $4981566 = p$ Knaben. Es ist demnach mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\theta^2}\,d\theta$$

zu erwarten, dass x zwischen den Grenzen $0{\cdot}5159 \pm 0{\cdot}00023\,z$ enthalten ist; nimmt man $z = 3$, so findet man (s. Tafel I. am Ende des Werkes)

$P = 0{\cdot}999978$ als Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen $0{\cdot}5159 \pm 0{\cdot}0007$

enthalten ist.

Würde man mit dem Ausdruck (α) weiter rechnen, so würde sich

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\theta^2}\left(1 + \frac{1}{v_a}\left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_a \theta^3\right) d\theta \,.\,.\,.\,.\,.\quad (\beta)$$

ergeben. In Nr. 79 wurde für v der Ausdruck

$$v = \frac{1}{\{A + B(x-a) + \cdots\}^{\frac{1}{2}}}$$

gefunden; daher ist

$$v^2 = \frac{1}{A + B(x-a) + \cdots}$$

und

$$\frac{d\cdot v^2}{dx} = -\frac{B+(x-a)[\cdots]}{\{A+B(x-a)+\cdots\}^2},$$

folglich

$$\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_a = -\frac{B}{A^2};$$

da nun $v_a = \frac{1}{\sqrt{A}}$, so hat man schliesslich

$$\frac{1}{v_a}\cdot\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_a = -\frac{B}{A^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn noch für A und B die in Nr. 79 berechneten Werthe eingesetzt werden:

$$\frac{1}{v_a}\cdot\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_a = -\frac{4(p-q)}{3\sqrt{2pq(p+q)}}.$$

Mit diesem Werthe übergeht die Formel (β) in

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-s}^{s} e^{-\theta^2}\left(1 - \frac{4(p-q)}{3\sqrt{2pq(p+q)}}\,\theta^3\right)d\theta \ldots \quad (\beta')$$

Auf die Zahlen des vorliegenden Beispiels angewendet, erhält man

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-s}^{s} e^{-\theta^2}(1 - 0{\cdot}00002\,\theta^3)\,d\theta.$$

83. **Fünftes Problem.** *θ, also die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt als gewiss vorausgesetzt, soll die Wahrscheinlichkeit Π ermittelt werden, dass unter n Geburten nicht mehr als u Knaben zur Welt kommen. (Vergl. Nr. 81.)*

Lösung. Wie in den vorigen Aufgaben, werde mit x die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, mit $1 - x$ jene einer Mädchengeburt bezeichnet.

Das Ereigniss E, um das es sich hier handelt, kann offenbar auf folgende Arten zu Stande kommen:

1) In den $n - u$ ersten Geburten kommen nur Mädchen zur Welt, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$(1-x)^{n-u}.$$

2) Unter den $n - u + 1$ ersten Geburten sind $n - u$ Mädchen und 1 Knabe, dieser jedoch nicht als letztgeborner, weil sonst die $n - u$ Mädchen schon auf die $n - u$ ersten Geburten entfallen würden wie in 1); die Wahrscheinlichkeit

dieser Combination, da der eine Knabe jeden der $n-u$ ersten Plätze einnehmen kann, ist

$$(n-u)(1-x)^{n-u}x.$$

3) Die $n-u+2$ ersten Geburten vertheilen sich auf $n-u$ Mädchen und 2 Knaben, ohne dass das Letztgeborne ein Knabe wäre, weil sonst der Fall 2) eintreten würde; die Wahrscheinlichkeit dieser Combination ist, da die 2 Knaben jeden der $n-u+1$ ersten Plätze einnehmen können,

$$\binom{n-u+1}{2}(1-x)^{n-u}x^2.$$

Allgemein:

$\overline{k+1.)}$ Die $n-u+k$ ersten Geburten vertheilen sich auf $n-u$ Mädchen und k Knaben, ohne dass das Letztgeborne ein Knabe wäre, weil sonst der Fall k) eintreten würde; da also die k Knaben jeden der $n-u+k-1$ Plätze einnehmen können, so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Combination

$$\binom{n-u+k-1}{k}(1-x)^{n-u}x^k.$$

Endlich:

$\overline{u+1.)}$ Die $n-u+u$ Geburten vertheilen sich auf $n-u$ Mädchen und u Knaben, das Letztgeborne ist ein Mädchen; die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$\binom{n-1}{u}(1-x)^{n-u}x^u.$$

Es leuchtet wohl ein, dass diese Fälle die Möglichkeit von mehr als u Knabengeburten ausschliessen. Demnach ist

$$\Pi=\sum_0^u{}_k\binom{n-u+k-1}{k}(1-x)^{n-u}x^k$$

$$=q^{n-u}\left\{1+(n-u)p+\binom{n-u+1}{2}p^2+\cdots+\binom{n-1}{u}p^u\right\},(A)$$

wenn man $1-x=q$ und $x=p$ setzt.

Die rechte Seite dieser Gleichung kann in ein bestimmtes Integral umgewandelt werden. Durch fortgesetzte Anwendung der theilweisen Integration auf das folgende Integral erhält man zunächst allgemein

$$\int \frac{y^u\,dy}{(1+y)^{n+1}} = \frac{1}{n}\left\{-\frac{y^u}{(1+y)^n} - \frac{u}{n-1}\frac{y^{u-1}}{(1+y)^{n-1}} - \frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}\frac{y^{u-2}}{(1+y)^{n-2}} - \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{u(u-1)\cdots(u-l+1)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-l+1)}\int \frac{y^{u-l}\,dy}{(1+y)^{n-l+1}}\right\},$$

und für $l = u$:

$$n\int \frac{y^u\,dy}{(1+y)^{n+1}} = c - \frac{y^u}{(1+y)^n} - \frac{u}{n-1}\frac{y^{u-1}}{(1+y)^{n-1}} - \frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}\frac{y^{u-2}}{(1+y)^{n-2}} - \cdots$$

$$- \frac{u(u-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots(n-u)}\frac{1}{(1+y)^{n-u}}.$$

Daraus ergibt sich, da wegen $u < n$ für $y = \infty$ sämmtliche Glieder der rechten Seite verschwinden und $p + q = 1$ ist:

$$n\int_{\frac{p}{q}}^{\infty} \frac{y^u\,dy}{(1+y)^{n+1}} = q^{n-u}\left\{p^u + \frac{u}{n-1}p^{u-1} + \frac{u(u-1)}{(n-1)(n-2)}p^{u-2} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{u(u-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots(n-u)}\right\},$$

ferner

$$n\int_0^{\infty} \frac{y^u\,dy}{(1+y)^{n+1}} = \frac{u(u-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots(n-u)}.$$

Dividirt man diese beiden Ausdrücke, so ergibt sich rechts

$$q^{n-u}\left\{1 + (n-u)p + \binom{n-u+1}{2}p^2 + \cdots + \binom{n-1}{u}p^u\right\},$$

also der vorhin für Π gefundene Werth. Demnach kann jetzt Π in der Form geschrieben werden:

$$\Pi = \frac{\displaystyle\int_{\frac{p}{q}}^{\infty} \frac{y^u\,dy}{(1+y)^{n+1}}}{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{y^u\,dy}{(1+y)^{n+1}}} = \frac{Z}{N}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{y^u}{(1+y)^{n+1}} = Y$, so wird

$$Z = \int_{\frac{p}{q}}^{\infty} Y dy, \qquad N = \int_0^{\infty} Y dy.$$

84. *Berechnung von N.* Zur näherungsweisen Auswerthung dieses Integrals schlagen wir einen ähnlichen Weg ein wie in Nr. 79. Es bezeichne nämlich a denjenigen Werth von y, welcher die Function Y zum Maximum erhebt; derselbe findet sich aus der Gleichung $\frac{dY}{dy} = 0$ und ist

$$a = \frac{u}{n+1-u};$$

mithin hat man

$$Y_a = \frac{u^u (n+1-u)^{n+1-u}}{(n+1)^{n+1}}.$$

Wird nun $Y = Y_a e^{-t^2}$ gesetzt, so entsprechen den Werthen $y = \begin{cases} \infty \\ a \\ 0 \end{cases}$ die Werthe $t = \begin{cases} \infty \\ 0, \\ -\infty \end{cases}$ so dass

$$\int_0^{\infty} Y dy = Y_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \frac{dy}{dt}.$$

Bei der für die Berechnung von $\frac{dy}{dt}$ nöthigen Reihenentwickelung von t ist zu beachten, dass, nachdem t für $y = a$ Null wird, diese Entwickelung den Factor $y - a = y'$ enthalten muss; daher ist

$$t^2 = y'^2 (A + By' + Cy'^2 + \cdots) = l \cdot Y_a - l \cdot Y$$

zu setzen. Hieraus findet sich durch fortgesetzte Differentiation

$$A = -\frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 l \cdot Y}{dy^2}\right)_{y=a}, \quad B = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{d^3 l \cdot Y}{dy^3}\right)_{y=a}, \cdots;$$

die Einführung dieser Werthe in den obigen Ausdruck für t^2 liefert die Gleichung

$$t^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l \cdot Y}{dy^2}\right)_{y=a} y'^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 l \cdot Y}{dy^3}\right)_{y=a} y'^3 + \cdots = 0.$$

Nachdem y' Null wird für $t = 0$, so kann

$$y' = a' t + a'' t^2 + \cdots$$

gesetzt werden; damit übergeht die vorausgehende Gleichung in

$$t^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l \cdot Y}{d y^2}\right)_a a'^2\right]$$

$$+ t^3 \left[\left(\frac{d^2 l \cdot Y}{d y^2}\right)_a a' a'' + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 l \cdot Y}{d y^3}\right)_a a'^3\right] + \cdots = 0;$$

die Coefficienten der Potenzen von t einzeln gleich Null gesetzt, wie es diese Gleichung erfordert, erhält man

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l \cdot Y}{d y^2}\right)_a a'^2 = 0; \quad \left(\frac{d^2 l \cdot Y}{d y^2}\right)_a a' a'' + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 l \cdot Y}{d y^3}\right)_a a'^3 = 0.$$

Darin ist, wie oben bereits gefunden wurde,

$$a = \frac{u}{n + 1 - u};$$

ferner ergibt sich aus

$$l \cdot Y = u \cdot l y - (n + 1)\, l \cdot (1 + y)$$

durch aufeinanderfolgende Differentiationen

$$\left(\frac{d^2 l \cdot Y}{d y^2}\right)_a = -\frac{(n + 1 - u)^3}{u (n + 1)}; \quad \left(\frac{d^3 l \cdot Y}{d y^3}\right)_a = \frac{2 (n + 1 - u)^4 (n + 1 + u)}{u^2 (n + 1)^2}.$$

Mit Benützung dieser Werthe berechnen sich aus den obigen Gleichungen die Coefficienten a', a'', nämlich:

$$a' = \sqrt{\frac{2 u (n + 1)}{(n + 1 - u)^3}}, \quad a'' = \frac{2 (n + 1 + u)}{3 (n + 1 - u)^2};$$

weiter folgt

$$\frac{d y}{d t} = \frac{d y'}{d t} = a' + 2 a'' t + 3 a''' t^2 + \cdots;$$

daher ist endlich

$$N = \int_0^\infty Y d y = Y_a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{d y}{d t} d t$$

$$= Y_a \left\{ a' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} d t + 2 a'' \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} d t + 3 a''' \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} d t + \cdots \right\}$$

$$= Y_a \left\{ a' \sqrt{\pi} + 3 \frac{1 \cdot 3}{2^2} a''' \sqrt{\pi} + \cdots \right\},$$

wenn von den bekannten Formeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i+1} e^{-t^2} dt = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2i} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i+1)}{2^i} \sqrt{\pi}$$

Gebrauch gemacht wird. Sind n, u und $n - u$ sehr grosse Zahlen, so kann näherungsweise

$$N = Y_a a' \sqrt{\pi}$$

genommen werden.

85. *Berechnung von* $Z = \int_{\frac{p}{q}}^{\infty} Y dy$. Indem wir zur Auswerthung dieses Integrals dieselben Transformationen anwenden, handelt es sich vor Allem um die Grenzen von t, welche jenen von $y = \left\{ {\infty \atop \frac{p}{q}} \right.$ entsprechen; vorderhand sei der zu $y = \frac{p}{q}$ gehörige Werth von t^2 mit k^2 bezeichnet.

Allgemein ist

$$t^2 = l \cdot Y_a - l \cdot Y,$$

daher

$$k^2 = l \cdot Y_a - l \cdot Y_{\frac{p}{q}};$$

und nachdem

$$Y_a = \frac{u^u (n+1-u)^{n+1-u}}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{u}{n+1}\right)^u \left(\frac{n+1-u}{n+1}\right)^{n+1-u},$$

$$Y_{\frac{p}{q}} = p^u q^{n+1-u}$$

ist, so folgt

$$k^2 = u l \cdot \frac{u}{p(n+1)} + (n+1-u) l \cdot \frac{n+1-u}{q(n+1)}, \quad \ldots \text{(a)}$$

woraus $t = \pm k$ für $y = \frac{p}{q}$ gefunden wird. Beachtet man, dass den Werthen

	$y \cdots$ 0,	a,	∞
die Werthe	$t \cdots -\infty$,	0,	∞

entsprechen, so ist $+k$ zu nehmen, wenn $\frac{p}{q} > a$, dagegen

$-k$, wenn $\frac{p}{q} < a$ ist. Man hat also bezüglich des Zählers Z zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. $\frac{p}{q} > a$. In diesem Falle ist

$$Z = \int_{\frac{p}{q}}^{\infty} Y\,dy = Y_a \int_k^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,\frac{dy}{dt} = Y_a \int_k^{\infty} e^{-t^2}[a' + 2a''t + \cdots]\,dt$$

$$= Y_a \left\{ a' \int_k^{\infty} e^{-t^2}dt + 2a'' \int_k^{\infty} te^{-t^2}dt \right\} = Y_a a' \int_k^{\infty} e^{-t^2}dt + a''\,Y_a e^{-k^2}.$$

Aus Z und N berechnet sich

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{a''}{a'\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2}.$$

Für den Quotienten

$$\frac{a''}{a'} = \frac{\sqrt{2}\,(n + 1 + u)}{3\sqrt{u\,(n + 1 - u)\,(n + 1)}}$$

kann mit grosser Annäherung $\frac{\sqrt{2}\,(n + u)}{3\sqrt{n\,u\,(n - u)}}$ gesetzt werden, und man hat dann

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^{\infty} e^{-t^2}\,dt + \frac{(n + u)\sqrt{2}}{3\sqrt{n\,u\,(n - u)\,\pi}}\,e^{-k^2} \quad \text{für } \frac{p}{q} > a. \quad \text{(b)}$$

Zweiter Fall: $\frac{p}{q} < a$. Diesmal ist

$$Z = \int_{\frac{p}{q}}^{\infty} Y\,dy = Y_a \int_{-k}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,(a' + 2a''t + \cdots)$$

$$= Y_a \left\{ a' \int_{-k}^{\infty} e^{-t^2}\,dt + 2a'' \int_{-k}^{\infty} t\,e^{-t^2}\,dt \right\}$$

$$= Y_a \left\{ -a' \int_k^{-\infty} e^{-t^2}\,dt + 2a'' \int_k^{-\infty} t\,e^{-t^2}\,dt \right\}$$

$$= Y_a \left\{ a' \int_{-\infty}^{k} e^{-t^2}\,dt + a'' \int_{-\infty}^{k} e^{-t^2}\,d(-t^2) \right\}$$

$$= Y_a \left\{ a' \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots - \int_k^{\infty} \cdots \right) + a''\,e^{-k^2} \right\}$$

$$= Y_a\,a' \sqrt{\pi} - Y_a\,a' \int_k^{\infty} e^{-t^2}\,dt + Y_a\,a''\,e^{-k^2};$$

führt man diesen Werth sowie den für N gefundenen in den Ausdruck für Π ein, so wird

$$\Pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_k^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{a''}{a'\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_k^\infty e^{-t^2}\,dt + \frac{(n+u)\sqrt{2}}{3\sqrt{nu(n-u)\pi}}\,e^{-k^2} \text{ für } \frac{p}{q} < a \ldots. (c).$$

Sechstes Problem. *Es ist die Wahrscheinlichkeit P' zu bestimmen, dass unter n Geburten die Zahl der Knaben nicht höher ist als u.*

Lösung. In diesem Problem wird θ, d. i. die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, als ungewiss vorausgesetzt; nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass θ zwischen den Grenzen $\pm z$ enthalten ist, (Nr. 82),

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-z}^{z} e^{-\theta^2}\left(1 + \frac{1}{v_a}\left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_a \theta^3\right) d\theta,$$

daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P' = \Pi \cdot P,$$

worin für Π der im vorigen Problem bestimmte Werth zu nehmen ist.

86. **Siebentes Problem.** *θ, d. i. die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt als gewiss vorausgesetzt, suche man die Wahrscheinlichkeit Π', dass in einer grossen Anzahl n von Geburten die Zahl der Knaben $u = \frac{n}{2}$ oder $u = \frac{n-1}{2}$ (je-nachdem n gerad oder ungerad) nicht überschreitet.*

Lösung. *Erster Fall:* n gerad. Alsdann ist

$$a = \frac{u}{n+1-u} = \frac{n}{n+2}, \text{ also } a < 1,$$

und da den Beobachtungen zufolge $p > q$ ist, so folgt $\frac{p}{q} > 1$, daher $\frac{p}{q} > a$; es sind also die Formeln (a) und (b) von Nr. 85 anzuwenden. Dieselben ergeben

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} e^{-k^2} \ldots\ldots (b')$$

$$k^2 = \frac{n}{2} l \cdot \frac{n}{2p(n+1)} + \frac{n+2}{2} l \cdot \frac{n+2}{2q(n+1)} \ldots\ldots (a')$$

Zweiter Fall: n ungerad. Diesmal ist $u = \frac{n-1}{2}$ zu nehmen; dies gibt

$$a = \frac{n-1}{n+3}, \text{ also } a < 1, \quad \text{dagegen } \frac{p}{q} > 1, \text{ daher } \frac{p}{q} > a.$$

Es sind also dieselben Formeln von Nr. 85 in Anwendung zu bringen, wodurch

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} e^{-k^2}, \ldots\ldots (b'')$$

$$k^2 = \frac{n-1}{2} l \cdot \frac{n-1}{2p(n+1)} + \frac{n+3}{2} l \cdot \frac{n+3}{2q(n+1)} \ldots (a'')$$

erhalten wird.

87. **Achtes Problem.** *Die Wahrscheinlichkeit P' zu suchen, dass in einer grossen Anzahl n von Geburten die Zahl der Knaben jene der Mädchen nicht überschreitet.*

Lösung. Diese Aufgabe wurde in Nr. 86 unter der Voraussetzung gelöst, dass θ gewiss ist; es ergab sich die Wahrscheinlichkeit Π'. Ist dagegen θ ungewiss und liegt sein Werth mit einer Wahrscheinlichkeit P (Nr. 82) innerhalb gegebener Grenzen $\pm z$, dann hat man

$$P' = P \cdot \Pi'.$$

Erstes Beispiel. *Die Zahl der jährlichen Geburten in einem französischen Departement von mittlerer Bevölkerung betrage $12000 = n$; für die Wahrscheinlichkeit einer Knaben- und Mädchengeburt mögen die in Nr. 82 gefundenen Werthe*

$$p = 0{\cdot}5159 + \theta \cdot 0{\cdot}00023,$$
$$q = 0{\cdot}4841 - \theta \cdot 0{\cdot}00023$$

Geltung haben.

Nachdem n gerad ist, so hat man die Formeln (a′) und (b′) in Anwendung zu bringen. Die erste derselben, wenn

nam darin für n, p und q die besonderen Werthe einsetzt und Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n}$ vernachlässigt, gibt

$$k^2 = 6{\cdot}0998 + 0{\cdot}1760 \cdot \theta + 0{\cdot}00127 \cdot \theta^2,$$

woraus

$$\frac{1}{2k} = 0{\cdot}2024 - 0{\cdot}0029 \cdot \theta$$

gefunden wird. Der zweiten Formel zufolge ist

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_k^\infty e^{-t^2}\, dt + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-k^2};$$

da nun

$$\int_k^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{e^{-k^2}}{2k}\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2k^2)^2} + \ldots\right) = e^{-k^2}(0{\cdot}1910 - 0{\cdot}0020 \cdot \theta),$$

so wird weiter

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2}\,(0{\cdot}2039 - 0{\cdot}0020 \cdot \theta).$$

Für die Grenzen ± 3 von θ wurde in Nr. 82 die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-\theta^2}(1 - 0{\cdot}00002 \cdot \theta^3)\, d\theta$$

gefunden, folglich ist

$$P' = P\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-\theta^2}(1 - 0{\cdot}00002 \cdot \theta^3)\, d\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2}(0{\cdot}2039 - 0{\cdot}0020 \cdot \theta)$$

$$= \frac{0{\cdot}2039}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k^2+\theta^2)}\, d\theta;$$

die Ausdehnung der Grenzen bis $\pm\infty$ ist mit Rücksicht auf den sehr geringen Werth, den $e^{-(k^2+\theta^2)}$ ausserhalb der Grenzen ± 3 annimmt, erlaubt.

Setzt man

$$\theta = \frac{\theta'}{\sqrt{1{\cdot}00127}} - \frac{0{\cdot}1760}{2 \cdot 1{\cdot}00127}, \quad d\theta = \frac{d\theta'}{\sqrt{1{\cdot}00127}},$$

so wird

$$k^2 + \theta^2 = \theta'^2 + 6{\cdot}0921,$$

daher

$$P' = \frac{0{\cdot}2039\, e^{-6{\cdot}0921}}{\pi \sqrt{1{\cdot}00127}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta'^2}\, d\theta'$$

$$= \frac{0{\cdot}2039\, e^{-6{\cdot}0921}}{\sqrt{\pi} \cdot 1{\cdot}00127} = 0{\cdot}0002599 = \frac{1}{4000}.$$

Man kann also nahe 4000 gegen 1 wetten, dass die Zahl der Knaben jene der Mädchen übertreffen wird.

Zweites Beispiel. *Die Wahrscheinlichkeit P' zu finden, dass in Paris unter den unehelichen Kindern die Zahl der jährlichen Knabengeburten jene der Mädchengeburten nicht überschreitet.*

Lösung. In dem Zeitraume von 13 Jahren, vom Beginn des Jahres 1815 bis Ende 1827, wurden in Paris 122404 uneheliche Kinder geboren, davon waren 62239 Knaben.

Mit diesen Zahlen findet man nach den Formeln von Nr. 82:

$$p = 0{\cdot}50847 + \theta \cdot 0{\cdot}002021,$$
$$q = 0{\cdot}49153 - \theta \cdot 0{\cdot}002021.$$

Und die Wahrscheinlichkeit, dass das erwartete Ereigniss eintrifft, indem θ einen zwischen den Grenzen ± 3 liegenden Werth besitzt, ist

$$P' = P\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-3}^{3} \Pi' e^{-\theta^2} (1 - \theta^3 \cdot 0{\cdot}00009)\, d\theta.$$

Wird $n = 1000$ als Mittelzahl der unehelichen Geburten für ein Jahr angenommen, wie dies obigen Beobachtungen nahezu entspricht, so sind bei der Berechnung von Π' die Formeln (a′) und (b′) von Nr. 86 anzuwenden, nämlich

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k}^{\infty} e^{-t^2}\, dt + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-k^2},$$

$$k^2 = \frac{n}{2}\, l \cdot \frac{n}{2p(n+1)} + \frac{n+2}{2}\, l \cdot \frac{n+2}{2q(n+1)}.$$

Zur Erleichterung der Rechnung setzen wir

$$0{\cdot}00847 + \theta \cdot 0{\cdot}002021 = \frac{1}{2}\alpha,$$

es ist dann

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha, \qquad q = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha.$$

Werden Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n}$ vernachlässigt, so liefert diese Substitution

$$k^2 = \frac{n}{2} l \cdot \frac{1}{1+\alpha} + \frac{n+2}{2} l \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

$$= \frac{n+1}{2} l \cdot \frac{1}{1+\alpha} + \frac{n+1}{2} l \cdot \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{1+\alpha}$$

$$= -\frac{n+1}{2} l \cdot (1-\alpha^2) + \frac{1}{2} l \cdot \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

$$= \frac{n+1}{2}\alpha^2 + \alpha.$$

Setzt man ferner

$$\frac{n+1}{2}\alpha^2 = \beta^2,$$

so berechnet sich

$$\beta = \sqrt{2(n+1)}\,\frac{\alpha}{2} = 1{\cdot}1979 + \theta \cdot 0{\cdot}2858;$$

ferner folgt für k der angenäherte Werth

$$k = (\beta^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} = \beta + \frac{\alpha}{2\beta} = \beta + \frac{\alpha}{2\sqrt{2(n+1)}\,\frac{\alpha}{2}} = \beta + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Im Hinblick auf den hohen Werth von n kann also

$$\int_k^\infty e^{-t^2}dt = \int_{\beta+\frac{1}{\sqrt{2n}}}^\infty e^{-t^2}dt = \int_{\beta+\frac{1}{\sqrt{2n}}}^{\beta} \cdots + \int_\beta^\infty \cdots = \int_\beta^\infty \cdots - \int_\beta^{\beta+\frac{1}{\sqrt{2n}}} \cdots$$

$$= \int_\beta^\infty e^{-t^2}dt - \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\beta^2}$$

geschrieben werden; damit wird bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{n}$

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\beta^\infty e^{-t^2}dt - \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2} + \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\, e^{-\beta^2 - \frac{2\beta}{\sqrt{2n}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\beta^\infty e^{-t^2}dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{n\pi}}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} \, dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{2 n \pi}},$$

wenn in dem übrig bleibenden Integrale t mit βt vertauscht wird.

Mithin hat man, wenn die auf θ bezüglichen Integrationsgrenzen bis $\pm \infty$ ausgedehnt werden,

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} \, dt + \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{2 n \pi}} \right) e^{-\theta^2} (1 - \theta^3 \cdot 0{\cdot}00009) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2 - \theta^2} \beta \, d\theta \, dt + \frac{1}{\pi \sqrt{2 n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 - \theta^2} \, d\theta.$$

In dem Doppelintegral, wenn man zur Abkürzung

$$a = 1{\cdot}1979, \qquad b = 0{\cdot}2858$$

setzt, ist

$$\beta = a + b\theta, \qquad \beta^2 = a^2 + 2ab\theta + b^2 \theta^2,$$

$$\beta^2 t^2 + \theta^2 = \frac{a^2 t^2}{1 + b^2 t^2} + \left(\theta \sqrt{1 + b^2 t^2} + \frac{a b t^2}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} \right)^2;$$

demnach erhält man durch Integration in Bezug auf θ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + \theta^2)} \beta \, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2 t^2}{1 + b^2 t^2} - \left(\theta \sqrt{1 + b^2 t^2} + \frac{a b t^2}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} \right)^2} (a + b\theta) \, d\theta$$

$$= e^{-\frac{a^2 t^2}{1 + b^2 t^2}} \left\{ \frac{a}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \, dv + \frac{b}{1 + b^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(v - \frac{a b t^2}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} \right) e^{-v^2} \, dv \right\}$$

$$= e^{-\frac{a^2 t^2}{1 + b^2 t^2}} \left\{ \frac{a \sqrt{\pi}}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} - \frac{a b^2 t^2}{(1 + b^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \, dv \right\}$$

$$= e^{-\frac{a^2 t^2}{1 + b^2 t^2}} \left\{ \frac{a \sqrt{\pi}}{\sqrt{1 + b^2 t^2}} - \frac{a b^2 t^2 \sqrt{\pi}}{(1 + b^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$= \frac{a \sqrt{\pi}}{(1 + b^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2 t^2}{1 + b^2 t^2}}.$$

Die Integration in Bezug auf t ist nun ohne weiteres ausführbar, wenn man für $\frac{a t}{\sqrt{1 + b^2 t^2}}$ eine neue Variable u

einführt; den Grenzen 1 und ∞ von t entsprechen dann die Grenzen

$$\frac{a}{\sqrt{1+b^2}} = c \text{ und } \frac{a}{b}$$

für u, so dass

$$\sqrt{\pi}\int_1^\infty \frac{a\,dt}{(1+b^2t^2)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{a^2t^2}{1+b^2t^2}} = \sqrt{\pi}\int_c^{\frac{a}{b}} e^{-u^2}\,du;$$

nachdem jedoch $\frac{a}{b} > 4$, so kann unbeschadet der hier erforderlichen Genauigkeit die obere Grenze bis ∞ ausgedehnt werden.

Durch einen ähnlichen Vorgang, wie er oben befolgt wurde, ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2-\theta^2}\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+b^2}}\, e^{-\frac{a^2}{1+b^2}}.$$

Führt man diese Werthe in die Formel für P' ein, so wird

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_c^\infty e^{-u^2}\,du + \frac{e^{-\frac{a^2}{1+b^2}}}{\sqrt{2n\pi(1+b^2)}}.$$

Mit Hilfe der am Schlusse des Werkes beigefügten Tafel I. findet man durch Einsetzung der Zahlenwerthe für a, b und c nach leichter Rechnung

$$P' = 0{\cdot}0537 = \frac{1}{19}.$$

Es ist demnach nahe 18 gegen 1 zu wetten, dass in Paris die Zahl der in einem Jahre geborenen unehelichen Knaben jene der Mädchen überschreitet.

Anmerkung. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitraume von dreizehn Jahren die Zahl der unehelichen weiblichen Geburten mindestens einmal jene der männlichen Geburten überschreiten wird, ist

$$Q = 1 - P'^{13} = 1 - (0{\cdot}9463)^{13} = 0{\cdot}512.$$

88. **Neuntes Problem.** *Die Wahrscheinlichkeit P zu bestimmen, dass die Ueberlegenheit der männlichen Geburten über die weiblichen durch i Jahre anhält.*

Lösung. Es seien p und q die beobachteten Anzahlen männlicher und weiblicher Geburten, auf welche die Berechnung von P sich stützen soll; ferner bedeute:

$2n$ die Anzahl der jährlichen Geburten;

x die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, $1-x$ die einer Mädchengeburt. Endlich sei unter Zugrundelegung eines bestimmten Werthes von x:

y' die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolges, der Geburt von p Knaben und q Mädchen nämlich;

z die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahre die Zahl der männlichen Geburten jene der weiblichen Geburtsfälle übersteigt;

z^i die Wahrscheinlichkeit, dass diese Ueberlegenheit durch i Jahre anhält.

Mit Einführung dieser Bezeichnungen ist

$$P = \frac{\int_0^1 z^i y' dx}{\int_0^1 y' dx}$$

der Ausdruck für die verlangte Wahrscheinlichkeit. Da nun y' das mit $x^p(1-x)^q = y$ behaftete Glied der Entwickelung $(x+1-x)^{p+q}$ ist, so hat man $y' = cy$, daher

$$P = \frac{\int_0^1 z^i y dx}{\int_0^1 y dx}.$$

Für die Berechnung von z verweisen wir auf Nr. 83. Dort bedeutet Π [Formel (A)] die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Geburten höchstens u Knaben, oder, was dasselbe besagt, mindestens $n-u$ Mädchen geboren werden. Dagegen stellt z die Wahrscheinlichkeit vor, dass von den $2n$ in einem Jahre erfolgten Geburten mehr, also mindestens $n+1$, auf Knaben entfallen. Man erhält also den Ausdruck für z, indem man in der citirten Formel n durch $2n$, u durch $n-1$, q durch x und p durch $1-x$ ersetzt; dadurch wird

$$z = x^{n+1}\left\{1+(n+1)(1-x)+\binom{n+2}{2}(1-x)^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{2n-1}{n-1}(1-x)^{n-1}\right\},$$

oder nach Anwendung derselben Transformationen, wie sie in Nr. 83 für Π vorgenommen wurden

$$z = \frac{\int\limits_{\frac{1-x}{x}}^{\infty} \frac{u^{n-1}\,du}{(1+u)^{2n+1}}}{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{u^{n-1}\,du}{(1+u)^{2n+1}}}.$$

Führt man hierin eine neue Variable s ein mit Hilfe der Gleichung

$$u = \frac{1-s}{s}, \quad \text{woraus } s = \frac{1}{1+u}, \quad du = \frac{ds}{s^2},$$

so entsprechen den Werthen 0, $\frac{1-x}{x}$, ∞ von u die Werthe 1, x, 0 von s, so dass

$$z = \frac{\int\limits_0^x s^n(1-s)^{n-1}\,ds}{\int\limits_0^1 s^n(1-s)^{n-1}\,ds}.$$

Für das spätere Bedürfniss verschaffen wir uns gleich einige von z abhängige Functionen; mit Beachtung, dass der Nenner constant ist, ergibt sich zunächst

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{d\int\limits_0^x s^n(1-s)^{n-1}\,ds}{dx}}{\int\limits_0^1 s^n(1-s)^{n-1}\,ds} = \frac{x^n(1-x)^{n-1}}{\int\limits_0^1 s^n(1-s)^{n-1}\,ds};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x)^{n-1}-(n-1)x^n(1-x)^{n-2}}{\int\limits_0^1 s^n(1-s)^{n-1}\,ds};$$

ferner erhält man hieraus

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{x^n (1-x)^{n-1}}{\int\limits_0^x s^n (1-s)^{n-1} ds}, \quad \frac{d^2 z}{z\,dx^2} = \frac{dz}{z\,dx}\,\frac{n-(2n-1)x}{x(1-x)}.$$

Zur weiteren Vereinfachung des Ausdruckes für P setzen wir $Y = z^i y = z^i x^p (1-x)^q$ und haben dann

$$P = \frac{\int\limits_0^1 Y dx}{\int\limits_0^1 y\,dx} = \frac{Z}{N};$$

wenn man mit a' und a die Werthe von x bezeichnet werden, welche beziehungsweise Y und y zum Maximum machen, so können auf die beiden Integrale die Transformationen von Nr. 79 angewendet werden, wodurch man erhält:

$$\int\limits_0^1 Y dx = Y_{a'} \sqrt{\pi}\, v_{a'}, \qquad \int\limits_0^1 y\,dx = y_a \sqrt{\pi}\, v_a$$

und

$$P = \frac{Z}{N} = \frac{Y_{a'}\, v_{a'}}{y_a\, v_a}.$$

89. *Berechnung von Z.* Dieselbe erfordert zunächst die Bestimmung von a', $z_{a'}$, $v_{a'}$.

1) *Berechnung von a'.* Die dazu dienliche Gleichung wird erhalten, wenn man in $\frac{dy}{dx} = 0$ die Variable x mit a' vertauscht; man findet so

$$\begin{aligned} 0 &= pz(1-a') + ia'(1-a')\left(\frac{dz}{dx}\right)_{a'} - qa'z \\ &= p - (p+q)a' + ia'(1-a')\left(\frac{dz}{z\,dx}\right)_{a'} \\ &= p - (p+q)a' + i\,\frac{a'^{n+1}(1-a')^n}{\int\limits_0^{a'} s^n (1-s)^{n+1} ds}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$a' = \frac{p}{p+q} + \frac{ia'^{n+1}(1-a')^n}{(p+q)\int\limits_0^{a'} s^n (1-s)^{n-1} ds}.$$

Wird nun $\sigma = s^n (1-s)^{n-1}$ gesetzt und mit α derjenige Werth von s bezeichnet, welcher dem Maximum von σ entspricht, so folgt für α der Werth $\frac{n}{2n-1}$, welcher nahezu $\frac{1}{2}$ ist; mithin ist, wenn n sehr gross vorausgesetzt wird, σ_α und umsomehr σ ein sehr kleiner Bruch, man kann daher, unbeschadet der hier erforderlichen Genauigkeit, die obere Grenze des Integrals mit 1 vertauschen und hat dann

$$\int_0^{a'} s^n (1-s)^{n-1} ds = \int_0^1 \sigma\, ds = \sigma_\alpha \sqrt{\pi}\, v_\alpha.$$

Mit Beziehung auf Nr. 79 ist nun

$$l\cdot\sigma_\alpha - l\cdot\sigma = (s-\alpha)^2 \{A + B(s-\alpha) + \cdots\},$$

darin

$$A = -\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\, l\cdot\sigma}{ds^2}\right]_\alpha,$$

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$l\cdot\sigma = n\, l\cdot s + (n-1)\, l\cdot(1-s);$$

mit Hilfe dieser Formeln ergibt sich

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2n(n-1)}{(2n-1)^3}}, \text{ ferner ist } \sigma_\alpha = \frac{n^n (n-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2n-1}};$$

durch Einsetzung dieser Werthe erhält man

$$\int_0^{a'} s^n (1-s)^{n-1} ds = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} (n-1)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{(2n-1)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}\sqrt{n}};$$

dadurch übergeht der Ausdruck für a' in

$$a' = \frac{p}{p+q} + \frac{i\, a'^{n+1} (1-a')^n 2^{2n} \sqrt{n}}{(p+q)\sqrt{\pi}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oder in

$$a' = \frac{p}{p+q} + \mu; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

μ ist ein sehr kleiner Zahlenwerth.

Berechnung von μ. Um einen Schluss auf die Grösse μ ziehen zu können, setzen wir den Werth für a' aus Gleichung (2) in (1) ein und erhalten

$$\mu = \frac{i\left(\frac{p}{p+q}+\mu\right)^{n+1}\left(\frac{q}{p+q}-\mu\right)^{n} 2^{2n}\sqrt{n}}{(p+q)\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{i\sqrt{n}\,p\left(\frac{2p}{p+q}\right)^{n}\left(\frac{2q}{p+q}\right)^{n}\left(1+\frac{p+q}{p}\mu\right)^{n+1}\left(1-\frac{p+q}{q}\mu\right)^{n}}{(p+q)^2\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{i\sqrt{n}\,p\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2\right]^{n}\left(1+\frac{p+q}{p}\mu\right)^{n+1}\left(1-\frac{p+q}{q}\mu\right)^{n}}{(p+q)^2\sqrt{\pi}};$$

im vorletzten Factor des Zählers kann 1 gegen n im Exponenten vernachlässigt werden; die beiden letzten Factoren vereinigen sich dann zu

$$\left(1-\frac{(p+q)(p-q)}{pq}\mu-\frac{(p+q)^2}{pq}\mu^2\right)^n;$$

entwickelt man den Logarithmus dieses Ausdruckes unter Vernachlässigung der Potenzen der Glieder mit μ und μ^2 und übergeht dann wieder zu den Zahlen, so ergibt sich für denselben der Näherungswerth

$$e^{-n\frac{(p+q)(p-q)}{pq}\mu-n\frac{(p+q)^2}{pq}\mu^2};$$

wird dieser in die Formel für μ eingesetzt, so folgt

$$\mu = i\sqrt{n}\,\frac{p\left[1-\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2\right]^n}{(p+q)^2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{n\mu(p+q)(p-q)}{pq}-\frac{n\mu^2(p+q)^2}{pq}} \quad . . (\mathrm{a})$$

2) *Berechnung von* $z_{a'}$. Es ist

$$z_{a'} = \frac{\int_0^{a'} s^n(1-s)^{n-1}ds}{\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds} = 1-\frac{\int_{a'}^1 s^n(1-s)^{n-1}ds}{\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds};$$

führt man hier mit Hilfe der Gleichung

$$s = \alpha + \theta = \frac{n}{2n-1}+\theta$$

die neue Variable θ ein, so kann die Formel (β) von Nr. 81 angewendet werden, sobald man darin p durch n und q durch $n-1$ ersetzt; dieselbe gibt

$$\frac{s^n(1-s)^{n-1}d\theta}{\int_0^1 s^n(1-s)^{n-1}ds} = \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}}\,e^{-\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}\theta^2},$$

woraus

$$\frac{\int_{a'}^{1} s^n (1-s)^{n-1}\, ds}{\int_0^1 s^n (1-s)^{n-1}\, ds} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}} \int_{a'-\frac{n}{2n-1}}^{1-\frac{n}{2n-1}} e^{-\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}\theta^2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}} \int_{a'-\frac{n}{2n-1}}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}\theta^2}\, d\theta$$

gefolgert wird; die Ausdehnung der oberen Grenze bis ∞ wurde mit Rücksicht auf die äusserst kleinen Werthe vorgenommen, welche die Exponentialgrösse für $\theta = \frac{1}{2}$ und für über $\frac{1}{2}$ hinaus liegende Werthe annimmt. Setzt man endlich

$$\frac{(2n-1)^3}{2n(n-1)}\theta^2 = t^2,$$

so entsprechen den Grenzen $a' - \frac{n}{2n-1}$ und ∞ von θ die Grenzen

$$\gamma = (2n-1)\sqrt{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}\left(a' - \frac{n}{2n-1}\right)$$

$$= (2n-1)\sqrt{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}\left(\frac{p}{p+q} + \mu - \frac{n}{2n-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}\left\{\frac{n(p-q)}{p+q} - \frac{p}{p+q} + (2n-1)\mu\right\}$$

und ∞ von t; nach diesen Transformationen übergeht der Ausdruck für $z_{a'}$ in

$$z_{a'} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \; \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

3) *Berechnung von $v_{a'}$.* Wird

$$Y = x^p z^i (1-x)^q = Y_{a'} e^{-t^2}$$

gesetzt, so kann auf die Entwickelung dieser Function der in Nr. 79 befolgte Vorgang angewendet werden; man findet

$$t^2 = l \cdot Y_{a'} - l \cdot Y = (x-a')^2 [A + B(x-a') + \cdots],$$

darin ist

$$A = -\frac{1}{2}\left[\frac{d^2 l\cdot Y}{d x^2}\right]_{a'}.$$

Nun folgt aus

$$l\cdot Y = p\,l\cdot x + i\,l\cdot z + q\,l\cdot(1-x)$$

durch zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2 l\cdot Y}{d x^2} = -\frac{p}{x^2} + i\,\frac{d^2 z}{z\,d x^2} - i\left(\frac{d z}{z\,d x}\right)^2 - \frac{q}{(1-x)^2},$$

woraus

$$v_{a'} = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{p}{2 a'^2} - \frac{i}{2}\left(\frac{d^2 z}{z\,d x^2}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{d z}{z\,d x}\right)^2 + \frac{q}{2(1-a'^2)}}}$$

sich ergibt.

Substituirt man die Werthe für $Y_{a'}$ und $v_{a'}$ in den Ausdruck für Z, so wird

$$Z = Y_{a'} v_{a'}\sqrt{\pi} = \frac{a'^{p+1} z^i_{a'} (1-a')^{q+1}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{p(1-a')^2 + q a'^2 + i a'^2 (1-a')^2\left\{\left(\frac{d z}{z\,d x}\right)^2_{a'} - \left(\frac{d^2 z}{z\,d x^2}\right)_{a'}\right\}}}.$$

Aus der bei Gelegenheit der Berechnung von a' (Nr. 89) benutzten Gleichung

$$0 = p - (p+q)\,a' + i\,a'(1-a')\left(\frac{d z}{z\,d x}\right)_{a'}$$

findet sich zunächst

$$\left(\frac{d z}{z\,d x}\right)_{a'} = \frac{(p+q)\,a' - p}{i\,a'(1-a')},$$

und wenn man im Zähler a' durch seinen in Gleichung (2) (Nr. 89) gefundenen Werth ersetzt, so wird

$$\left(\frac{d z}{z\,d x}\right)_{a'} = \frac{\mu(p+q)}{i\,a'(1-a')}.$$

Weiter ergab sich in Nr. 88

$$\frac{d^2 z}{z\,d x^2} = \frac{d z}{z\,d x}\cdot\frac{n-(2n-1)\,x}{x(1-x)},$$

folglich ist

$$\left(\frac{d^2 z}{z\,d x^2}\right)_{a'} = \frac{\mu(p+q)\{n-(2n-1)\,a'\}}{i\,a'^2(1-a')^2}.$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck für Z eingeführt und schreibt man im Nenner dieses Ausdruckes statt a' durchwegs $\frac{p}{p+q} + \mu$, so gelangt man nach einigen Reductionen

zu der Formel

$$Z = \frac{a'^{p+1} z^i_{a'} (1-a')^{q+1} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{pq}{p+q}} \sqrt{1+\frac{p+q}{pq}\{n(p-q)-p\}\mu+\frac{(p+q)^2}{pq}\left\{\frac{p+q}{i}+2n\right\}\mu^2}}.$$

Noch bleibt für $a'^{p+1}(1-a')^{q+1}$ ein Näherungswerth abzuleiten; man gelangt zu demselben, wenn man in

$$a'^{p+1}(1-a')^{q+1} = \left(\frac{p}{p+q}+\mu\right)\left(\frac{q}{p+q}-\mu\right) a'^p (1-a')^p$$

für das Product der beiden ersten Factoren $\frac{pq}{(p+q)^2}$ nimmt, in dem Producte der beiden andern, nämlich in

$$a'^p(1-a')^q = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \left\{1+\frac{p+q}{p}\mu\right\}^p \left\{1-\frac{p+q}{q}\mu\right\}^q$$

die von μ abhängigen Theile nach Potenzen von μ entwickelt, bei den Quadraten jedoch stehen bleibt; auf dem angedeuteten Wege gelangt man zu dem Resultate

$$a'^{p+1}(1-a')^{q+1} = \frac{pq}{(p+q)^2}\left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q e^{-\frac{(p+q)^3\mu^2}{2pq}},$$

so dass schliesslich

$$Z = \frac{z^i_{a'} \frac{pq}{(p+q)^2}\left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q e^{-\frac{(p+q)^3}{2pq}\mu^2} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{pq}{p+q}} \sqrt{1+\frac{p+q}{pq}\{n(p-q)-p\}\mu+\frac{(p+q)^2}{pq}\left\{\frac{p+q}{i}+2n\right\}\mu^2}}.$$

90. *Berechnung von N.* Die Auswerthung dieses Integrals erfolgte bereits in Nr. 79, woselbst

$$N = \int_0^1 y\,dx = y_a v_a \sqrt{\pi},$$

$$y_a = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q,$$

$$v_a = \frac{\sqrt{2}\sqrt{pq}}{(p+q)\sqrt{p+q}}$$

gefunden wurde; daraus berechnet sich

$$N = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q \sqrt{\frac{pq}{p+q}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{p+q}.$$

Setzt man nun in der Formel für P an Stelle von Z

und N die gefundenen Approximativwerthe, so ergibt sich die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{z_{a'}^{i}\, e^{-\frac{(p+q)^2}{2pq}\mu^2}}{\sqrt{1+\frac{p+q}{pq}\{n(p-q)-p\}\mu+\frac{(p+q)^2}{pq}\left\{\frac{p+q}{i}+2n\right\}\mu^2}} \qquad (c)$$

Was den Gang der Rechnung für die Anwendung auf einen besonderen Fall betrifft, so wird man zunächst mit Hilfe von (a) die Grösse μ berechnen; hierauf ergibt Formel (b) den Werth für $z_{a'}$ und mit diesem schliesst man nach Formel (c) auf P.

Beispiel. In dem 40jährigen Zeitraume von Beginn 1745 bis Ende 1784 wurde in Paris beobachtet (siehe Beispiel in Nr. 80):

$$p = 393386, \qquad q = 377555;$$

daraus ergibt sich als mittlere Zahl der jährlichen Geburten

$$2n = \frac{p+q}{40} = 19273{\cdot}5,$$

folglich ist im vorliegenden Falle

$$n = 9636{\cdot}75.$$

Nimmt man $i = 100$, so findet sich auf dem angedeuteten Wege

$$P = 0{\cdot}782.$$

Nach dem Stande der Beobachtungen am Schlusse des Jahres 1784 konnte man also nahe 4 gegen 1 wetten, dass in Paris in den nächsten 100 Jahren die Zahl der Knabengeburten alljährlich jene der Mädchengeburten übertreffen wird.

VII. Capitel.

I. Die Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems oder der Satz von Bayes.

91. *Bezeichnen x und $1-x$ die unbekannten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse A und B, und ist*

in einer sehr grossen Anzahl $\mu = p + q$ von Versuchen das Ereigniss A pmal, das Ereigniss B qmal eingetroffen, so liegt der Werth von x mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

zwischen den Grenzen

$$\frac{p}{\mu} \pm c \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}.$$

Beweis. Die aus dem beobachteten Erfolg geschlossene Wahrscheinlichkeit eines Werthes von x ist (Nr. 70)

$$\frac{y\,dx}{\int_0^1 y\,dx},$$

worin $y = x^p(1-x)^q$, und die Wahrscheinlichkeit, dass der Werth von x zwischen den Grenzen a und b eingeschlossen ist, hat zum Ausdruck

$$P = \frac{\int_a^b y\,dx}{\int_0^1 y\,dx} = \frac{Z}{N}.$$

Berechnung von Z. Zum Behufe der Auswerthung dieses Integrals setzen wir $x = \frac{p}{\mu} + z$ und nennen a', b' die Grenzen von z, welche jenen a, b von x entsprechen; alsdann ist

$$Z = \int_a^b y\,dx = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \int_{a'}^{b'} \left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p \left(1 - \frac{\mu z}{q}\right)^q dz.$$

Die Factoren unter dem Integralzeichen können wie folgt entwickelt werden:

$$\left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p = e^{pl\cdot\left(1+\frac{\mu z}{p}\right)} = e^{\mu z - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{p} + \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{p^2} - \cdots},$$

$$\left(1 - \frac{\mu z}{q}\right)^q = e^{ql\cdot\left(1-\frac{\mu z}{q}\right)} = e^{-\mu z - \frac{1}{2}\frac{\mu^2 z^2}{q} - \frac{1}{3}\frac{\mu^3 z^3}{q^2} - \cdots};$$

dadurch wird

$$Z = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \int_{a'}^{b'} dz\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2 z^2 \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{3}\mu^3 z^3 \left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right) - \cdots}$$

Führt man eine neue Variable ein mittelst der Gleichung

$$\frac{\mu^2 z^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{\mu^3 z^2}{2pq} = t^2,$$

aus welcher

$$z = t\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}$$

und

$$x = \frac{p}{\mu} + z = \frac{p}{\mu} + t\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

gefunden wird, und bezeichnet mit $-c$ und $+c$ die Grenzen von t, welche jenen a' und b' von z und a und b von x entsprechen (letztere Grenzen sind als Functionen von c darzustellen), so übergeht der Ausdruck für Z in

$$Z = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2 - \frac{4(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} t^3 - \cdots}$$

$$= \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2} \left\{1 - \frac{4(p-q)}{3\sqrt{2\mu pq}} t^3 + \cdots\right\} \quad (\beta)$$

$$= \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2},$$

wenn Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden.

Berechnung von N. Nachdem den Grenzen 0 und 1 von x die Grenzen $l' = -\sqrt{\frac{p\mu}{2q}}$ und $l = \sqrt{\frac{q\mu}{2p}}$ von t entsprechen, wie man sich durch Anwendung der Gleichung (α) leicht überzeugt, so ist

$$N = \int_0^1 y\, dx = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu}\sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-l'}^{l} e^{-t^2} dt;$$

sind aber l und l' einigermassen gross, dem absoluten Betrage nach etwa grösser als 4, so kann man die Grenzen des Integrals bis $\pm\infty$ ausdehnen und erhält

$$N = \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{p^p q^q}{\mu^\mu} \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}} \sqrt{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Durch Einführung der Werthe für Z und N in den Ausdruck für P ergibt sich

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-c}^{c} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{c} e^{-t^2} dt$$

als Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen den Grenzen a und b, oder der Formel (α) gemäss zwischen den Grenzen

$$\frac{p}{\mu} \pm c \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}$$

enthalten ist.

Erste Anmerkung. Für

$$c = 0{\cdot}476936$$

wird $P = \frac{1}{2}$; es ist daher 1 gegen 1 zu wetten, dass die unbekannte Wahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen

$$\frac{p}{\mu} \pm 0{\cdot}476936 \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}$$

oder zwischen

$$\frac{p}{\mu} \pm 0{\cdot}674490 \sqrt{\frac{pq}{\mu^3}}$$

enthalten ist. Diese Werthe bezeichnet man als die wahrscheinlichen Grenzen der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Zweite Anmerkung. 1) Bei demselben c, also auch bei demselben Werthe von P, ziehen sich die Grenzen immer enger zusammen, wenn μ wächst. Je ausgedehnter also die Beobachtungsreihe, auf welche sich die aposteriorische Wahrscheinlichkeit stützt, mit desto grösserem Rechte darf diese mit der objectiven oder mathematischen Wahrscheinlichkeit vertauscht werden.

2) Bleiben die Grenzen mit wachsendem μ unverändert, wozu erfordert wird, dass c mit μ im gleichen Masse wachse, so nähert sich P beständig der Einheit, und es lässt sich jederzeit ein so hoher Werth von μ angeben, damit bei einem der Einheit beliebig nahen Werthe von P die Grenzen beliebig eng ausfallen.

Auf das vorliegende Theorem und seine Folgerungen stützt sich die Ableitung unbekannter Wahrscheinlichkeiten aus Beobachtungen.

Problem. Von $p + q = \mu$ registrirten Geburtsfällen entfielen p auf Knaben, q auf Mädchen. Man verlangt die Grenzen, innerhalb welcher die unbekannte Wahrscheinlichkeit x einer Knabengeburt mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit P enthalten ist.

Lösung. Aus der Gleichung

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

berechnet sich c (am bequemsten unter Anwendung der Tafel I., soweit selbe ausreicht); dann sind sofort

$$\frac{p}{\mu} \pm c \sqrt{\frac{2pq}{\mu^3}}$$

die gesuchten Grenzen.

Dieses Resultat stimmt mit dem in Nr. 82 auf anderem Wege abgeleiteten überein, wenn man dort v_a durch seinen Werth und z durch c ersetzt. Die Uebereinstimmung erstreckt sich auch auf denjenigen Ausdruck für P, welcher sich durch Division von (β) durch (γ) ergeben würde, wie man sich mit einem Blicke auf Formel (β') der citirten Nummer überzeugt.

Beispiel. Die in dem zwölfjährigen Zeitraume von Beginn 1866 bis Ende 1877 in Oesterreich (im Reichsrathe vertretene Länder) beobachteten Geburten vertheilen sich wie folgt:

Kategorie	Männlich (p)	Weiblich (q)	Zusammen (μ)
Lebendgeborne, ehelich	4311076	4052193	8363269
„ unehelich	651303	616621	1267924
Todtgeborne, ehelich	102496	75696	178192
„ unehelich	24953	21612	46565
Summe	5089828	4766122	9855950

Auf Grund dieses Beobachtungsmateriales sind die wahrscheinlichen Grenzen der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt für die vier Kategorien von Geburtsfällen zu berechnen.

Lösung. Die Berechnung erfolgt nach der Formel

$$\frac{p}{\mu} \pm 0{\cdot}674490 \sqrt{\frac{pq}{\mu^3}}$$

und liefert das nachfolgende Resultat:

Kategorie.	Es ist 1 gegen 1 zu wetten, dass die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt liegt zwischen
Lebendgeborne, ehelich	$0{\cdot}51548 \pm 0{\cdot}00012$
„ unehelich	$0{\cdot}51368 \pm 0{\cdot}00030$
Todtgeborne, ehelich	$0{\cdot}57520 \pm 0{\cdot}00079$
„ unehelich	$0{\cdot}53587 \pm 0{\cdot}00156$

Durch Anwendung derselben Formel auf alle Geburtsfälle ohne Unterschied der Kategorie ergeben sich für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt die wahrscheinlichen Grenzen

$$0{\cdot}51642 \pm 0{\cdot}00011.$$

II. Theorem von Laplace über die Wahrscheinlichkeit der Mittelwerthe von Beobachtungen.

92. *Zur Bestimmung des Werthes einer unbekannten Grösse sind $p + p_1 + \cdots + p_i = \mu$ Beobachtungen angestellt worden; p davon ergaben den Werth w, p_1 den Werth $w_1, \cdots p_i$ den Werth w_i; der angenäherte Mittelwerth dieser Beobachtungen ist*

$$m = \frac{p w + p_1 w_1 + \cdots + p_i w_i}{p + p_1 + \cdots + p_i} = \frac{\Sigma p_i w_i}{\mu};$$

bezeichnen ferner $x, x_1, \cdots x_i$ die unbekannten Wahrscheinlichkeiten der sich ausschliessenden Ereignisse $w, w_1, \cdots w_i$, so dass

$$x + x_1 + \cdots + x_i = 1,$$

so ist

$$v = w x + w_1 x_1 + \cdots + w_i x_i = \Sigma w_i x_i$$

der wahre Mittelwerth der Beobachtungen; dies vorausgeschickt, besteht eine Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2}\, dt$$

dafür, dass der Unterschied $v - m$ *zwischen den Grenzen*

$$\pm \frac{c}{\mu} \sqrt{2 \Sigma p_i (w_i - m)^2}$$

oder zwischen

$$\pm c \sqrt{\frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\Sigma p_i w_i^2}{\mu} - \left(\frac{\Sigma p_i w_i}{\mu} \right)^2 \right\}}$$

enthalten ist, vorausgesetzt, dass $\mu, p, \cdots p_i$ *grosse Zahlen gleicher Ordnung bedeuten.*

1) Fall zweier Ereignisse.

Beweis. Die vorhin angeführten Grössen reduciren sich in diesem Falle auf

$$p + p_1 = \mu; \quad m = \frac{p\, w + p_1\, w_1}{\mu}; \quad x + x_1 = 1; \quad v = w\, x + w_1\, x_1.$$

Bezeichnet k den Coefficienten von $x^p x_1^{p_1}$ in der Entwickelung des Binoms $(x + x_1)^\mu$, so ist die Wahrscheinlichkeit des p-maligen Eintreffens von w und des p_1-maligen Eintreffens von w_1

$$y = k\, x^p x_1^{p_1} = k\, x^p (1 - x)^{p_1};$$

ersetzt man hierin x durch $\frac{v - w_1}{w - w_1}$ und $1 - x$ durch $\frac{w - v}{w - w_1}$, — Werthe, welche sich aus den letzten zwei der oben angeschriebenen Gleichungen ergeben, — so wird

$$y = k \left(\frac{v - w_1}{w - w_1} \right)^p \left(\frac{w - v}{w - w_1} \right)^{p_1}.$$

Gesetzt, w_1 sei grösser als w, dann liegen alle Werthe von v zwischen w und w_1, mithin ist die Wahrscheinlichkeit eines dieser Werthe

$$\frac{k \left(\frac{v - w_1}{w - w_1} \right)^p \left(\frac{w - v}{w - w_1} \right)^{p_1} d\, v}{\int_w^{w_1} k \left(\frac{v - w_1}{w - w_1} \right)^p \left(\frac{w - v}{w - w_1} \right)^{p_1} d\, v} = \frac{(v - w_1)^p\, (w - v)^{p_1}\, d\, v}{\int_w^{w_1} (v - w_1)^p\, (w - v)^{p_1}\, d\, v},$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass v zwischen den Grenzen a

und b enthalten sein wird,

$$P = \frac{\int_a^b (v - w_1)^p (w - v)^{p_1} dv}{\int_w^{w_1} (v - w_1)^p (w - v)^{p_1} dv} = \frac{Z}{N}.$$

93. *Berechnung von Z.* Wir setzen mit Laplace

$$v = m + z = \frac{p w + p_1 w_1}{\mu} + z,$$

woraus

$$dv = dz; \quad z = v - m = v - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu}$$

folgt, so dass z den Unterschied zwischen dem wahren und dem angenäherten Mittelwerthe bedeutet; die den Grenzen a, b von v entsprechenden Grenzen von z mögen α und β heissen, so ist

$$Z = \int_a^b (v - w_1)^p (w - v)^{p_1} dv$$

$$= (w - w_1)^\mu \frac{p^p p_1^{p_1}}{\mu^\mu} \int_\alpha^\beta \left\{1 + \frac{\mu z}{p(w - w_1)}\right\}^p \left\{1 - \frac{\mu z}{p_1 (w - w_1)}\right\}^{p_1} dz.$$

Zur näherungsweisen Auswerthung entwickeln wir die unter dem Integral stehenden Factoren:

$$\left\{1 + \frac{\mu z}{p(w - w_1)}\right\}^p = e^{p l \cdot \left\{1 + \frac{\mu z}{p(w - w_1)}\right\}}$$

$$= e^{\frac{\mu z}{w - w_1} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2 z^2}{p (w - w_1)^2} + \frac{1}{3} \frac{\mu^3 z^3}{p^2 (w - w_1)^3} - \cdots},$$

$$\left\{1 - \frac{\mu z}{p_1 (w - w_1)}\right\}^{p_1} = e^{p_1 l \cdot \left\{1 - \frac{\mu z}{p_1 (w - w_1)}\right\}}$$

$$= e^{-\frac{\mu z}{w - w_1} - \frac{1}{2} \frac{\mu^2 z^2}{p_1 (w - w_1)^2} - \frac{1}{3} \frac{\mu^3 z^3}{p_1^2 (w - w_1)^3} - \cdots};$$

es verwandelt sich dadurch der obige Ausdruck in

$$Z = (w - w_1)^\mu \frac{p^p p_1^{p_1}}{\mu^\mu} \int_\alpha^\beta dz\, e^{-\frac{\mu^2 z^2}{2 (w - w_1)^2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) + \frac{1}{3} \frac{\mu^3 z^3}{(w - w_1)^3} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p_1^2}\right) - \cdots};$$

setzt man

$$\frac{\mu^2 z^2}{2(w-w_1)^2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\right)=t^2,$$

so dass

$$z=t\sqrt{\frac{2pp_1(w-w_1)^2}{\mu^3}},\quad dz=dt\sqrt{\cdots}$$

wird, und bezeichnet mit $-c$, $+c$ die neuen Grenzen des Integrals, so ergibt sich

$$Z=k\int_{-c}^{c}dt\,e^{-t^2}e^{\frac{4(p_1-p)}{3\sqrt{2\mu pp_1}}t^3+\cdots}$$

$$=k\int_{-c}^{c}dt\,e^{-t^2}\left\{1+\frac{4(p_1-p)}{3\sqrt{2\mu pp_1}}t^3+\cdots\right\};$$

die Glieder innerhalb der Klammer sind höchstens von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$; bis auf diese Ordnung genau ist also

$$Z=k\int_{-c}^{c}dt\,e^{-t^2}=2k\int_{0}^{c}dt\,e^{-t^2}.$$

k wurde zur Abkürzung für den Coefficienten des Integrals gesetzt.

94. *Berechnung von N.* Auf das Nennerintegral sind die obigen Transformationen unmittelbar anwendbar, und man erhält, wenn man für den Augenblick mit l', l die Grenzen von t bezeichnet, welche den Grenzen w, w_1 von v entsprechen,

$$N=k\int_{l'}^{l}dt\,e^{-t^2}.$$

Aus den Substitutionsgleichungen

$$z=v-m=v-\frac{pw+p_1w_1}{p+p_1},\quad t=z\frac{\mu\sqrt{\mu}}{(w_1-w)\sqrt{2pp_1}}$$

geht hervor, dass den Grenzen

$$v=\begin{cases}w_1\\ w\end{cases}\text{ jene } z=\begin{cases}\frac{p(w_1-w)}{\mu}\\ \frac{p(w-w_1)}{\mu}\end{cases}\text{ und endlich } t=\begin{cases}l=\sqrt{\frac{p}{2p_1}}\sqrt{\mu}\\ l'=-\sqrt{\frac{p_1}{2p}}\sqrt{\mu}\end{cases}$$

entsprechen; daraus ersieht man, dass l und l' sehr grosse Zahlen von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ sind, man kann sie daher im

Hinblick auf die Natur der unter dem Integral stehenden Function bis $+\infty$ ausdehnen und findet so

$$N = k\sqrt{\pi}.$$

Demnach ist

$$P = \frac{Z}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^c dt\, e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass v zwischen den Grenzen a und b enthalten ist; diese Grenzen müssen als Functionen des zuletzt eingeführten Werthes c dargestellt werden. Nun ist

$$v = m + z = m + t\sqrt{\frac{2pp_1(w-w_1)^2}{\mu^3}}$$

gesetzt worden; es folgt also

$$a = m - c\sqrt{\cdots},$$

$$b = m + c\sqrt{\cdots},$$

und

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^c dt\, e^{-t^2}\, dt$$

ist demnach die Wahrscheinlichkeit dafür, dass v zwischen

$$\frac{pw + p_1 w_1}{\mu} \pm c\sqrt{\frac{2pp_1(w-w_1)^2}{\mu^3}},$$

oder dass der Unterschied $v - m$ zwischen

$$\pm \frac{c}{\mu}\sqrt{2\{p(w-m)^2 + p_1(w_1-m)^2\}}$$

enthalten ist. Letztere Form ist leicht zu verificiren, indem der Bruch $\frac{pp_1(w-w_1)^2}{\mu}$ sich folgendermassen umformen lässt:

$$\frac{pp_1(w-w_1)^2}{\mu} = \frac{pp_1^2 + p_1 p^2}{\mu^2}(w - w_1)^2$$

$$= p\left\{\frac{p_1(w-w_1)}{\mu}\right\}^2 + p_1\left\{\frac{p(w-w_1)}{\mu}\right\}^2$$

$$= p\left\{\frac{(\mu-p)w - p_1 w_1}{\mu}\right\}^2 + p_1\left\{\frac{(\mu-p_1)w_1 - pw}{\mu}\right\}^2$$

$$= p\left\{w - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu}\right\}^2 + p_1\left\{w_1 - \frac{pw + p_1 w_1}{\mu}\right\}^2.$$

Erste Anmerkung. Für

$$w = 1, \quad w_1 = 0$$

wird

$$m = \frac{p}{p + p_1}, \quad v = x;$$

alsdann ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-t^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Werth von x zwischen den Grenzen

$$\frac{p}{p + p_1} \pm c \sqrt{\frac{2 p p_1}{(p + p_1)^3}}$$

eingeschlossen ist; man erkennt hierin sofort die Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems.

Zweite Anmerkung. 1) Bleibt c, also auch P, constant, so ziehen sich die Grenzen in dem Masse zusammen, als μ wächst.

2) Bleiben dagegen die Grenzen $\pm \frac{c}{\mu} \sqrt{\cdots}$ dieselben, wozu erforderlich ist, dass c gleichmässig mit μ wächst, so strebt P in dem Masse der Einheit zu, als μ sich vergrössert.

2) Fall dreier Ereignisse.

95. J. Bienaymé hat das vorliegende Theorem direct und in der allgemeinsten Weise im V. Bande (1838) der Mémoires des savants étrangers bewiesen.

Wir führen im Folgenden seine Methode an dem Fall dreier Ereignisse vor.

In diesem Falle haben wir

$$v = wx + w_1 x_1 + w_2 x_2,$$
$$p + p_1 + p_2 = \mu,$$
$$x + x_1 + x_2 = 1;$$

mit Hilfe der ersten und letzten Gleichung lassen sich beispielsweise x und x_1 als Functionen von x_2 und v darstellen, so dass nur zwei unabhängige Variable vorliegen.

Bezeichnet k den Coefficienten des mit $x^p x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ behafteten Gliedes der Entwickelung des Trinoms $(x + x_1 + x_2)^\mu$,

so ist die Wahrscheinlichkeit für das p-malige Eintreffen von w, das p_1-malige Eintreffen von w_1 und das p_2-malige Eintreffen von w_2 ausgedrückt durch

$$k\,x^p\,x_1^{p_1}\,x_2^{p_2},$$

daher die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Werthe der unabhängigen Grössen x_2 und v:

$$\frac{x^p\,x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}}{\Sigma\Sigma x^p\,x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}};$$

die Summe im Nenner ist unter der Voraussetzung $w < w_1 < w_2$ zwischen den Grenzen w und w_2 (in Bezug auf v) zu nehmen, weil innerhalb dieser Grenzen alle möglichen Werthe von v enthalten sein müssen; die Summirungsgrenzen für x_2 mögen vorderhand unbestimmt bleiben. Die Wahrscheinlichkeit endlich, dass irgend ein Werth von x_2 mit irgend einem zwischen den Grenzen a und b belegenen Werthe von v zusammentrifft, ist

$$\frac{\Sigma\sum_a^b x^p\,x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}}{\Sigma\sum_w^{w_2} x^p\,x_1^{p_1}\,x_1^{p_2}}.$$

Um auf den Fall der Continuität zu übergehen, multipliciren wir Zähler und Nenner mit $dx_2\,dv$ und schreiben dann

$$P = \frac{\int\int_a^b x^p\,x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}\,dx_2\,dv}{\int\int_w^{w_2} x^p\,x_1^{p_1}\,x_2^{p_2}\,dx_2\,dv} = \frac{Z}{N}.$$

Zur Transformation der beiden Integrale setzen wir

$$x = \frac{p}{\mu} + z,\quad x_1 = \frac{p_1}{\mu} + z_1,\quad x_2 = \frac{p_2}{\mu} + z_2;$$

$$v = \frac{pw + p_1 w_1 + p_2 w_2}{\mu} + u;$$

daraus ergibt sich im Hinblick auf die zwischen x, x_1, x_2 und v bestehenden Relationen

$$z + z_1 + z_2 = 0,\quad wz + w_1 z_1 + w_2 z_2 = u,$$

woraus weiter, wenn man sich vornimmt, z_2 und u als unabhängige Variable gelten zu lassen,

$$z = \frac{u - z_2 (w_2 - w_1)}{w - w_1}, \quad z_1 = \frac{u - z_2 (w_2 - w)}{w_1 - w}$$

folgt. Die den Grenzen w, w_2 von v entsprechenden Grenzen der neuen Variablen u mögen mit a', b' bezeichnet werden.

96. *Berechnung von Z.* Unter Anwendung der eben besprochenen Substitutionen erhält man zunächst

$$Z = \frac{p^p {p_1}^{p_1} {p_2}^{p_2}}{\mu^\mu} \int\int_{a'}^{b'} \left(1 + \frac{\mu z}{p}\right)^p \left(1 + \frac{\mu z_1}{p_1}\right)^{p_1} \left(1 + \frac{\mu z_2}{p_2}\right)^{p_2} dz_2 \, du,$$

oder, wenn man wie in Nr. 92 entwickelt,

$$Z = \frac{p^p {p_1}^{p_1} {p_2}^{p_2}}{\mu^\mu} \int\int_{a'}^{b'} dz_2 \, du$$

$$\times e^{\mu(z + z_1 + z_2) - \frac{\mu^2}{2}\left(\frac{{z_2}^2}{p_2} + \frac{{z_1}^2}{p_1} + \frac{z^2}{p}\right) + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{{z_2}^3}{{p_2}^2} + \cdots\right) - \cdots}.$$

und durch Eliminirung von z_1 und z ergibt sich:

$$Z = \frac{p^p {p_1}^{p_1} {p_2}^{p_2}}{\mu^\mu} \int\int_{a'}^{b'} dz_2 \, du$$

$$\times e^{-\frac{\mu^2}{2(w - w_1)^2}\left[{z_2}^2 \left\{\frac{(w_1 - w)^2}{p_2} + \frac{(w - w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{p}\right\} - 2 u z_2 \left\{\frac{w_2 - w}{p_1} + \frac{w_2 - w_1}{p}\right\} + u^2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p}\right)\right]}$$

$$\times e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{{z_2}^3}{{p_2}^2} + \cdots\right) - \cdots}.$$

Zur Abkürzung sei

$$\frac{(w_1 - w)^2}{p_2} + \frac{(w - w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{p} = A^2, \quad u\left\{\frac{w_2 - w}{p_1} + \frac{w_2 - w_1}{p}\right\} = B,$$

$$u^2\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p}\right) = C;$$

Z schreibt sich dann nach einiger Umformung wie folgt:

$$Z = \frac{p^p {p_1}^{p_1} {p_2}^{p_2}}{\mu^\mu} \int\int_{a'}^{b'} dz_2 \, du$$

$$\times e^{-\frac{\mu^2}{2(w - w_1)^2}\left(A z_2 - \frac{B}{A}\right)^2} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2(w - w_1)^2}\left(C - \frac{B^2}{A^2}\right)} \cdot e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{{z_2}^3}{{p_2}^2} + \cdots\right) - \cdots}.$$

Setzt man hierin

$$y = \frac{\mu}{(w - w_1)\sqrt{2}}\left(Az_2 - \frac{B}{A}\right),$$

so dass

$$z_2 = \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A}\, y + \frac{B}{A^2}, \quad dz = \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A}\, dy$$

wird, so ist weiter

$$Z = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A} \int dy\, e^{-y^2}$$

$$\times \int_{a'}^{b'} du\, e^{-\frac{\mu^2}{2A^2}\cdot\frac{CA^2 - B^2}{(w - w_1)^2}} \cdot e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right) - \cdots}$$

Nun kann der Factor

$$e^{\frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right)} = 1 + \frac{\mu^3}{3}\left(\frac{z_2^3}{p_2^2} + \cdots\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\mu^3}{3}\, y^3 \frac{(w - w_1)^3(\sqrt{2})^3}{p_2^2 \mu^3 A^3} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\, y^3 \frac{1}{p_2^2} \frac{(w - w_1)^3(\sqrt{2})^3}{A^3} + \cdots$$

unterdrückt werden, weil er von 1 nur um eine Quantität von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{p_2}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ verschieden ist; man überzeugt sich hiervon, wenn man bedenkt, dass A und y beziehungsweise von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ und $\sqrt{\mu}$ sind.

Auf letzteren Umstand, dass nämlich y von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ ist, stützt sich die Berechtigung, die Grenzen von y bis $\pm\infty$ auszudehnen, welches auch die Grenzen von z_2 oder in letzter Reihe von x_2 sein mögen. Dies alles zusammengefasst, kann

$$Z = \frac{p^p p_1^{p_1} p_2^{p_2}}{\mu^\mu} \frac{(w - w_1)\sqrt{2}}{\mu A} \sqrt{\pi} \int_{a'}^{b'} du\, e^{-\frac{\mu^2}{2A^2}\cdot\frac{CA^2 - B^2}{(w - w_1)^2}}$$

geschrieben werden.

Zur weiteren Umformung dieses Integrals entwickeln wir den Bruch $\frac{CA^2 - B^2}{(w - w_1)^2}$. Nachdem

$$A^2 = \frac{(w_1 - w)^2}{p_2} + \frac{(w - w_2)^2}{p_1} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{p}, \quad C = u^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}\right) = u^2\frac{\mu - p_2}{p p_1}$$

gesetzt worden, so ist

$$CA^2 = u^2\frac{\mu}{p p_1 p_2}(w_1 - w)^2 - u^2\frac{(w_1 - w)^2}{p p_1} + u^2\frac{\mu - p_2}{p p_1}\left\{\frac{(w_2 - w_1)^2}{p} + \frac{(w_2 - w)^2}{p_1}\right\},$$

ferner

$$B^2 = u^2\left\{\frac{(w_2 - w)^2}{p_1{}^2} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{p^2} + 2\frac{(w_2 - w)(w_2 - w_1)}{p p_1}\right\}$$

$$= u^2\left\{\frac{(w_2 - w)^2}{p_1{}^2} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{p^2} + \frac{(w_2 - w)^2 + (w_2 - w_1)^2 - (w_1 - w)^2}{p p_1}\right\}$$

$$= \frac{u^2}{p p_1}\left\{\frac{(w_2 - w)^2(p + p_1)}{p_1} + \frac{(w_2 - w_1)^2(p + p_1)}{p}\right\} - \frac{u^2}{p p_1}(w_1 - w)^2$$

$$= u^2\frac{\mu - p_2}{p p_1}\left\{\frac{(w_2 - w)^2}{p_1} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{p}\right\} - \frac{u^2}{p p_1}(w_1 - w)^2;$$

durch Einführung dieser Werthe reducirt sich der ganze Exponent von e auf

$$-\frac{\mu^2}{2A^2}u^2\frac{\mu}{p p_1 p_2};$$

setzt man

$$t = u\sqrt{\frac{\mu^3}{2 p p_1 p_2 A^2}},$$

woraus

$$u = t\sqrt{\frac{2 p p_1 p_2 A^2}{\mu^3}}, \quad du = dt\sqrt{\cdots}$$

folgt, und bezeichnet mit $-c$ und $+c$ die Grenzen von t, welche den ursprünglichen a und b von v entsprechen sollen, so ergibt sich für den Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit der Ausdruck:

$$Z = \frac{p^p p_1{}^{p_1} p_2{}^{p_2}}{\mu^\mu}\cdot\frac{w - w_1}{\mu A}\sqrt{\frac{2 p p_1 p_2 A^2}{\mu^3}}\sqrt{2\pi}\int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2}.$$

97. *Berechnung von N.* Nach denselben Transformationen, wenn man die w, w_2 entsprechenden Grenzen von t mit l' und l benennt, erhält man

$$N = \frac{p^p p_1{}^{p_1} p_2{}^{p_2}}{\mu^\mu}\cdot\frac{w - w_1}{\mu A}\sqrt{\frac{2 p p_1 p_2 A^2}{\mu^3}}\sqrt{2\pi}\int_{l'}^{l} dt\, e^{-t^2}.$$

Aus den Substitutionsgleichungen

$$v = \frac{p w + p_1 w_1 + p_2 w_2}{\mu} + u, \quad t = u\sqrt{\frac{\mu^3}{2 p p_1 p_2 A^2}}$$

folgt aber, dass den Werthen w und w_2 von v die Werthe

$$w - \frac{pw + p_1 w_1 + p_2 w_2}{\mu} = -\frac{p_1(w_1 - w) + p_2(w_2 - w)}{\mu},$$

$$w_2 - \frac{pw + p_1 w_1 + p_2 w_2}{\mu} = \frac{p(w_2 - w) + p_1(w_2 - w_1)}{\mu}$$

von u und diesen wieder die Werthe

$$l' = -\frac{p_1(w_1 - w) + p_2(w_2 - w)}{\sqrt{2pp_1p_2A^2}} \sqrt{\mu},$$

$$l = \frac{p(w_2 - w) + p_1(w_2 - w_1)}{\sqrt{2pp_1p_2A^2}} \sqrt{\mu}$$

von t entsprechen; da aber diese Grenzen von der Ordnung $\sqrt{\mu}$ sind, so können sie ohne weiteres bis $-\infty$ und $+\infty$ ausgedehnt werden; das in dem Ausdrucke für N enthaltene Integral nimmt dann den Werth $\sqrt{\pi}$ an, und substituirt man hierauf Z und N in den Ausdruck für P, so wird

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{c} dt\, e^{-t^2};$$

mit dieser Wahrscheinlichkeit also hat man einen zwischen den Grenzen

$$\frac{pw + p_1 w_1 + p_2 w_2}{\mu} \pm c\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}}$$

liegenden Werth von v zu erwarten.

Es erübrigt nur, diese Grenzen auf die im Eingange erwähnte Form zu bringen. Ersetzt man zu diesem Ende A^2 durch seinen Werth, so wird

$$\sqrt{\frac{2pp_1p_2A^2}{\mu^3}} = \sqrt{\frac{2}{\mu^4}}\{(p + p_1 + p_2)pp_1(w - w_1)^2$$
$$+ (p + p_1 + p_2)p_1p_2(w_1 - w_2)^2 + (p + p_1 + p_2)pp_2(w_2 - w)^2\}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\mu^4}}\{p^2p_1(w - w_1)^2 + pp_1^2(w - w_1)^2 + pp_1p_2(w - w_1)^2$$
$$+ pp_1p_2(w_1 - w_2)^2 + p_1^2p_2(w_1 - w_2)^2 + p_1p_2^2(w_1 - w_2)^2$$
$$+ p^2p_2(w_2 - w)^2 + pp_1p_2(w_2 - w)^2 + pp_2^2(w_2 - w)^2\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\mu^4}}\,\{p[p_1(w-w_1)+p_2(w-w_2)]^2$$
$$-2pp_1p_2(w-w_1)(w-w_2)+pp_1p_2(w-w_1)^2$$
$$+p_1[p(w_1-w)+p_2(w_1-w_2)]^2-2pp_1p_2(w_1-w)(w_1-w_2)$$
$$+pp_1p_2(w_1-w_2)^2+p_2[p(w_2-w)+p_1(w_2-w_1)]^2$$
$$-2pp_1p_2(w_2-w)(w_2-w_1)+pp_1p_2(w_2-w)^2\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\mu^4}}\,\{p[p_1(w-w_1)+p_2(w-w_2)]^2$$
$$+p_1[p(w_1-w)+p_2(w_1-w_2)]^2+p_2[p(w_2-w)+p_1(w_2-w_1)]^2$$
$$+\left[\sqrt{pp_1p_2}\,(\overline{w-w_1}+\overline{w_1-w_2}+\overline{w_2-w})\right]^2\}.$$

Das letzte Glied der eingeklammerten Summe ist identisch Null; jedes der übrigen lässt sich in folgender Weise auf einfachere Gestalt bringen:

$$p[p_1(w-w_1)+p_2(w-w_2)]^2$$
$$=p[\mu w-(pw+p_1w_1+p_2w_2)]^2=p\mu^2(w-m)^2;$$

durch diese Transformation verwandelt sich der obige Wurzelausdruck in

$$\frac{1}{\mu}\sqrt{2\{p(w-m)^2+p_1(w_1-m)^2+p_2(w_2-m)^2\}}$$

oder aber in

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}\left\{\frac{pw^2+p_1w_1^2+p_2w_2^2}{\mu}-\left[\frac{pw+p_1w_1+p_2w_2}{\mu}\right]^2\right\}},$$

womit die Uebereinstimmung mit dem Wortlaute des Theorems hergestellt ist.

Anmerkung. 1) Bleibt c und somit auch P constant, so ziehen sich die Grenzen in dem Masse zusammen, als μ wächst.

2) Bleiben dagegen die Grenzen unverändert, was ein gleichzeitiges Wachsen von c mit μ erfordert, so strebt P in dem Masse der Einheit zu, als μ zunimmt.

VIII. Capitel.
Theorie der Beobachtungsfehler.

98. **Vorbemerkungen.** Alle Messungen sind mit Fehlern behaftet und diese können von zweifacher Art sein: entweder regelmässig (constant) oder unregelmässig (zufällig).

Die Ursachen der regelmässigen Fehler sind bekannt, lassen sich entweder auf ein beliebig niedriges Mass herabbringen oder in Rechnung ziehen, so dass man vor jeder Messung aus den dabei obwaltenden Umständen berechnen kann, in welcher Weise sie das Messungsergebniss beeinflussen werden. Insofern derlei Ursachen, so lange die Umstände sich nicht ändern, bei wiederholten Messungen immer in derselben Weise auf das Resultat einwirken, es jedesmal zu gross oder zu klein werden lassen, nennt man die aus ihnen entspringenden Fehler auch wohl constante Fehler.

Die Ursachen der unregelmässigen oder zufälligen Fehler sind zumeist unbekannt; aber selbst dann, wenn sie sich angeben lassen, sind sie von solcher Art, dass man weder auf die Herabminderung ihres Einflusses hinwirken, noch die Grösse desselben vorher angeben kann; mit einem Worte, es sind Ursachen, welche nicht in Rechnung gezogen werden können. Bald erzeugen sie ein zu hohes, bald ein zu niedriges Resultat.

Die regelmässigen Fehler sind vermeidlich, die zufälligen können in keiner Weise umgangen werden. Nur die letzteren werden hier unter dem Namen Beobachtungsfehler verstanden und bilden den Gegenstand des vorliegenden Capitels.

Eine weitere Annahme, die den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegt, besteht darin, dass wir uns die Messungen mit präcisen Instrumenten, nach richtigen Methoden und mit möglichster Sorgfalt ausgeführt denken, so dass ihnen nur Fehler von verhältnissmässig geringem Betrage anhaften.

Das Mittel, dem Gesetze der Wirkung unregelmässiger Fehlerquellen auf die Spur zu kommen, ist dasselbe, welches zur Erforschung unbekannter Ursachen zufälliger Ereignisse überhaupt in Anwendung gebracht wird, nämlich die Anstellung in grosser Zahl wiederholter Beobachtungen. Dies führt zu der weiteren Voraussetzung, dass die Messungen jedesmal in einer das unmittelbare Bedürfniss weit überschreitenden Anzahl ausgeführt worden sind.

Die Aufgabe der Fehlertheorie besteht nun darin, aus derlei Messungen die vortheilhaftesten Werthe der unbekannten Grössen abzuleiten und zugleich die Mittel zur Schätzung der Genauigkeit dieser Resultate anzugeben.

Begriff der Fehlerwahrscheinlichkeit. Denkt man sich die Fehler einer langen Beobachtungsreihe ihrer Grösse nach geordnet und sodann in gleich grosse Intervalle eingetheilt, so werden diese Intervalle nicht gleich viele Fehler enthalten; es wird sich vielmehr zeigen, dass die kleinen Fehler häufiger, die grösseren minder häufig auftreten, so dass man schliessen muss, die Leichtigkeit oder Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von bestimmter Grösse zu begehen, hänge von eben dieser Grösse ab. Dem Gesetze dieser Fehlervertheilung wird man um so näher kommen, je ausgedehnter die Beobachtungsreihe; stellt man sich letztere unbegrenzt vor und wählt das Intervall unendlich klein vom Betrage dx, so können die Fehler eines Intervalls als gleich gross, z. B. gleich x, gelten; die Wahrscheinlichkeit p_x, dass der bei einer Beobachtung begangene Fehler in das betrachtete Intervall falle, wird nicht nur von dx, sondern auch von der Fehlergrösse x abhängen, und zwar wird sie dx gerad proportionirt sein. Man kann daher

$$p_x = \varphi(x)\,dx$$

setzen. Wir wollen in der Folge, der kürzeren Ausdrucksweise halber, dies die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x nennen.

Die Ordinaten der Curve von der Gleichung $y = \varphi(x)$ weisen das Verhältniss der Wahrscheinlichkeiten jener Fehler auf, welche durch die zugehörigen Abscissen repräsentirt

sind. Aus diesem Grunde kann sie die Curve der Fehlerwahrscheinlichkeiten genannt werden. Die geometrische Bedeutung von p_x ist das Flächenelement dieser Curve.

Ueber die Natur der Function $\varphi(x)$ können folgende grundsätzliche Annahmen getroffen werden:

1) $\varphi(x)$ ist eine mit dem Wachsen von x abnehmende Function.

2) Sie erreicht für $x = 0$ ihr Maximum.

3) Es ist $\varphi(x) = \varphi(-x)$, indem es in der Natur der zufälligen Fehler liegt, dass sie eben so leicht positiv als negativ ausfallen können.

Diesen Annahmen wird späterhin zur endgiltigen Bestimmung von φ eine weitere hinzugefügt werden müssen.

Eintheilung. Wir theilen die Fehlertheorie in folgende Abschnitte:

I. Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeiten.

II. Ausgleichung directer Beobachtungen.

III. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

IV. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Dem II. Abschnitte wird ein Anhang über Functionen direct beobachteter Grössen, sowie über die Ermittelung einer Unbekannten beigefügt werden, von welcher eine Function wiederholt beobachtet worden ist.

I. Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeiten.

1. Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers.

99. **Theorem.** *Vorausgesetzt, dass positive Fehler sich eben so leicht ereignen können als negative Fehler desselben absoluten Betrages, so hat man, wenn mit p_x die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x, mit h eine unbestimmte von der Art der Beobachtungen abhängige Constante bezeichnet wird,*

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Erster Beweis, mit Zugrundelegung einer Hypothese über die Natur der Fehler (Methode von Hagen).

Es wird angenommen, dass jeder zufällige Fehler das Resultat des Zusammenwirkens einer sehr grossen Zahl unabhängiger Fehlerquellen sei, welche gleich grosse, theils

positive, theils negative Elementarfehler zur Folge haben, und zwar wird vorausgesetzt, dass ein positiver Elementarfehler eben so leicht eintreffen kann als ein negativer.

Wird die Zahl der Fehlerquellen mit μ, der positive Elementarfehler mit A, der negative mit B bezeichnet, so geben alle möglichen Combinationen von A und B in μ Versuchen Veranlassung zu den verschiedenen Fehlern, und die Wahrscheinlichkeiten dieser Combinationen oder der aus ihnen entspringenden Fehler sind die Glieder der Entwickelung von $(p+q)^{\mu}$, wenn nachträglich $p = q = \frac{1}{2}$ gesetzt wird.

Das grösste Glied dieser Entwickelung ist nach Nr. 51 angenähert gleich

$$G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\mu p q}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

die Wiederholungszahlen m und n von A und B in der entsprechenden Combination sind

$$m = \mu p, \quad n = \mu q.$$

Die l^{ten} Glieder vor und nach dieser Combination haben die Werthe

$$\left.\begin{aligned} G_{n-l} &= G \cdot e^{-\frac{l^2+l}{2m} + \frac{l^3+\frac{3}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4+\frac{1}{2}l^3}{3m^3} - \frac{l^2-l}{3n} - \frac{l^3-\frac{3}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3n^3} - \cdots} \\ G_{n+l} &= G \cdot e^{-\frac{l^2-l}{2m} - \frac{l^3-\frac{3}{2}l^2}{6m^2} - \frac{l^4-\frac{1}{2}l^3}{3m^3} - \frac{l^2+l}{2n} + \frac{l^3+\frac{3}{2}l^2}{6n^2} - \frac{l^4+\frac{1}{2}l^3}{3n^3} - \cdots} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

die Wiederholungszahlen von A und B sind

im ersten $\mu p + l, \quad \mu q - l,$

im zweiten $\mu p - l, \quad \mu q + l.$

Der Elementarfehler sei dem absoluten Betrage nach gleich δ. Wegen $p = q = \frac{1}{2}$ übergeht (2) in

$$G' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{2}}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

der zugehörige Fehlerwerth ist

$$\frac{\mu}{2} \cdot \delta - \frac{\mu}{2} \cdot \delta = 0;$$

Formel (3) gibt, wenn man im Exponenten nur Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ beachtet,

$$G_{n-l} = G_{n+l} = G' \cdot e^{-\frac{l^2}{\frac{\mu}{2}}}, \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

die entsprechenden Fehlerwerthe sind

$$\left(\frac{\mu}{2} + l\right)\delta - \left(\frac{\mu}{2} - l\right)\delta = l \cdot 2\delta = x,$$

$$\left(\frac{\mu}{2} - l\right)\delta - \left(\frac{\mu}{2} + l\right)\delta = -l \cdot 2\delta = -x.$$

Nun ändert sich der Fehler von einer Combination zur nächsten um 2δ, unser Fehlerintervall ist daher

$$2\delta = \varDelta x.$$

Aus $l \cdot 2\delta = l \cdot \varDelta x = x$ folgt $l = \frac{x}{\varDelta x}$; führt man dies in (β) ein, so wird

$$G_{n-l} = G_{n+l} = G' \cdot e^{-\frac{x^2}{\frac{\mu}{2}\varDelta x^2}}. \quad \ldots\ldots (\beta')$$

Soll die Möglichkeit der Entstehung aller Fehlerwerthe vorhanden sein, was die Allgemeinheit der Untersuchung unbedingt erfordert, so muss das Fehlerintervall $\varDelta x$ unendlich klein, daher gleichzeitig μ unendlich gross werden. An der Grenze ist $\frac{\mu}{2}\varDelta x^2$, welches sich aus dem grösstmöglichen Fehler $\mu\frac{\varDelta x}{2}$, der als unendlich gross angenommen werden muss, und aus dem Fehlerintervall $\varDelta x$ zusammensetzt, als Product aus einer unendlich grossen und einer unendlich kleinen Zahl einer positiven Constante gleich zu setzen; wir nehmen daher

$$\frac{\mu}{2} dx^2 = \frac{1}{h^2};$$

dadurch übergehen die Formeln (α) und (β') in

$G' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} dx$ als Wahrscheinlichkeit des Fehlers 0;

$G_{n-l} = G_{n+l} = G' \cdot e^{-h^2x^2}$ als Wahrscheinlichkeit einer Fehlergrösse x; demnach ist

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

100. **Zweiter Beweis**, mit Zugrundelegung der Hypothese vom arithmetischen Mittel (Methode von Gauss).

Es wird angenommen, dass der wahrscheinlichste Werth einer Grösse, welche wiederholt mit gleichbleibender Genauigkeit beobachtet worden, das arithmetische Mittel der Beobachtungsresultate ist.

Die aus μ Messungen hervorgegangenen Resultalte seien

$$w_1, w_2, \cdots w_\mu;$$

mit der Annahme eines Werthes a für die beobachtete Grösse werden diesen Resultaten Fehler

$$x_1 = -w_1 + a,\ x_2 = -w_2 + a, \cdots x_\mu = -w_\mu + a$$

zugeschrieben, deren Wahrscheinlichkeiten einzeln

$$\varphi(x_1)\,dx,\ \varphi(x_2)\,dx, \cdots \varphi(x_\mu)\,dx$$

sind; dx ist das constante Fehlerintervall. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Fehler aus der Annahme a ist

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_\mu)\,dx^\mu = y\,dx^\mu,$$

daher die Wahrscheinlichkeit der Annahme selbst

$$\Pi = \frac{y\,dx^\mu}{\Sigma y\,dx^\mu} = \frac{y}{\Sigma y};$$

die Summe im Nenner erstreckt sich auf alle zulässigen Werthe von a.

Nach der an die Spitze gestellten Hypothese ist der wahrscheinlichste Werth

$$a = \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_\mu}{\mu},$$

woraus

$$(-w_1 + a) + (-w_2 + a) + \cdots + (-w_\mu + a) = 0 \quad (4)$$

gefolgert wird; andererseits muss, soll diese Annahme als die wahrscheinlichste gelten, Π oder, wegen des constanten Nenners, y ein Maximum werden, also

$$y = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_\mu) = \max.$$

oder

$$l \cdot y = l \cdot \varphi(x_1) + l \cdot \varphi(x_2) + \cdots + l \cdot \varphi(x_\mu) = \max.$$

sein. Dies erfordert, wenn

$$\frac{d\,l \cdot \varphi(x_i)}{dx_i} = \varphi'(x_i)$$

zur Abkürzung genommen wird, dass

$$\varphi'(x_1) + \varphi'(x_2) + \cdots \varphi'(x_\mu) = 0$$

oder

$$(-w_1 + a)\frac{\varphi'(-w_1 + a)}{-w_1 + a} + (-w_2 + a)\frac{\varphi'(-w_2 + a)}{-w_2 + a}$$
$$+ \cdots + (-w_\mu + a)\frac{\varphi'(-w_\mu + a)}{-w_\mu + a} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

Die Beziehungen (4) und (5) zwischen den an den Beobachtungen zurückbleibenden Fehlern müssen coëxistiren; dies findet nur statt, wenn

$$\frac{\varphi'(-w_1 + a)}{-w_1 + a} = \frac{\varphi'(-w_2 + a)}{-w_2 + a} = \cdots = \text{const.},$$

oder allgemein, wenn

$$\frac{\varphi'(x)}{x} = \text{const.} = k.$$

Führt man für $\varphi'(x)$ den Werth wieder ein und integrirt die so entstandene Differentialgleichung

$$\frac{d\, l \cdot \varphi(x)}{x\, dx} = k,$$

so ergibt sich

$$\varphi(x) = c\, e^{\frac{1}{2}kx^2}.$$

Bemerkt man aber, dass φ eine mit dem Wachsen von x fallende Function sein soll, die für $x = 0$ ihr Maximum erreicht, so muss k negativ sein; wir setzen daher

$$\frac{1}{2}k = -h^2$$

und haben weiter

$$\varphi(x) = c\, e^{-h^2 x^2}.$$

Nachdem $\Sigma p_x = 1$ sein muss, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{c}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{c}{h}\sqrt{\pi} = 1,$$

woraus $c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ folgt; daher ist schliesslich

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}\, dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$

101. **Erster Zusatz.** Die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen zwei Grenzen a und b liegt, ist

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^{bh} e^{-t^2} dt,$$

folglich die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen $\pm a$ enthalten ist,

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-ah}^{ah} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt. \quad \ldots\ldots (6)$$

Dieser Werth drückt auch die Anzahl Z der zwischen 0 und a enthaltenen Fehler aus, wenn die Gesammtzahl N aller möglichen Fehler zur Einheit genommen wird; denn setzt man alle Fehler als gleich möglich voraus, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler x einer von jenen ist, die zwischen 0 und a liegen,

$$P = \frac{Z}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt,$$

woraus

$$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt \times N = \Phi(ah) N.$$

Für $N = 1$ wird thatsächlich $Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt.$

Beispiel. Für $N = 1000$ und $h = 1$ ergibt sich mit Zuhilfenahme der Tafel I. (am Ende des Buches), dass

zwischen 0 und 0·5	$1000 \cdot \Phi =$	520 Fehler
„ 0 „ 1·0		843 „
„ 0 „ 2·0		995 „ u. s. w.

liegen; daher gibt es

zwischen 0 und 0·5		520 Fehler,
„ 0·5 „ 1·0	843 — 520 =	323 „ ,
„ 1·5 „ 2·0	995 — 843 =	152 „ , u. s. w.

102. **Zweiter Zusatz.** *Man suche die obere Grenze ϱ, welche $P = \frac{1}{2}$ entspricht.*

Der verlangte Werth ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varrho e^{-t^2}\, dt \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

oder aus

$$\int_0^\varrho e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi},$$

kann also durch Näherung aus der Gleichung

$$\varrho - \frac{1}{3}\varrho^3 + \frac{1}{5}\frac{\varrho^5}{1\cdot 2} - \cdots = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$$

ermittelt werden. Am bequemsten findet man ihn durch Interpolation aus der Tafel I., indem man jenen Werth von γ rechnet, für welchen $\Phi = \frac{1}{2}$ ist. Es findet sich auf dem einen oder andern Wege

$$\varrho = 0{\cdot}476936.$$

103. **Dritter Zusatz.** *Man suche jenen Werth von a, für welchen*

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots (8)$$

wird.

Bezeichnet man den gesuchten Werth mit r und setzt $t = hx$, so wird

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr} e^{-t^2}\, dt.$$

Durch Vergleichung mit Formel (7) ergibt sich

$$\varrho = hr, \quad \text{woraus} \quad r = \frac{\varrho}{h} \quad \text{und} \quad h = \frac{\varrho}{r} \ldots\ldots (9)$$

Man bezeichnet r als *wahrscheinlichen Fehler*; eigentlich bedeutet r jene Fehler*grenze*, welche gleich häufig nicht erreicht als überschritten wird. In den ihrem absoluten Werthe nach geordneten Fehlern einer sehr langen Beobachtungsreihe würde demnach der wahrscheinliche Fehler den mittleren Platz einnehmen.

Vertauscht man in Formel (6) h mit $\frac{\varrho}{r}$, so wird

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho\frac{a}{r}} e^{-t^2}\, dt = \frac{Z}{N},$$

woraus

$$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho \frac{a}{r}} e^{-t^2} d t \times N = \Phi \left(\varrho \frac{a}{r}\right) \cdot N. \ldots (10)$$

Bezeichnet man für den Augenblick das Verhältniss $\frac{a}{r}$ mit n, so drückt im vorliegenden Falle P die Wahrscheinlichkeit aus, dass der einer Beobachtung anhaftende Fehler unter dem n fachen des wahrscheinlichen Fehlers liegt; Z gibt die Zahl solcher Fehler unter N Fehlern an.

Von der Formel (10) wird Gebrauch gemacht, wenn es sich um die Vergleichung der Fehlervertheilung bei einer wirklich ausgeführten Beobachtungsreihe mit der Theorie handelt. Der wahrscheinliche Fehler muss dabei bekannt sein.

Beispiel. Bei einer Beobachtungsreihe sei

$$r = 0''\!\cdot\!2637; \qquad N = 470.$$

Für

$$a = 0''\!\cdot\!1, \qquad 0''\!\cdot\!2, \qquad 0''\!\cdot\!3, \cdots$$

folgt

$$\frac{a}{r} = 0\cdot3792, \qquad 0\cdot7584, \qquad 1\cdot1376, \cdots;$$

multiplicirt man diese Werthe mit $\varrho = 0\cdot476936$ und sucht zu den Producten aus der Tafel I. die entsprechenden Φ, so findet sich

$$\Phi \left(\varrho \frac{a}{r}\right) = 0\cdot20186, \qquad 0\cdot39102, \qquad 0\cdot55705, \cdots$$

Werden diese Werthe in die Formel (10) eingesetzt und $N = 470$ genommen, hierauf jede Zahl von der ihr nachfolgenden abgezogen, so ergibt sich:

Zwischen 0''.0 und 0''·1 liegen 95 Fehler,
„ 0·1 „ 0·2 „ 89 „ ,
„ 0·2 „ 0·3 „ 78 „ , u. s. w.

Diese Zahlen können nun mit dem Ergebniss der wirklichen Abzählung verglichen werden. So ergab sich bei der Beobachtungsreihe, welcher dieses Beispiel entlehnt ist, folgendes Resultat (Berliner Astronom. Jahrbuch, 1834, pag. 274):

Zwischen	Anzahl der Fehler nach der Theorie:	nach der Erfahrung:
$0''0 - 0''1$	95	94
0·1 — 0·2	89	88
0·2 — 0·3	78	78
0·3 — 0·4	64	58
0·4 — 0·5	50	51
0·5 — 0·6	36	36
0·6 — 0·7	24	26
0·7 — 0·8	15	14
0·8 — 0·9	9	10
0·9 — 1·0	5	7
über 1·0	5	8.

104. **Vierter Zusatz.** Gauss bezeichnet die Grösse h als *Präcisionsmasszahl*, Laplace nennt sie das *Gewicht der Beobachtungen.*

Denn

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

nimmt mit zunehmendem x um so rascher ab, je grösser h ist; eine Beobachtungsreihe wird aber als um so genauer zu bezeichnen sein, je rascher bei ihr die Fehlerwahrscheinlichkeit mit wachsender Fehlergrösse abnimmt.

105. **Fünfter Zusatz.** In einer durch h charakterisirten Beobachtungsreihe ist die Wahrscheinlichkeit der Fehlergrenze a gleich

$$P_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt;$$

in einer andern durch h' gekennzeichneten Beobachtungsreihe hat die Fehlergrenze a' die Wahrscheinlichkeit

$$P_{a'} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a'h'} e^{-t^2} dt;$$

für $P_a = P_{a'}$ ist

$$a h = a' h', \quad \text{woraus } h : h' = a' : a;$$

gleichwahrscheinliche Fehlergrenzen aus zwei Beobachtungsreihen sind also den betreffenden Präcisionsmasszahlen umgekehrt proportionirt.

Insbesondere ist auch wegen $P_r = P_{r'} = \frac{1}{2}$

$$h : h' = r' : r;$$

die wahrscheinlichen Fehler zweier Beobachtungsreihen sind also ebenfalls den Präcisionsmasszahlen umgekehrt proportionirt.

106. **Sechster Zusatz.** In derselben Beobachtungsreihe besteht zwischen den Wahrscheinlichkeiten zweier Fehler x und x' die Proportion:

$$p_x : p_{x'} = e^{-h^2 x^2} : e^{-h'^2 x'^2},$$

insbesondere für $x' = 0$

$$p_x : p_0 = e^{-h^2 x^2} : 1;$$

umgekehrt schliesst man, wenn in einer Beobachtungsreihe

$$p_x : p_0 = e^{-m x^2} : 1,$$

dass für dieselbe $h = \sqrt{m}$ ist.

107. **Siebenter Zusatz.** Construction der Wahrscheinlichkeitscurve

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Dazu ist die Kenntniss von h erforderlich und diese wieder setzt voraus, dass entweder der zu einem Werthe von x zugehörige Werth von y, oder der wahrscheinliche Fehler r oder aber das Verhältniss zweier Werthe von y, d. h.

$$\frac{y_x}{y_0} = \frac{p_x}{p_0} = e^{-m x^2},$$

bekannt ist, weil dann $h = \sqrt{m}$.

Eigenschaften der Curve (vergleiche die beistehende Figur, welche $h = 1$ entspricht). 1) Aus $\frac{dy}{dx} = 0$ folgt

$$x = 0, \qquad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \max.$$

Der Scheitel (A) der Curve liegt also in der Ordinatenaxe im Abstande $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ vom Ursprung; die Curve selbst zerfällt in zwei symmetrische Aeste.

2) $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ gibt

$$x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}};$$

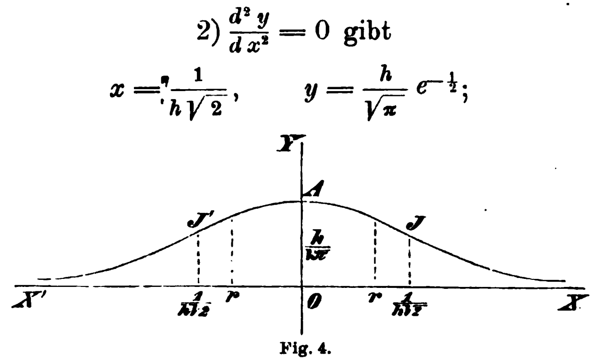


Fig. 4.

jeder der beiden Curvenäste hat also einen Inflexionspunkt (J, J').

3) Die Ordinaten nehmen sehr rasch ab, wenn x einigermassen gross geworden ist. So ist z. B., wenn $h = 1$ genommen wird:

für $x = 3$ $\quad y = 0{\cdot}000\,069\,6$,
„ $x = 4$ $\quad y = 0{\cdot}000\,000\,063\,5$,
„ $x = 5$ $\quad y = 0{\cdot}000\,000\,000\,0078$.

4) Für $x = \pm\infty$ wird $y = 0$; die X-Axe ist demnach eine Asymptote der Curve.

5) Die den Abscissen $+ r$ und $- r$ entsprechenden Ordinaten enthalten zwischen sich die halbe von der ganzen Curve und der Abscissenaxe begrenzte Fläche (Nr. 103).

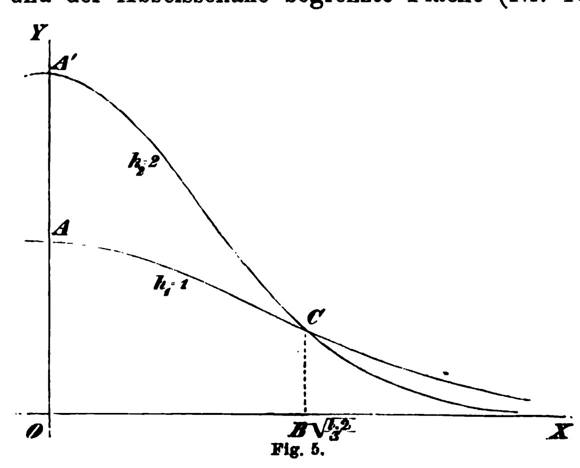


Fig. 5.

6) Die beistehende Figur stellt den Verlauf der Wahr-

scheinlichkeitscurven für zwei verschiedene Werthe von $h (h_1 = 1$ und $h_2 = 2)$ dar. Die Curven schneiden sich in zwei symmetrischen Punkten (C); die Abcisse OB entspricht dem in beiden Beobachtungsreihen gleich wahrscheinlichen Fehler; sein Werth ist

$$\sqrt{\frac{l \cdot h_2 - l \cdot h_1}{h_2{}^2 - h_1{}^2}}.$$

Die unter diesem liegenden Fehler sind in der genaueren Beobachtungsreihe wahrscheinlicher, die über ihm liegenden minder wahrscheinlich als in der ungenaueren Beobachtungsreihe.

2. Bestimmung der wahrscheinlichen Grenzen von h und r in einer durch diese Grössen charakterisirten Beobachtungsreihe.

108. *1. Bestimmung der wahrscheinlichen Grenzen von h.* Es sei a der Mittelwerth einer grossen Anzahl μ directer Beobachtungen $w_1, \cdots w_\mu$ derselben Unbekannten x.

Man kann sich einen mittleren Fehler m denken derart, dass, wenn man die wahren Fehler $-w_1 + x = \varepsilon_1, \cdots -w_\mu + x = \varepsilon_\mu$ einzeln durch ihn ersetzt, die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens aller verschiedenen Fehler dieselbe wird, wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von μ gleichen Fehlern vom Betrage m.

Wir werden weiter unten den Weg zur Berechnung von m aus den durch die Annahme von a an den Beobachtungen zurückbleibenden Fehlern angeben und setzen ihn daher vorläufig als bekannt voraus.

Bei der Präcision h ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers m

$$p_m = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 m^2} dm,$$

jene des Zusammentreffens von μ derartigen Fehlern

$$P = p_m^\mu = \frac{h^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-\mu h^2 m^2} (dm)^2.$$

Ueber die Grösse m kann, nachdem die Beobachtungen einmal angestellt worden, nicht mehr verfügt werden; P hängt dann nur mehr von der Wahl des Werthes h ab. Naturgemäss wird man der Präcisionsmasszahl jenen Werth

beilegen, welcher die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der thatsächlich stattgefundenen Beobachtungsfehler zum Maximum macht.

Um zu diesem Werthe zu gelangen, ändern wir h um den Betrag $\varDelta$ und haben dann

$$P' = \frac{(h+\varDelta)^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-\mu(h+\varDelta)^2 m^2} (dm)^\mu;$$

daraus ergibt sich

$$\frac{P'}{P} = \left(1+\frac{\varDelta}{h}\right)^\mu e^{-2\mu h m^2 \varDelta - \mu m^2 \varDelta^2}$$

und

$$l \cdot \frac{P'}{P} = \mu l \cdot \left(1+\frac{\varDelta}{h}\right) - 2\mu h m^2 \varDelta - \mu m^2 \varDelta^2$$

$$= \left(\frac{\mu}{h} - 2\mu h m^2\right) \varDelta - \mu \varDelta^2 \left(\frac{1}{2h^2} + m^2\right),$$

wenn man höhere Potenzen von $\varDelta$ vernachlässigt. Soll nun P ein absolutes Maximum, also $l \cdot \frac{P'}{P}$ beständig negativ sein, so muss der Coefficient von $\varDelta$ Null werden, also

$$\frac{\mu}{h} - 2\mu h m^2 = 0$$

sein, woraus der wahrscheinlichste Werth von h, welchen wir jetzt h_0 nennen wollen,

$$h_0 = \frac{1}{m\sqrt{2}}$$

folgt. Demnach ist

$$m = \frac{1}{h_0\sqrt{2}}$$

und für diesen besonderen Werth

$$l.\left[\frac{P'}{P}\right] = -\frac{\mu\varDelta^2}{h_0^2}, \quad \left[\frac{P'}{P}\right] = e^{-\frac{\mu\varDelta^2}{h_0^2}},$$

$$[P] : [P'] = 1 : e^{-\frac{\mu\varDelta^2}{h_0^2}}.$$

P ist die Wahrscheinlichkeit des Werthes h_0 oder von $\varDelta = 0$; P' die Wahrscheinlichkeit von $h_0 + \varDelta$ oder $\varDelta = \varDelta$; die zu letzterer Wahrscheinlichkeit gehörige Präcisionsmasszahl ist demnach (Nr. 106)

$$h' = \frac{h_0}{\sqrt{\mu}}$$

und es kann

$$[P'] = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \Delta^2} d\Delta$$

geschrieben werden. Der wahrscheinliche Fehler R der durch diese Function dargestellten Fehlerreihe ist $R = \pm \frac{\varrho}{h'}$, man kann also 1 gegen 1 wetten, dass h zwischen $h_0 \pm R$ enthalten ist; mit andern Worten, der Werth von h liegt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen den Grenzen

$$h_0 - R < h < h_0 + R.$$

Diese Grenzen übergehen, wenn man h_0 und R durch ihre Werthe

$$h_0 = \frac{1}{m\sqrt{2}}, \quad R = \frac{\varrho}{h'} = \frac{\varrho h_0}{\sqrt{\mu}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}$$

ersetzt, in

$$\frac{1}{m\sqrt{2}}\left\{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right\} < h < \frac{1}{m\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right\} \ldots \text{(a)}$$

Mit zunehmendem μ ziehen sie sich immer enger zusammen und streben gleichzeitig mit h dem Werthe $\frac{1}{m\sqrt{2}}$ zu.

109. *2. Bestimmung der wahrscheinlichen Grenzen von r.* Setzt man in $r = \frac{\varrho}{h}$ für h die eben gefundenen Grenzen ein, so ergibt sich, dass mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$

$$\frac{\varrho}{\frac{1}{m\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right\}} < r < \frac{\varrho}{\frac{1}{m\sqrt{2}}\left\{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right\}},$$

oder dass

$$\varrho\sqrt{2}\, m\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right) < r < \varrho\sqrt{2}\, m\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right) \ldots \text{(b)}$$

Auch diese Grenzen rücken mit wachsendem μ immer näher an einander, so dass für hohe Werthe von μ

$$r = \varrho\sqrt{2} \cdot m$$
$$= 0{\cdot}674489\, m \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

genommen werden kann.

Berechnung von m oder des mittleren Fehlers. Wir greifen auf die Definition von m zurück. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der wahren Beobachtungsfehler $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\mu$ ist, wenn man das constante Fehlerintervall mit dm bezeichnet,

$$\frac{h^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\varepsilon_\mu^2)} (dm)^\mu;$$

dagegen lautet die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von μ Fehlern m

$$\frac{h^\mu}{(\sqrt{\pi})^\mu} e^{-h^2\mu m^2} (dm)^\mu;$$

beide sollen einander gleich sein, daher muss

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2 = \mu m^2$$

oder

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_\mu^2}{\mu}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\mu}} \ (*) \quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

werden. Diese Formel ist jedoch zur Berechnung von m nicht tauglich, weil sie die wahren Fehler als bekannt voraussetzt, welche ebenso wie der wahre Werth x der gemessenen Grösse für immer unbekannt bleiben. Nimmt man für x seinen vortheilhaftesten Werth

$$a = \frac{w_1 + w_2 + \cdots w_\mu}{\mu}$$

an, so bleiben an den Beobachtungen die Fehler

$$-w_1 + a = \lambda_1, \quad -w_2 + a = \lambda_2, \quad \cdots - w_\mu + a = \lambda_\mu$$

zurück; hält man diese gegen die wahren Fehler

$$-w_1 + x = \varepsilon_1, \quad -w_2 + x = \varepsilon_2, \quad \cdots - w_\mu + x = \varepsilon_\mu$$

und bezeichnet die Differenz $-a + x$ für den Augenblick mit ε_a, so folgt

$$\lambda_1 + \varepsilon_a = \varepsilon_1, \quad \lambda_2 + \varepsilon_a = \varepsilon_2, \cdots \lambda_\mu + \varepsilon_a = \varepsilon_\mu, \ldots \text{(f)}$$

woraus weiter durch Quadriren und Summiren

$$[\lambda\lambda] + 2\varepsilon_a[\lambda] + \mu\,\varepsilon_a^2 = [\varepsilon\varepsilon]$$

---

*) In der Theorie der Beobachtungsfehler ist es allgemein üblich, die häufig wiederkehrenden Summen gleichartiger Grössen durch eckige Klammern zu bezeichnen, so beispielsweise für $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$ beziehungsweise $[\varepsilon\varepsilon]$, $[\lambda]$ zu schreiben.

gefunden wird; beachtet man aber, dass die algebraische Summe der vom arithmetischen Mittel zurückgelassenen Fehler Null ist (Nr. 100, Gleichung (4)), dass also $[\lambda] = 0$, so ist weiter mit Rücksicht auf Formel (d)

$$[\lambda\lambda] + \mu\,\varepsilon_a^2 = \mu m^2.$$

Für ε_a, d. i. für die Abweichung des arithmetischen Mittels vom wahren Werthe der unbekannten Grösse, kann ein Mittelwerth auf folgende Weise abgeleitet werden. Durch Summirung der Gleichungen (f) erhält man, wenn wieder die Relation $[\lambda] = 0$ beachtet wird,

$$\mu\,\varepsilon_a = [\varepsilon],$$

woraus

$$\varepsilon_a^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\mu^2} + \frac{2[\varepsilon_i\,\varepsilon_k]}{\mu^2}.$$

Bei der Natur der zufälligen Fehler muss die Summe $[\varepsilon_i\varepsilon_k]$, welche sich auf alle Combinationen ohne Wiederholung der Zeiger erstreckt, gleich Null angenommen werden, weil zu jedem positiven Producte ein gleich grosses negatives zu erwarten ist. Der aus dieser Annahme entspringende Mittelwerth von ε_a heisse m_a, so hat man

$$m_a^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\mu^2} = \frac{m^2}{\mu},$$

woraus

$$m_a = \frac{m}{\sqrt{\mu}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(g)}$$

Setzt man den eben erhaltenen Werth für ε_a in der Gleichung, bei der wir stehen geblieben sind, ein, so wird

$$[\lambda\lambda] = (\mu - 1)\,m^2,$$

woraus endlich gefunden wird

$$m = \pm\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_\mu^2}{\mu - 1}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - 1}} \ldots \text{(h)}$$

Zu der Formel (g), welche einen Mittelwerth für die Abweichung des arithmetischen Mittels vom wahren Werthe oder den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels ausdrückt, bemerken wir, dass m_a bei demselben m mit der Quadratwurzel aus μ abnimmt. Wollte man z. B., dass der mittlere Fehler des Mittels zehnmal geringer sei, als der

der einzelnen Beobachtung, so müsste man 100 derlei Beobachtungen zu einem arithmetischen Mittel vereinigen.

8. Verallgemeinerung des Ausdruckes für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers. Begriff des Gewichtes.

110. *Verallgemeinerung der Formel*

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\, dx.$$

Bei der zweiten Herleitung dieser Formel (Nr. 100) wurde vorausgesetzt, dass die Beobachtungen $w_1, \cdots w_\mu$ dieselbe Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\mu}$, d. h. dieselbe Genauigkeit haben. Wiederholen sich aber diese Werthe $w_1, \cdots w_\mu$ beziehungsweise $p_1, \cdots p_\mu$-mal, so sind ihre bezüglichen Wahrscheinlichkeiten angenähert

$$\frac{p_1}{p_1 + \cdots + p_\mu}, \quad \cdots \frac{p_\mu}{p_1 + \cdots + p_\mu};$$

der vortheilhafteste oder wahrscheinlichste Werth der Unbekannten ist in diesem Falle

$$a = \frac{p_1 w_1 + \cdots + p_\mu w_\mu}{p_1 + \cdots + p_\mu} = \frac{[p\,w]}{[p]};$$

dies ergibt die folgende Gleichung zwischen den zurückbleibenden Fehlern:

$$[p\lambda] = p_1(-w_1 + a) + p_2(-w_2 + a) + \cdots + p_\mu(-w_\mu + a) = 0, \quad (4')$$

welche an Stelle von Gleichung (4) in Nr. 100 tritt. Gleichung (5) schreibt sich dann

$$p_1(-w_1 + a)\frac{\varphi'(-w_1 + a)}{p_1(-w_1 + a)} + \cdots$$

$$+ p_\mu(-w_\mu + a)\frac{\varphi'(-w_\mu + a)}{p_\mu(-w_\mu + a)} = 0. \;.\;.\;.\;.\;. \quad (5')$$

Sollen diese Gleichungen (4′) und (5′) gleichzeitig bestehen, so muss

$$\frac{\varphi'(x_1)}{p_1 x_1} = \frac{\varphi'(x_2)}{p_2 x_2} = \cdots = \frac{\varphi'(x_\mu)}{p_\mu x_\mu} = \text{const.}$$

oder allgemein

$$\frac{\varphi'(x)}{p\,x} = k$$

sein, woraus durch Integration

$$\varphi(x) = c\, e^{-p h^2 x^2}$$

erhalten wird. Die Bestimmung der Constanten ergibt

$$c = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}},$$

so dass jetzt

$$p_x = \varphi(x)\, dx = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-p h^2 x^2}\, dx = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\, e^{-H^2 x^2}\, dx;$$

die p-mal sich wiederholende Beobachtung w kann also auch als Einzelbeobachtung aufgefasst werden, jedoch aus einer Beobachtungsreihe, deren Präcisionsmasszahl $H = h\sqrt{p}$ ist, wenn h die Präcisionsmasszahl der nur einmal auftretenden Beobachtung bedeutet.

Die Grösse p wird als Gewicht des Fehlers x oder der zugehörigen Beobachtung w bezeichnet; h ist die Präcisionsmasszahl der Beobachtung vom Gewichte 1 oder der Gewichtseinheit.

Der wahrscheinliche Fehler aus der Fehlerreihe, deren Präcisionsmasszahl H ist, hat den Werth

$$R = \frac{\varrho}{H} = \frac{\varrho}{h\sqrt{p}} = \frac{r}{\sqrt{p}},$$

r bedeutet den wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit.

111. **Erster Zusatz.** Sind w und w' Beobachtungen aus zwei verschiedenen Beobachtungsreihen der Präcisionsmasszahlen H und H', und nennt man ihre auf eine sonst willkürliche Gewichtseinheit von der Präcision h bezogenen Gewichte p p', so ist

$$H = h\sqrt{p}, \quad H' = h\sqrt{p'},$$

woraus

$$p : p' = H^2 : H'^2;$$

die Gewichte sind also den Quadraten der Präcisionsmasszahlen direct proportional.

Sind ferner R und R' die wahrscheinlichen Fehler der beiden Beobachtungsreihen, so hat man

$$R = \frac{\varrho}{h\sqrt{p}}, \quad R' = \frac{\varrho}{h\sqrt{p'}},$$

daher

$$p : p' = R'^2 : R^2;$$

bezeichnet man mit M und M' die respectiven mittleren Fehler, so kann nach Formel (c) Nr. 109

$$R = \varrho\sqrt{2}\,M, \quad R' = \varrho\sqrt{2}\,M'$$

gesetzt werden; daher auch

$$p : p' = M'^2 : M^2;$$

die Gewichte sind also den Quadraten der wahrscheinlichen und mittleren Fehler invers proportional.

Wüsste man endlich von zwei Fehlern x und x', der erste aus der einen, der zweite aus der andern Beobachtungsreihe, dass die Wahrscheinlichkeit eines jeden im Vergleich zum Fehler Null dieselbe sei, dass also

$$\frac{p_x}{p_0} = \frac{p'_{x'}}{p'_0},$$

so wäre

$$e^{-ph^2x^2} = e^{-p'h^2x'^2},$$

mithin

$$ph^2x^2 = p'h^2x'^2$$

und

$$p : p' = x'^2 : x^2;$$

die Gewichte sind also den Quadraten von Fehlern gleicher relativer Wahrscheinlichkeit (bezogen auf den Fehler Null) invers proportional.

Von letzterer Proportion wird besonders bei der Abschätzung der Gewichte zweier Beobachtungen ungleicher Genauigkeit Gebrauch gemacht. Wenn man beispielsweise annehmen darf, dass bei einem Theodolith ein Fehler von 10″ im Vergleich zum fehlerfreien Resultat eben so leicht möglich ist, als bei einem anderen Theodolith ein Fehler von 30″, so wird man den Beobachtungen mit diesen zwei Theodolithen Gewichte beilegen, welche das Verhältniss

$$p : p' = 30^2 : 10^2 = 9 : 1$$

aufweisen.

Zweiter Zusatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler x einer Beobachtung vom Gewichte p zwischen $\pm a$ enthalten ist, hat den Ausdruck

$$P = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-p h^2 x^2}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a h \sqrt{p}} e^{-t^2}\, dt;$$

bei einer Beobachtung vom Gewichte p' (bezogen auf dieselbe Gewichtseinheit) ergibt sich für die Fehlergrenzen $\pm a'$ die Wahrscheinlichkeit

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a' h \sqrt{p'}} e^{-t^2}\, dt.$$

Für $P = P'$ wird

$$a h \sqrt{p} = a' h \sqrt{p'},$$

woraus

$$p : p' = a'^2 : a^2;$$

die Gewichte sind also den Quadraten gleichwahrscheinlicher Fehlergrenzen invers proportional.

II. Ausgleichung directer Beobachtungen.

112. 1) *Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.* Zur Bestimmung der Unbekannten X seien die Beobachtungen

$$w_1, w_2, \cdots w_\mu$$

mit den Gewichten

$$p_1, p_2, \cdots p_\mu$$

angestellt worden. Mit der Annahme eines Werthes x für X werden diesen Beobachtungen Fehler

$$\lambda_1 = -w_1 + x, \quad \lambda_2 = -w_2 + x, \cdots \lambda_\mu = -w_\mu + x$$

zugeschrieben, deren Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_1 h^2 \lambda_1^2}\, dh, \quad \frac{h\sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_2 h^2 \lambda_2^2}\, d\lambda, \quad \cdots \frac{h\sqrt{p_\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_\mu h^2 \lambda_\mu^2}$$

sind. Setzt man

$$e^{-h^2(p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + \cdots + p_\mu\lambda_\mu^2)} = e^{-h^2[p\lambda\lambda]} = y,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlersystems, oder des Werthes x für X,

$$Y = \frac{y\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,dx} = K y\,dx,$$

wenn $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,dx = \frac{1}{K}$ genommen wird; substituirt man für y seinen Werth, so wird

$$Y = K e^{-h^2 [p\lambda\lambda]}\,dx; \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

diese Wahrscheinlichkeit erlangt ihren grösstmöglichen Werth, wenn

$$[p\lambda\lambda] = [p(-w + x^2] = \text{min.} \ldots\ldots (A)$$

wird, woraus sich nach bekannten Regeln der Analysis

$$[p\lambda] = [p(-w + x)] = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{[pw]}{[p]} \ldots (2)$$

ergibt. Zum Nachweise, dass dies der vortheilhafteste Werth von X, vertauschen wir x mit $x + u$, d. h. wir schreiben der Bestimmung x einen Fehler u bei; Formel (1) drückt dann die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers u aus, wenn man darin gleichzeitig du für dx schreibt; man hat also

$$Y = K e^{-h^2 [p(-w+x+u)^2]}\,du$$
$$= K e^{-h^2 \{[p(-w+x)^2] + 2u[p(-w+x)] + u^2[p]\}}\,du,$$

doch mit Hinblick auf Gleichung (2) reducirt sich dies auf

$$Y = K e^{-h^2 \{[p(-w+x)^2] + u^2[p]\}}\,du.$$

Nun ist

$$[p(-w + x)^2] = [pww] - 2x[pw] + x^2[p]$$
$$= [pww] - 2\frac{[pw]^2}{[p]} + \frac{[pw]^2}{[p]}$$
$$= [pww] - \frac{[pw]^2}{[p]};$$

daher hat man weiter

$$Y = K e^{-h^2 \left\{[pww] - \frac{[pw]^2}{[p]}\right\}} e^{-h^2 [p] u^2}\,du.$$

Zur Bestimmung von K führt die Bemerkung, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y du = 1,$$

folglich ist

$$1 = K e^{-h^2 \left\{ [p w w] - \frac{[p w]^2}{[p]} \right\}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 [p] u^2} du$$

$$= K e^{-h^2 \left\{ [p w w] - \frac{[p w]^2}{[p]} \right\}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{h \sqrt{[p]}}.$$

Dividirt man die letzte Gleichung für Y durch diese, so ergibt sich

$$Y = \frac{h \sqrt{[p]}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 [p] u^2} du$$

als Wahrscheinlichkeit eines Fehlers u in der Bestimmung

$$x = \frac{[p w]}{[p]}$$

von X. Die grösste Wahrscheinlichkeit hat der Fehler $u = 0$, demnach ist x thatsächlich der vortheilhafteste Werth von X, der aus den vorliegenden Beobachtungen abgeleitet werden kann.

113. **Zusatz.** Wird in der obigen Formel p_u an Stelle von Y geschrieben und

$$h \sqrt{[p]} = H$$

gesetzt, so hat man

$$p_u = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 u^2} du.$$

Hieraus folgt:

1) Die Präcisionsmasszahl des Mittelwerthes

$$x = \frac{[p w]}{[p]}$$

ist

$$H = h \sqrt{[p]}.$$

2) Das Gewicht der Bestimmung $X = x$ ist folglich $[p]$.

3) Der wahrscheinliche Fehler von x ist

$$r_x = \frac{\varrho}{H} = \frac{\varrho}{h \sqrt{[p]}} = \frac{r}{\sqrt{[p]}},$$

d. h. man kann 1 gegen 1 wetten, dass

$$x - r_x < X < x + r_x;$$

r bedeutet den wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit.

114. 2) *Beobachtungen gleicher Genauigkeit.* Die für diesen Fall geltenden Formeln ergeben sich aus den vorigen, wenn man

$$p_1 = p_2 = \cdots p_\mu = 1$$

setzt, woraus dann weiter

$$[p] = \mu, \quad [pw] = [w]$$

folgt. Das vortheilhafteste Resultat ist mithin

$$x' = \frac{[w]}{\mu},$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers u' dieser Bestimmung

$$p_{u'} = \frac{h\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu h^2 u'^2} du' = \frac{H'}{\sqrt{\pi}} e^{-H'^2 u'^2} du',$$

wobei $h\sqrt{\mu} = H'$ gesetzt worden.

Hieraus schliesst man:

1) Die Präcisionsmasszahl des Mittels $x' = \frac{[w]}{\mu}$ ist $h\sqrt{\mu}$, wenn h die Genauigkeitsmasszahl der einzelnen Beobachtung bedeutet.

2) Das Gewicht der Bestimmung $X = x'$ ist μ, wenn das der einzelnen Beobachtung für 1 gilt.

3) Der wahrscheinliche Fehler des Mittels x ist

$$r_x = \frac{\varrho}{H'} = \frac{\varrho}{h\sqrt{\mu}} = \frac{r}{\sqrt{\mu}},$$

die Ungleichheit

$$x' - r_x < X < x' + r_x$$

besteht also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Anmerkung. Die Gleichung (A) in Nr. 112, welche für gleich genaue Beobachtungen in die einfachere: $[\lambda\lambda] =$ min. übergeht, drückt dasjenige Princip aus, welches der Ausgleichungsrechnung in ihrer jetzt fast allgemein gebräuchlichen Form zu Grunde liegt und ihr den Namen gegeben hat. Vorausgesetzt nämlich, dass das durch die Function φ dargestellte Fehlergesetz wirklich Geltung hat, ist derjenige Werth der Unbekannten der wahrscheinlichste, welcher an den Beobachtungen Fehler zurücklässt, deren Quadratsumme ein Minimum ist. Daher die von Legendre zuerst gebrauchte Be-

zeichnungsweise „*Methode der kleinsten Quadrate*", welche später beibehalten wurde, obwohl sie der richtigeren: „Methode der kleinsten Quadrat*summen*" Platz machen sollte.

115. *Bestimmung von Mittelwerthen für u und u' oder der mittleren Fehler in den vortheilhaftesten Werthen der Unbekannten.*

1) *Bestimmung eines Mittelwerthes für u'.* Für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers u' in dem arithmetischen Mittel

$$x' = \frac{[w]}{\mu}$$

wurde der Ausdruck

$$p_{u'} = \frac{h\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu h^2 u'^2} du' \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

gefunden; dagegen ist die Wahrscheinlichkeit des mittleren Fehlers

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu-1}}$$

(vergl. Formel (h), Nr. 109) bei einer einzelnen Beobachtung

$$p_m = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 m^2} dm.$$

Insofern nun eine künftige Beobachtung auch den Werth x' liefern kann, fällt $p_{u'}$ mit p_m zusammen oder es kann $p_{u'} = p_m$ gesetzt werden; daraus folgt aber

$$\mu h^2 u'^2 = h^2 m^2;$$

bezeichnet man den aus dieser Gleichung fliessenden Werth von u' mit $m_{x'}$, so folgt

$$m_{x'} = \frac{m}{\sqrt{\mu}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

(vergl. Formel (g), Nr. 109), daher ist

$$x' - \frac{m}{\sqrt{\mu}} < X < x' + \frac{m}{\sqrt{\mu}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dieser Grenzen ist dieselbe wie jene der Grenzen $\pm m$ bei der einzelnen Beobachtung, nämlich

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^m e^{-h^2 m^2} dm = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hm} e^{-t^2} dt;$$

nun kann nach Formel (a), Nr. 108 angenähert $hm = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $= 0{\cdot}7071$ genommen werden, mithin ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\, dt = 0{\cdot}6826795.$$

116. 2) *Bestimmung eines Mittelwerthes für u.*

Eine Beobachtung w_i vom Gewichte p_i, deren Fehler ε_i ist, kann als arithmetisches Mittel

$$w_i = \frac{o_1 + o_2 + \cdots + o_{p_i}}{p_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

von p_i fingirten Beobachtungen o gleicher Genauigkeit und vom Gewichte 1 angesehen werden; denn die Wahrscheinlichkeit ihres Fehlers ε_i, nämlich

$$p_{\varepsilon_i} = \frac{h\sqrt{p_i}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-p_i h^2 \varepsilon_i^2}\, d\varepsilon_i$$

ist dieselbe, wie sie sich durch Anwendung der Formel (β) von Nr. 115 ergeben würde.

Es sei nun m der mittlere Fehler einer Beobachtung o oder der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, m_{w_i} der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels (1), so ist unter Anwendung der Formel (a)

$$m_{w_i} = \frac{m}{\sqrt{p_i}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

und mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich ein Näherungs- für m erzielen. Indem man nämlich, was ohne merklichen Fehler geschehen darf, m_{w_i} mit ε_i vertauscht, wird

$$\varepsilon_i = \frac{m}{\sqrt{p_i}}$$

oder

$$m^2 = p_i\, \varepsilon_i^2;$$

bildet man eine ähnliche Gleichung für jede der übrigen Beobachtungen und summirt dann, so ergibt sich

$$\mu\, m^2 = [p\, \varepsilon\, \varepsilon]$$

und daraus der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{\mu}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Doch kann von dieser Formel nicht unmittelbar Gebrauch gemacht werden, weil man nicht die wahren Fehler

$$\varepsilon_1 = -w_1 + X, \quad \varepsilon_2 = -w_2 + X, \quad \cdots \varepsilon_\mu = -w_\mu + X,$$

sondern blos die von dem arithmetischen Mittel x zurückgelassenen Fehler

$$\lambda_1 = -w_1 + x, \quad \lambda_2 = -w_2 + x, \quad \cdots \lambda_\mu = -w_\mu + x$$

kennt; schreibt man aber für die Differenz $-x + X$ den Buchstaben u, so wird

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 + u, \quad \varepsilon_2 = \lambda_2 + u, \quad \cdots \varepsilon_\mu = \lambda_\mu + u,$$

woraus

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [p\lambda\lambda] + 2u\,[p\lambda] + u^2\,[p]$$

oder wegen $[p\lambda] = 0$

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [p\lambda\lambda] + 2u^2\,[p]$$

folgt. Für $u^2\,[p]$ kann m^2 gesetzt werden, weil u^2 und m^2 sich nahe wie umgekehrt die entsprechenden Gewichte, $[p]$ und 1, verhalten müssen; mit dieser Bemerkung und unter Zuziehung von Formel (2) kann für letztere Gleichung

$$m^2\,(\mu - 1) = [p\lambda\lambda]$$

geschrieben werden, woraus endlich

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - 1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

erhalten wird.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers m bei einer Beobachtung vom Gewichte 1 ist

$$p_m = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 m^2}\, dm;$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers u im arithmetischen Mittel x wurde

$$p_u = \frac{h\sqrt{[p]}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 [p] u^2}\, du$$

gefunden. Insofern nun unter den künftigen fingirten Beobachtungen o der Werth x auch als Beobachtungsresultat auftreten kann, fällt p_m mit p_u zusammen, oder es wird

$$h^2 [p] u^2 = h^2 m^2;$$

den aus dieser Gleichung hervorgehenden Werth von u bezeichnen wir mit m_x und haben für ihn den Ausdruck

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(d)}$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch m, so kann dann im Nenner für $\frac{p_i}{m^2}$ der Formel (b) zufolge $\frac{1}{m_{w_i}}$ gesetzt werden; daher ist auch

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{m_w m_w}\right]}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(e)}$$

ausgedrückt durch die mittleren Fehler der einzelnen zur Berechnung von x verwendeten Grössen w.

Zusammenfassung der Formeln.

117. I. *Beobachtungen gleicher Genauigkeit.*

Vortheilhaftester Werth der Unbekannten: $x' = \frac{[w]}{\mu}$.

Mittlerer, bei jeder neuen Beobachtung w zu fürchtender Fehler

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - 1}}; \quad \text{daher } x' - m < w < x' + m.$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels

$$m_{x'} = \pm \frac{m}{\sqrt{\mu}}; \quad \text{daher } x' - \frac{m}{\sqrt{\mu}} < X < x' + \frac{m}{\sqrt{\mu}}.$$

Gewicht von x' in Bezug auf die einzelne Beobachtung als Gewichtseinheit gleich μ.

Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung

$$\varrho\sqrt{2} \cdot m\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right) < r < \varrho\sqrt{2} \cdot m\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right).$$

Wahrscheinlicher Fehler des arithmetischen Mittels

$$r_{x'} = \frac{\varrho}{H'} = \frac{\varrho}{h\sqrt{\mu}} = \frac{r}{\sqrt{\mu}};$$

man kann also 1 gegen 1 wetten, dass

$$\varrho\sqrt{2}\frac{m}{\sqrt{\mu}}\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right) < r_{x'} < \varrho\sqrt{2}\frac{m}{\sqrt{\mu}}\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right)$$

und dass

$$x' - r_{x'} < X < x' + r_{x'}.$$

118. II. *Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.*

Vortheilhaftester Werth der Unbekannten: $x = \frac{[pw]}{[p]}$.

Mittlerer Fehler einer Beobachtung o vom Gewichte 1:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - 1}}.$$

Mittlerer Fehler der Beobachtung w_i vom Gewichte p_i, wenn sie als arithmetisches Mittel von p_i Beobachtungen o des Gewichtes 1 aufgefasst wird:

$$m_{w_i} = \pm\frac{m}{\sqrt{p_i}}.$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels x:

$$m_x = \pm\frac{m}{\sqrt{[p]}}; \text{ daher } x - \frac{m}{\sqrt{[p]}} < X < x + \frac{m}{\sqrt{[p]}}.$$

Gewicht von x in Bezug auf die Beachtung o gleich $[p]$. Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers der Gewichtseinheit

$$\varrho\sqrt{2}\,m\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right) < r < \varrho\sqrt{2}\,m\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{\mu}}\right).$$

Wahrscheinlicher Fehler des arithmetischen Mittels

$$r_x = \frac{\varrho}{h\sqrt{[p]}} = \frac{r}{\sqrt{[p]}}.$$

110. **Erstes Beispiel.** Ein Winkel ist ohne Repetition vierzehnmal mit demselben Theodolith und von demselben Beobachter gemessen worden, so dass den Messungen *gleiche Genauigkeit* beigelegt werden kann. Die folgende Tabelle enthält ausser den Beobachtungsresultaten die übrigen zur Rechnung erforderlichen Grössen.

Nr.	w	λ $-w+x'$	$\lambda\lambda$
1	17° 56′ 45″00	— 5″37	28·84
2	31·25	+ 8·38	70·22
3	42·50	— 2·87	8·24
4	45·00	— 5·37	28·84
5	37·50	+ 2·13	4·54
6	38·33	+ 1·30	1·69
7	27·50	+ 12·13	147·14
8	43·33	— 3·70	13·69
9	40·63	— 1·00	1·00
10	36·25	+ 3·38	11·42
11	42·50	— 2·87	8·24
12	39·17	+ 0·46	0·21
13	45·00	— 5·37	28·84
14	40·83	— 1·20	1·44
	$[w] = 554·79$	+ 27·78	354·35
		— 27·75	$[\lambda\lambda]$
		$[\lambda] = +0·03$	

1. $x' = \frac{[w]}{\mu} = \frac{554''79}{14} = 39''63.$

2. $\lambda = -w + x'$ } in der Tabelle.
3. λ^2

4. $m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - 1}} = \sqrt{\frac{354·35}{13}} = 5''22;$

der Werth einer neuen Beobachtung liegt demnach zwischen

$39·63 - 5·22 = 34''41$ und $39·63 + 5·22 = 44''85.$

5. $m_{x'} = \frac{m}{\sqrt{\mu}} = \frac{5·22}{\sqrt{14}} = 1''40;$

der wahre Werth des Winkels liegt also zwischen

$39·63 - 1·40 = 38''23$ und $39·63 + 1·40 = 41''03.$

6. $r = \varrho\sqrt{2}\,.\,m = 0·67449 \times 5·22 = 3''52,$

$r_{x'} = \varrho\sqrt{2}\,.\,m = 0·67449 \times 1·40 = 0''94;$

man kann also eins gegen eins wetten, eine künftige Beobachtung werde zwischen

$$39.63 - 3{\cdot}52 = 36{\cdot}11'' \quad \text{und} \quad 39{\cdot}63 + 3{\cdot}52 = 43{\cdot}15'',$$

und der wahre Werth von X werde zwischen

$$39{\cdot}63 - 0{\cdot}94 = 38{\cdot}69'' \quad \text{und} \quad 38{\cdot}63 + 0{\cdot}94 = 40{\cdot}57''$$

liegen.

120. **Zweites Beispiel.** Derselbe Winkel wurde vierzehnmal nach dem Repetitionsverfahren, jedesmal mit einer andern Anzahl von Repetitionen, gemessen, so dass die einzelnen Beobachtungen von *verschiedener Genauigkeit* sind. Die folgende Tabelle enthält die zur Rechnung nöthigen Zahlenangaben.

Nr.	w	p	$p\,w$	λ	$p\,\lambda$	$\lambda\,\lambda$	$p\,\lambda\,\lambda$
1	17° 56′ 45·00″	5	225·00	— 5·22	— 26·10	27·248	136·[illegible]4
2	31·25	4	125·00	+ 8·53	+ 34·12	72·761	291·04
3	42·50	5	212·50	— 2·72	— 13·60	7.398	36·99
4	45·00	3	135·00	— 5·22	— 15·66	27·248	81·74
5	37·50	3	112·50	+ 2·28	+ 6·84	5·198	15·59
6	38·33	3	115·00	+ 1·45	+ 4·35	2·103	6·31
7	27·50	3	82·50	+ 12·28	+ 36·84	150·798	452·39
8	43·33	3	130·00	— 3·55	— 10·65	12·603	37·81
9	40·63	4	162·50	— 0·85	— 3·40	0·723	2·89
10	36·25	2	72·56′	+ 3·53	+ 7·06	12·461	24·92
11	42·50	3	127·50	— 2·72	— 8·16	7·398	22·19
12	39·17	3	117·50	+ 0·61	+ 1·83	0·372	1·12
13	45·00	2	90.00	— 5·22	— 10·44	27·248	54·49
14	40·83	3	122·50	— 1·05	— 3·15	1·103	3·31
		46	1830·00		+ 91·04		1167·03
					— 91·16		
					— 0·12		

1. $x = \frac{[p\,w]}{[p]} = \frac{1830}{46} = 39{\cdot}78''.$

2. $\lambda = -w + x$;
3. $p\,\lambda$; zur Controle muss $[p\,\lambda] = 0$ sein;
4. $\lambda\,\lambda$ und $p\,\lambda\,\lambda$;

} aus der Tabelle zu entnehmen.

5. $m = \sqrt{\frac{[p\,\lambda\,\lambda]}{\mu - 1}} = \sqrt{\frac{1167{\cdot}03}{13}} = 9{\cdot}475''.$

6. $m_x = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{9{\cdot}475}{\sqrt{46}} = 1{\cdot}397''.$

7. Die Formel $m_{w_i} = \frac{m}{\sqrt{p_i}}$ ergibt die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen wie folgt:

$m_{w_1} = m_{w_3} = 4''\!\cdot24;$

$m_{w_2} = m_{w_9} = 4''\!\cdot74;$

$m_{w_4} = m_{w_5} = m_{w_6} = m_{w_7} = m_{w_8} = m_{w_{11}} = m_{w_{12}} = m_{w_{14}} = 5''\!\cdot47;$

$m_{w_{10}} = m_{w_{13}} = 6''\!\cdot70.$

121. **Drittes Beispiel.** In den Jahren 1845—46 wurde die Polhöhe der Moskauer Universitäts-Sternwarte durch Beobachtungen an verschiedenen Sternen bestimmt. Für jeden der benutzten Sterne wurden die Beobachtungen zu einem Mittelwerthe vereinigt und die Genauigkeit desselben ermittelt. Nun sollen alle Einzelresultate zu einem Schlusswerthe vereinigt werden.

Die folgende Tabelle enthält zunächst die Mittelwerthe w nebst ihren mittleren Fehlern m; aus letzteren wurden die Gewichte p nach der Formel $p = \frac{1}{m^2}$ berechnet; es entspricht dies der Wahl einer Beobachtung vom mittleren Fehler 1 zur Gewichtseinheit, weil dann $p : 1 = 1^2 : m^2$. Die weiteren Colonnen enthalten die zur Rechnungscontrole und Genauigkeitsbestimmung erforderlichen Zahlen.

Name des Sterns	w	m	p	pw	λ	$p\lambda$	$p\lambda\lambda$
β Draconis	55° 45′ 20″·29	0″·368	7·397	150·084	— 0·527	— 3·898	2·0540
γ Draconis	19·39	·400	6·241	121·013	+ ·373	+ 2·328	0·8681
ν^1 Draconis	20·61	·295	11·488	236·768	— ·847	— 9·729	8·2415
ν^2 Draconis	20·27	·341	8·600	174·322	— ·507	— 4·360	2·2102
$\varsigma\iota$ Draconis	19·81	·279	12·871	254·975	— ·047	— 0·605	0·0283
$\varkappa$ Cygni	19·61	·590	2·871	56·301	+ ·153	+ 0·439	0·0671
γ Urs. maj.	19·22	·308	10·515	202·098	+ ·543	+ 5·710	3·0998
ζ Urs. maj. pr.	19·08	·265	14·199	270·916	+ ·683	+ 9·696	6·6237
ζ Urs. maj. sq.	19·71	·381	6·888	135·763	+ ·053	+ 0·364	0·0192
			81·070	1602·240		+ 18·537 — 18·592	23·2119

1. $x = \frac{[pw]}{[p]} = \frac{1602\cdot240}{81\cdot070} = 19''\cdot763.$

2. $m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - 1}} = \sqrt{\frac{23\cdot2119}{8}} = 1''\cdot703.$

3. Der mittlere Fehler von x kann entweder aus dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit gerechnet werden:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{1\cdot703}{\sqrt{81\cdot070}} = 0''\cdot189,$$

oder aber aus den mittleren Fehlern der einzelnen w (vergl. Formel (*e*), Nr. 116):

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{m_w\, m_w}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{[p]}} = 0''\cdot111.$$

Die beiden Resultate stimmen nicht überein, wie es sich namentlich bei einer so geringen Anzahl von Beobachtungen wohl stets ergeben wird. Doch ist der ersteren Rechnungsweise der Vorzug zu geben, weil sie mit den *wirklichen* Abweichungen der einzelnen w vom arithmetischen Mittel rechnet, während die zweite blos ihre *mittleren* Fehler beachtet. Die Nichtübereinstimmung zeigt sich auch darin, dass der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, welcher vor der Rechnung mit 1 angenommen wurde, sich aus der Ausgleichnung selbst zu 1·703 ergibt.

Rechnet man mit dem ersten Werthe weiter, so wird

4. $r_x = \varrho\sqrt{2}\cdot m_x = 0\cdot67449 \times 0\cdot189 = 0''\cdot126.$

5. Auf Grund der vorliegenden Beobachtungen ist also 1 gegen 1 zu wetten, die Polhöhe der Moskauer Sternwarte liege zwischen den Grenzen

$$55^0\, 45'\, 19''\cdot763 \pm 0''\cdot126.$$

Functionen direct beobachteter Grössen.

122. Es sei V eine Function der direct beobachteten Grössen $X_1, X_2, \cdots$, für welche aus wiederholten Beobachtungen die vortheilhaftesten Werthe $x_1, x_2, \cdots$ mit den wahrscheinlichen Fehlern $r_1, r_2, \cdots$ oder anderen, zur Beurtheilung der Genauigkeit dienlichen Grössen abgeleitet worden sind. Man verlangt den wahrscheinlichsten Werth von V nebst seinem wahrscheinlichen oder mittleren Fehler.

Bevor wir an die allgemeine Lösung dieser Aufgabe schreiten, betrachten wir einige besondere Fälle.

Erster Fall. Es sei

$$V = \alpha X,$$

wobei α eine gegebene Constante. Sind $w_1, w_2, \cdots w_\mu$ die einzelnen Beobachtungen, welche zur Bestimmung von X angestellt wurden und aus welchen der vortheilhafteste Werth

$$x = \frac{[w]}{\mu}$$

folgt, und nimmt man für V einen Werth v an, so werden damit den Grössen w Fehler λ beigelegt, welche aus den Gleichungen

$$v = \alpha (w_1 + \lambda_1),$$
$$v = \alpha (w_2 + \lambda_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sich wie folgt als Functionen von v ergeben:

$$\lambda_1 = \frac{v}{\alpha} - w_1,$$
$$\lambda_2 = \frac{v}{\alpha} - w_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ihre Wahrscheinlichkeiten sind

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \lambda_1^2} d\lambda, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \lambda_2^2} d\lambda, \cdots$$

daher die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens

$$Y = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots)} (d\lambda)^\mu$$
$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2\left(\left(\frac{v}{\alpha} - w_1\right)^2 + \left(\frac{v}{\alpha} - w_2\right)^2 + \cdots\right)} (d\lambda)^\mu$$
$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2\left\{\mu \frac{v^2}{\alpha^2} - 2\frac{v}{\alpha}[w] + [w\,w]\right\}} (d\lambda)^\mu$$
$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-\mu h^2\left\{\frac{v^2}{\alpha^2} - 2\frac{v}{\alpha} x + \frac{[w\,w]}{\mu}\right\}} (d\lambda)^\mu$$
$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{\mu h^2\left\{x^2 - \frac{[w\,w]}{\mu} - \left(\frac{v}{\alpha} - x\right)^2\right\}} (d\lambda)^\mu;$$

der vortheilhafteste Werth von v ist derjenige, für welchen Y ein Maximum wird, und dies trifft offenbar ein, wenn der allein variable Subtrahend im Exponenten verschwindet, wenn also

$$\frac{v}{\alpha} - x = 0$$

wird, woraus

$$v = \alpha x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

folgt. Setzt man ferner

$$v = \alpha x + u,$$

woraus

$$\frac{v}{\alpha} - x = \frac{u}{\alpha},$$

so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers u in der Bestimmung $v = \alpha x$

$$p_u = \frac{Y\,du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y\,du},$$

oder nach Aufhebung der dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren

$$p_u = \frac{e^{-\frac{\mu}{\alpha^2}h^2u^2}\,du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu}{\alpha^2}h^2u^2}\,du} = \frac{\frac{\sqrt{\mu}}{\alpha}h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{\mu}{\alpha^2}h^2u^2}\,du;$$

die Präcision in der Bestimmung von v ist also

$$h_v = \frac{\sqrt{\mu}}{\alpha}\,h,$$

daher der wahrscheinliche Fehler

$$r_v = \frac{\varrho}{h_v} = \frac{\alpha\varrho}{h\sqrt{\mu}} = \alpha\frac{r}{\sqrt{\mu}} = \alpha r_x \quad \ldots\ldots (2)$$

Zweiter Fall. Es sei

$$V = X_1 + X_2;$$

die vortheilhaftesten Werthe von X_1 und X_2 und deren wahrscheinliche Fehler mögen beziehungsweise x_1, x_2, r_1, r_2 heissen; die Gewichte p_1, p_2 dieser Bestimmungen ergeben sich, wenn man eine Beobachtung vom wahrscheinlichen Fehler r zur Gewichtseinheit wählt, aus den Proportionen

$$p_1 : 1 = r^2 : r_1^2, \qquad p_2 : 1 = r^2 : r_2^2 \quad \ldots\ldots (a)$$

Irgend ein Werth v von V ist als Summe irgend welcher Werthe ξ_1, ξ_2 von X_1 und X_2 anzusehen, deren Abweichungen von den wahrscheinlichsten Werthen, nämlich $-\xi_1 + x_1$, $-\xi_2 + x_2$, die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-p_1 h^2 (x_1-\xi_1)^2}\, d\,\xi_1, \quad \frac{h\sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-p_2 h^2 (x_2-\xi_2)^2}\, d\,\xi_2$$

besitzen; für das Zusammentreffen dieser Werthe ξ_1, ξ_2 besteht also die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{h^2\sqrt{p_1\,p_2}}{\pi}\, e^{-h^2[p_1(x_1-\xi_1)^2+p_2(x_2-\xi_2)^2]}\, d\,\xi_1\, d\,\xi_2$$

$$= \frac{h^2\sqrt{p_1\,p_2}}{\pi}\, e^{-h^2[p_1(x_1-\xi_1)^2+p_2(x_2-v+\xi_1)^2]}\, d\,\xi_1\, d\,v,$$

wenn man ξ_2 durch v und ξ_1 ausdrückt; die Wahrscheinlichkeit Y, dass bei irgend einem Werthe ξ_1 der Werth v zu Stande kommt, wird erhalten, wenn man obigen Ausdruck in Bezug auf ξ_1, v also als constant ansehend, innerhalb der Grenzen $\pm\infty$ integrirt; dies ergibt nach einiger Transformation

$$Y = \frac{h^2\sqrt{p_1\,p_2}}{\pi}\, e^{-h^2\frac{p_1\,p_2}{p_1+p_2}(v-x_1-x_2)^2}\, d\,v$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(p_1+p_2)\left\{\xi_1-\frac{p_1 x_1-p_2 x_2+p_2 v}{p_1+p_2}\right\}^2} d\,\xi_1$$

$$= \frac{h\sqrt{p_1\,p_2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{p_1+p_2}}\, e^{-h^2\frac{p_1\,p_2}{p_1+p_2}(v-x_1-x_2)^2}\, d\,v.$$

Daraus ergibt sich sofort der wahrscheinlichste Werth von v, nämlich

$$v = x_1 + x_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man dagegen $v = x_1 + x_2 + u$, so gibt der obige Ausdruck die Wahrscheinlichkeit des Fehlers u in der Bestimmung $v = x_1 + x_2$, nämlich

$$p_u = \frac{h\sqrt{p_1\,p_2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{p_1+p_2}}\, e^{-h^2\frac{p_1\,p_2}{p_1+p_2}u^2}\, d\,u;$$

die Präcision dieser Bestimmung ist also

$$h_v = h\sqrt{\frac{p_1\,p_2}{p_1+p_2}},$$

ihr Gewicht

$$p_v = \frac{p_1\,p_2}{p_1+p_2},$$

der wahrscheinliche Fehler (im Hinblick auf (a))

$$r_v = \frac{\varrho}{h_v} = \frac{\varrho}{h}\sqrt{\frac{p_1+p_2}{p_1\,p_2}} = \sqrt{\frac{r^2}{p_1}+\frac{r^2}{p_2}} = \sqrt{r_1^2+r_2^2} \quad ..(2)$$

Dritter Fall. Durch Zusammenfassung der Ergebnisse des ersten und zweiten Falles folgt, dass der wahrscheinlichste Werth von

$$V = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots$$

ausgedrückt ist durch

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

sein wahrscheinlicher Fehler durch

$$r_0 = \sqrt{\alpha_1^2 r_1^2 + \alpha_2^2 r_2^2 + \cdots} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Vierter Fall. Ist nun allgemein

$$V = F(X_1, X_2, \cdots),$$

so kann eine näherungsweise Lösung dadurch erzielt werden, dass man

$$X_1 = x_1 + \varepsilon_1,$$
$$X_2 = x_2 + \varepsilon_2,$$
$$\cdots\cdots$$

nimmt, und unter der Voraussetzung, die ε seien so klein, dass man Glieder mit höheren Potenzen derselben unterdrücken kann, obige Function nach dem Taylor'schen Satze entwickelt; auf diese Weise wird

$$V = F(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, \cdots)$$
$$= F(x_1, x_2, \cdots) + \frac{dF}{dx_1}\varepsilon_1 + \frac{dF}{dx_2}\varepsilon_2 + \cdots$$

und der Fall erscheint auf den vorigen zurückgeführt. Die wahrscheinlichsten Werthe von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ sind Null, weil $x_1, x_2, \cdots$ die wahrscheinlichsten Werthe von $X_1, X_2, \cdots$ sind; daher der vortheilhafteste Werth von V

$$v = F(x_1, x_2, \cdots); \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

die wahrscheinlichen Fehler der Bestimmungen $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0, \cdots$ sind die nämlichen wie jene der Annahmen $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots$ nämlich $r_1, r_2, \cdots$, daher der wahrscheinliche Fehler von v dem vorigen Falle gemäss

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 r_1^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right) r_2^2 + \cdots} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Erster Zusatz. Derselbe Zusammenhang, welcher zwischen den wahrscheinlichen Fehlern besteht, gilt, wegen

einfacher Proportionalität, auch von den mittleren Fehlern; so ist im allgemeinsten Falle

$$m_v = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots}$$

Zweiter Zusatz. Wirken bei der Bestimmung einer Grösse mehrere von einander unabhängige Fehlerursachen mit, welche einzeln die wahrscheinlichen Fehler r_1, $r_2, \cdots$ oder die mittleren Fehler $m_1, m_2, \cdots$ erzeugen würden, so ist der wahrscheinliche, beziehungsweise mittlere Fehler des Gesammtresultates

$$r_v = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \cdots},$$

$$m_v = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots}.$$

Erstes Beispiel (aus Bessel's „Ostpreuss. Gradmessung"). Der aus der Vergleichung einer Doppeltoise mit der Normaltoise zurückgebliebene mittlere Fehler in der nominellen Länge (X) der ersteren betrug

$$m = 0{\cdot}000985 \text{ par. L.}$$

Bei der Basismessung wurde die Doppeltoise im Mittel 465·5 mal angelegt, daher die Basislänge (bis auf die besonders gemessenen Reste)

$$v = 465{\cdot}5 x = a x;$$

der mittlere Fehler dieser Bestimmung ist

$$m_v = a m = 465{\cdot}5 \times 0{\cdot}000985 = 0{\cdot}459 \text{ par. L.}$$

Zweites Beispiel (aus Baeyer's „Küstenvermessung"). Die Berliner Basis (V) wurde in zwei Abschnitten (X_1, X_2) gemessen, so dass schliesslich

$$V = X_1 + X_2$$

zu nehmen war; nun wurde

$$x_1 = 588{\cdot}509172 \text{ tois.}, \quad m_1 = 1{\cdot}006 \text{ par. L.},$$

$$x_2 = 610{\cdot}213860 \quad „ \quad m_2 = 0{\cdot}887 \quad „$$

gefunden; daher ist

$$v = x_1 + x_2 = 1198{\cdot}723032 \text{ tois.},$$

$$\mu_v = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = 1{\cdot}3408 \text{ par. L.}$$

Drittes Beispiel. Der Fehler einer Richtungsbeobachtung entsteht durch das Zusammenwirken zweier Fehlerquellen: der Einstellung des Fernrohrs auf das Signal, welches die Richtung bezeichnet, und der Ablesung am getheilten Kreise. Ist bei einem Instrumente der mittlere Einstellungsfehler

$$m_1 = 0''837,$$

der mittlere Ablesefehler

$$m_2 = 1\cdot872,$$

so ist der mittlere Fehler einer mit diesem Instrumente beobachteten Richtung

$$m_r = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = 2''051,$$

und der mittlere Fehler eines Winkels (als Unterschied zweier Richtungen)

$$m_w = \sqrt{m_r^2 + m_r^2} = 2\cdot051\sqrt{2} = 2''9.$$

Directe Beobachtungen einer Function von einer Unbekannten.

123. I. *Fehlergleichungen.*

Es sei φ eine Function $f(X)$ der Unbekannten X, gegeben durch μ Beobachtungen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_\mu$, X_0 ein sehr genäherter Werth von X, ξ die sehr kleine Verbesserung desselben, so dass

$$X = X_0 + \xi.$$

Werden die Fehler der Beobachtungen mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\mu$ bezeichnet, so hat man mit Vernachlässigung höherer Potenzen von ξ

$$\varphi_1 + \varepsilon_1 = f_1(X_0 + \xi) = f_1(X_0) + f_1'(X_0)\,\xi,$$
$$\varphi_2 + \varepsilon_2 = f_2(X_0 + \xi) = f_2(X_0) + f_2'(X_0)\,\xi,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_\mu + \varepsilon_\mu = f_\mu(X_0 + \xi) = f_\mu(X_0) + f_\mu'(X_0)\,\xi.$$

Setzt man Kürze halber

$$f_1(X_0) - \varphi_1 = n_1 \cdots f_\mu(X_0) - \varphi_\mu = n_\mu, \quad \text{ferner}$$
$$f_1'(X_0) \quad = a_1, \cdots f_\mu'(X_0) \quad = a_\mu,$$

so übergehen obige Gleichungen in

$$\varepsilon_1 = n_1 + a_1 \xi,$$
$$\varepsilon_2 = n_2 + a_2 \xi,$$
$$\cdots\cdots$$

124. II. *Vortheilhaftester Werth von* ξ.

1) Die Beobachtungen sind von gleicher Genauigkeit.

Nimmt man für ξ einen Werth x an, so lässt derselbe Fehler $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ zurück, für welche die folgenden Fehlergleichungen bestehen:

$$\lambda_1 = n_1 + a_1 x,$$
$$\lambda_2 = n_2 + a_2 x;$$
$$\cdots\cdots$$

die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler sind

$$p_{\lambda_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \lambda_1^2} d\lambda, \quad p_{\lambda_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \lambda_2^2} d\lambda, \cdots$$

daher die Wahrscheinlichkeit ihres gleichzeitigen Bestehens

$$Y = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2 [\lambda\lambda]} (d\lambda)^{\mu};$$

dieselbe wird ein Maximum, wenn

$$[\lambda\lambda] = (n_1 + a_1 x)^2 + (n_2 + a_2 x)^2 + \cdots = \text{min.},$$

woraus zunächst

$$[a\lambda] = a_1 (n_1 + a_1 x) + a_2 (n_2 + a_2 x) \cdots = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

und schliesslich der vortheilhafteste Werth von ξ:

$$x = -\frac{[an]}{[aa]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

folgt.

Um nachzuweisen, dass dies der vortheilhafteste Werth ist, und gleichzeitig seine Genauigkeit zu ermitteln, ersetzen wir x durch $x + u$ und suchen die Wahrscheinlichkeit von u; dieselbe ist gleich

$$p_u = \frac{Y du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y du} = \frac{e^{-h^2 [(n + ax + au)^2]} du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 [(n + ax + au)^2]} du} = \frac{Z}{N}.$$

125. *Berechnung von Z.* Der Exponent von e kann wie folgt transformirt werden:

$$[(n + ax + au)^2] = [(n + ax)^2] + 2u [a(n + ax)] + u^2 [aa]$$
$$= [\lambda\lambda] + [aa] u^2,$$

weil mit Beachtung der Gleichung (1) das Mittelglied verschwindet. Demnach ist

$$Z = e^{-h^2[\lambda\lambda]} e^{-h^2[aa]u^2}\, du.$$

126. *Berechnung von N.* Durch Integration des letzten Ausdruckes innerhalb der Grenzen $\pm\infty$ ergibt sich

$$N = e^{-h^2[\lambda\lambda]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2[aa]u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}}\, e^{-h^2[\lambda\lambda]}.$$

Dividirt man Z durch N, so wird

$$p_u = \frac{h\sqrt{[aa]}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2[aa]u^2}\, du.$$

Die grösste Wahrscheinlichkeit hat der Fehler $u = 0$, das wahrscheinlichste Resultat ist also thatsächlich

$$x = -\frac{[an]}{[aa]};$$

das Gewicht dieser Bestimmung, bezogen auf die einzelne Beobachtung von φ als Gewichtseinheit, ist $[aa]$; ist daher m der mittlere, r der wahrscheinliche Fehler der Gewichtseinheit, so hat man

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{[aa]}},\quad r_x = \frac{r}{\sqrt{[aa]}}; \dots\dots\dots (3)$$

darin ist nach bekannten Formeln

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - 1}},\quad r = \varrho\sqrt{2}\cdot m. \dots\dots\dots (4)$$

127. 2) Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit. Derselbe Rechnungsgang führt zu den Formeln:

$$[pa\lambda] = 0. \dots\dots\dots\dots\dots (1')$$

$$x = -\frac{[pan]}{[paa]} \dots\dots\dots\dots (2')$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{[paa]}},\quad r_x = \frac{r}{\sqrt{[paa]}} \dots\dots\dots (3')$$

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - 1}},\quad r = \varrho\sqrt{2}\cdot m. \dots\dots\dots (4')$$

Anmerkung. Die Gleichungen (1) und (1′) dienen zur Controle der Rechnung.

128. **Beispiel.** Bezeichnet S die Intensität eines durch eine Tangentenbussole geführten Stromes, α den Ablenkungswinkel der Magnetnadel, T die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, in derselben Einheit ausgedrückt wie S, so besteht zwischen den genannten Grössen die Beziehung

$$S = T \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Wird S an der chemischen Wirkung des Stromes gemessen und gleichzeitig α beobachtet, so lässt sich ein Werth für T in chemischen Einheiten ableiten. Wir benützen hiezu folgende zu Jever ausgeführte Beobachtungsreihe (W. v. Freeden, die Praxis der Meth. d. kl. Quadrate, Braunschweig 1863):

Barometerstand: 761·77 mm
Temperatur des Gases: 6°·20 C.

Nr.	S Knallgasmenge in ccm. pro 60 Sec.	α Ablenkungswinkel an der Bussole	p Anzahl d. Beobachtungen
1	4·63	9° 8′	2
2	10·08	14 10	3
3	10·25	14 15	1
4	14·00	16 0	1
5	14·50	19 0	2
6	17·50	21 0	1
7	17·83	23 0	3
8	20·67	25 55	3
9	21·00	24 38	2
10	23·58	29 1	3
11	24·50	28 0	1

In den Fehlergleichungen $\lambda = n + a x$ ist in diesem Falle

$$n = -S, \quad a = \operatorname{tg} \alpha,$$

während x den vortheilhaftesten Werth von T bedeutet; die Beobachtungen von α werden als fehlerfrei in die Rechnung eingeführt.

Die folgende Tabelle enthält die zur Bestimmung von x und m_x sowie zur Controle der Rechnung nöthigen Zahlen.

a	$-n$	p	paa	$-pan$	λ	$pa\lambda$	$p\lambda\lambda$
0·1608	4·63	2	0·0516	1·4890	+ 2·28	+ 0·73	10·3968
·2524	10·08	3	·1911	7·6326	+ 0·77	+ 0·59	1·7787
·2540	10·25	1	·0645	2·6035	+ 0·67	+ 0·17	0·4489
·2867	14·00	1	·0820	4·0138	— 1·68	— 0·48	2·8224
·3443	14·50	2	·2372	9·9848	+ 0·30	+ 0·21	0·1800
·3839	17·50	1	·1472	6·7183	— 1·00	— 0·38	1·0000
·4245	17·83	3	·5406	22·7064	+ 0·41	+ 0·53	0·5043
·4859	20·67	3	·7080	30·1305	+ 0·21	+ 0·31	0·1323
·4585	21·00	2	·4202	19·2570	— 1.29	— 1·19	3·3282
·5547	23·58	3	·9231	39·2394	+ 0·26	+ 0·43	0·2028
·5317	24·50	1	·2827	13·0267	— 1·65	— 0·88	2·7225
			3·6482	156·8020		+ 2·97	23·5169
						— 2·93	

$$1.\quad x = -\frac{[pan]}{[paa]} = \frac{156·8020}{3·6482} = \overset{ccm}{42·98}.$$

$$2.\quad m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - 1}} = \sqrt{\frac{23·5169}{10}} = \overset{ccm}{1·53}; \quad r = \varrho\sqrt{2}\cdot m = \overset{ccm}{1·03}.$$

$$3.\quad m_x = \frac{m}{\sqrt{[paa]}} = \frac{1·53}{\sqrt{3·6482}} = \overset{ccm}{0·80}; \quad r_x = \varrho\sqrt{2}\cdot m_x = \overset{ccm}{0·54}.$$

Diese Werthe bedürfen der Reduction auf den Normalbarometerstand von 760^{mm} und die Gastemperatur 0^0 C.; man erhält so

$$x' = 42·98\,\frac{761·77}{760·00}\cdot\frac{1}{1 + 0·003665\cdot 6·2} = \overset{ccm}{42·11}$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$r_{x'} = \overset{ccm}{0·53}.$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$S = \overset{ccm}{42·11}\cdot \operatorname{tg}\alpha$$

können also die Angaben der betreffenden Tangentenbussole am Versuchsorte in chemisches Mass umgerechnet werden.

Bezieht man den bei dieser Gelegenheit erhaltenen Werth für T auf Weber's absolute Stromeinheit (entsprechend $\overset{ccm}{1·0489}$ Knallgas pro 60 Sec.), so wird

$$x'' = \frac{42·11}{1·0489} = 40·15,$$

und hieraus endlich ergibt sich, wenn r den in *mm* ausgedrückten Bussolenradius bedeutet (am vorliegenden Instrumente war $r = 150^{mm}$), das absolute Mass der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus

$$x''' = \frac{2\pi \cdot x''}{r} = \frac{6 \cdot 283 \cdots \times 40 \cdot 15}{150} = 1 \cdot 6818$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$r_{x'''} = \pm 0 \cdot 0213.$$

Die Versuche stammen aus dem Jahre 1856; für das Jahr 1852 ergibt sich aus Lamont's Karten $T = 1 \cdot 71$, ein Werth, welcher den hier gefundenen wahrscheinlichen Grenzen sehr nahe steht.

III. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

1. Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

129. I. *Fehlergleichungen.* Die Function

$$\varphi = F(X, Y, Z, T)$$

der vier unbekannten Grössen X, Y, Z, T sei μ mal mit gleicher, durch h charakterisirter Genauigkeit beobachtet worden; die Ergebnisse dieser Beobachtungen mögen φ_1, $\varphi_2, \cdots \varphi_\mu$ sein.

Sind X_0, Y_0, Z_0, T_0 sehr genäherte Werthe der Unbekannten, (x), (y), (z), (t) die wahren Verbesserungen derselben, so bestehen für die wahren Beobachtungsfehler die Gleichungen

$$\varepsilon_1 = -\varphi_1 + F_1\big(X_0 + (x),\ Y_0 + (y),\ Z_0 + (z),\ T_0 + (t)\big),$$
$$\varepsilon_2 = -\varphi_2 + F_2\big(X_0 + (x),\ Y_0 + (y),\ Z_0 + (z),\ T_0 + (t)\big),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Unter der Voraussetzung, dass (x), (y), $\cdots$ Grössen von sehr geringem Betrage sind, kann man sich bei Entwickelung der rechtsstehenden Functionswerthe nach dem Taylor'schen Satze auf die ersten Potenzen derselben beschränken; setzt man dabei

$$F_1(X_0, Y_0, Z_0, T_0) = F_1, \qquad F_2(X_0, Y_0, Z_0, T_0) = F_2, \cdots$$

$$\frac{dF_1}{dX_0} = a_1, \qquad \frac{dF_2}{dX_0} = a_2, \cdots$$

$$\frac{dF_1}{dY_0} = b_1, \qquad \frac{dF_2}{dY_0} = b_2, \cdots$$

$$\frac{dF_1}{dZ_0} = c_1, \qquad \frac{dF_2}{dZ_0} = c_2, \cdots$$

$$\frac{dF_1}{dT_0} = d_1, \qquad \frac{dF_2}{dT_0} = d_2, \cdots$$

endlich

$$-\varphi_1 + F_1 = n_1, \qquad -\varphi_2 + F_2 = n_2, \cdots$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= n_1 + a_1(x) + b_1(y) + c_1(z) + d_1(t) \\ \varepsilon_2 &= n_2 + a_2(x) + b_2(y) + c_2(z) + d_2(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

An Stelle der ursprünglichen Unbekannten $X, Y, \cdots$ sind jetzt die Verbesserungen $(x), (y), \cdots$ ihrer Näherungswerthe $X_0, Y_0, \cdots$ getreten.

130. II. *Vortheilhafteste Werthe der Unbekannten (x), (y), (z), (t).*

Sobald man für $(x), (y), \cdots$ irgend welche Werthe $x, y, \cdots$ annimmt, werden den Beobachtungen Fehler $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ beigelegt, welche durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \\ \lambda_2 &= n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2)$$

gegeben sind; die Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler sind

$$p_{\lambda_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda_1^2} d\lambda, \qquad p_{\lambda_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda_2^2} d\lambda, \cdots$$

daher die Wahrscheinlichkeit ihrer Coëxistenz

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} e^{-h^2[\lambda\lambda]} (d\lambda)^{\mu}.$$

Diese wird am grössten, wenn

$$\Omega = [\lambda\lambda] = \text{min.}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

d. h. wenn die Grössen $x, y, \cdots$ aus dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial x} &= \left[\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right] = [a\lambda] = 0,\\
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial y} &= \left[\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right] = [b\lambda] = 0,\\
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial z} &= \left[\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right] = [c\,\lambda] = 0,\\
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial t} &= \left[\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right] = [d\lambda] = 0
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

berechnet werden. Ersetzt man hier die λ durch ihre Werthe aus (2), so gelangt man zu den *Normalgleichungen*

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t + [an] &= 0,\\
[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,t + [bn] &= 0,\\
[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,t + [cn] &= 0,\\
[ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,t + [dn] &= 0,
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (5)$$

deren Zahl mit jener der Unbekannten übereinstimmt und welche die vortheilhaftesten Werthe der letzteren liefern.

Wie aus der Gleichung (3) ersichtlich, kehrt hier das schon bei Ausgleichung directer Beobachtungen hervorgehobene Ausgleichungsprincip wieder. Es sind nämlich abermals jene Werthe der Unbekannten die wahrscheinlichsten, welche Fehler zurücklassen, deren Quadratsumme ein Kleinstes ist.

131. III. *Auflösung der Normalgleichungen.* Diese erfolgt am besten nach der Substitutionsmethode. Man berechnet nämlich x aus der ersten Gleichung und setzt den Werth in die übrigen ein. Aus der ersten der so erhaltenen drei Gleichungen drückt man y aus und substituirt den Werth in die beiden andern. Aus der ersten von diesen bestimmt man z und führt den Werth in die andere ein; aus dieser lässt sich dann t ermitteln.

Wir wollen das eben angedeutete Verfahren jetzt durchführen.

Aus der ersten Normalgleichung ist

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,t - \frac{[an]}{[aa]};\ \ldots\ (5')$$

diesen Werth substituiren wir in die drei übrigen, setzen dabei zur Abkürzung:

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb \cdot 1],$$

$$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc \cdot 1],$$

$$[bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad] = [bd \cdot 1],$$

$$[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc \cdot 1],$$

$$[cd] - \frac{[ac]}{[aa]}[ad] = [cd \cdot 1]; \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$[dd] - \frac{[ad]}{[aa]}[ad] = [dd \cdot 1];$$

$$[bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an] = [bn \cdot 1],$$

$$[cn] - \frac{[ac]}{[aa]}[an] = [cn \cdot 1],$$

$$[dn] - \frac{[ad]}{[aa]}[an] = [dn \cdot 1],$$

und erhalten auf diese Weise:

$$\begin{aligned} [bb \cdot 1]\,y + [bc \cdot 1]\,z + [bd \cdot 1]\,t + [bn \cdot 1] &= 0, \\ [bc \cdot 1]\,y + [cc \cdot 1]\,z + [cd \cdot 1]\,t + [cn \cdot 1] &= 0, \quad .\ (7) \\ [bd \cdot 1]\,y + [cd \cdot 1]\,z + [dd \cdot 1]\,t + [dn \cdot 1] &= 0. \end{aligned}$$

132. Die erste dieser Gleichungen gibt

$$y = -\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\,z - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\,t - \frac{[bn \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}; \quad \ldots\ldots (7')$$

führt man diesen Werth in die beiden andern ein und setzt

$$[cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bc \cdot 1] = [cc \cdot 2],$$

$$[cd \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bd \cdot 1] = [cd \cdot 2];$$

$$[dd \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bd \cdot 1] = [dd \cdot 2]; \quad \ldots\ldots (8)$$

$$[cn \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bn \cdot 1] = [cn \cdot 2],$$

$$[dn \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bn \cdot 1] = [dn \cdot 2],$$

so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}[cc\cdot 2]\,z+[cd\cdot 2]\,t+[cn\cdot 2]=0,\\ [cd\cdot 2]\,z+[dd\cdot 2]\,t+[dn\cdot 2]=0.\end{array}\right\}\ldots\ldots (9)$$

133. Die erste davon liefert

$$z=-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\,t-\frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]};\ldots\ldots\ldots (9')$$

substituirt man diesen Werth in die zweite und setzt gleichzeitig

$$\left.\begin{array}{l}[dd\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cd\cdot 2]=[dd\cdot 3];\\ [dn\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cn\cdot 2]=[dn\cdot 3],\end{array}\right\}\ldots\ldots (10)$$

so folgt

$$[dd\cdot 3]\,t+[dn\cdot 3]=0,\ldots\ldots\ldots (11)$$

woraus

$$t=-\frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}.\ldots\ldots\ldots\ldots (11')$$

Durch successive Anwendung der Gleichungen (9′), (7′), (5′) erhält man z, y, x.

134. *Reducirte Normalgleichungen.* In Bezug auf die Berechnung der Unbekannten ersetzen die Gleichungen (5′), (7′), (9′), (11′) das ursprüngliche System (5); wir bezeichnen sie daher als reducirte Normalgleichungen und stellen sie hier in etwas abgeänderter Form nochmals zuammen:

$$\left.\begin{array}{l}x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z+\frac{[ad]}{[aa]}t+\frac{[an]}{[aa]}=0,\\ \quad y+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z+\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}t+\frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0,\\ \qquad z+\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}t+\frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=0,\\ \qquad\quad t+\frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}=0.\end{array}\right\}\ldots (12)$$

135. **Theorem.** *Setzt man bei beliebigen Werthen von* x, y, z, t

$$\left.\begin{array}{l}A\ \ =[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,t+[an],\\ B'\ =[bb\cdot 1]\,y+[bc\cdot 1]\,z+[bd\cdot 1]\,t+[bn\cdot 1],\\ C''=[cc\cdot 2]\,z+[cd\cdot 2]\,t+[cn\cdot 2],\\ D'''=[dd\cdot 3]\,t+[dn\cdot 3],\end{array}\right\}(13)$$

so ist

$$1)\ \Omega = [\lambda\lambda] = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B'^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{C''^2}{[cc\cdot 2]} + \frac{D'''^2}{[dd\cdot 3]} + [nn\cdot 4]; \quad (14)$$

ferner kann nachgewiesen werden, dass

2) *die Nenner* $[aa]$, $[bb\cdot 1]$, $[cc\cdot 2]$, $[dd\cdot 3]$ *sämmtlich positiv sind.*

Beweis. 1) Den Gleichungen (2) zufolge ist

$$\Omega = [\lambda\lambda] = [(ax + by + cz + dt + n)^2]; \quad . . (3')$$

entwickelt man diesen Ausdruck und ordnet seine Glieder nach den Potenzen der Veränderlichen, so wird

$$\begin{aligned}\Omega = {} & [aa]x^2 + 2\{[ab]y + [ac]z + [ad]t + [an]\}x \\ & + [bb]y^2 + 2\{[bc]z + [bd]t + [bn]\}y \\ & + [cc]z^2 + 2\{[cd]t + [cn]\}z \\ & + [dd]t^2 + 2\ [dn]t + [nn] \\ = {} & Px^2 + 2Qx + R = \frac{(Px+Q)^2}{P} + R - \frac{Q^2}{P},\end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung

$$P = [aa],$$
$$Q = [ab]y + [ac]z + [ad]t + [an]$$

setzt; daraus folgt

$$Px + Q = A.$$

136. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{P} = {} & \frac{[ab]}{[aa]}[ab]y^2 + 2\left\{\frac{[ab]}{[aa]}[ac]z + \frac{[ab]}{[aa]}[ad]t + \frac{[ab]}{[aa]}[an]\right\}y \\ & + \frac{[ac]}{[aa]}[ac]z^2 + 2\left\{\frac{[ac]}{[aa]}[ad]\ t + \frac{[ac]}{[aa]}[an]\right\}z \\ & + \frac{[ad]}{[aa]}[ad]t^2 + 2\ \frac{[ad]}{[aa]}[an]t + \frac{[an]}{[aa]}[an];\end{aligned}$$

bedient man sich der Abkürzungen (6) sowie der weiteren

$$[nn] - \frac{[an]}{[aa]}[an] = [nn\cdot 1], \quad . . . . . . (15)$$

so findet sich

$$\begin{aligned}\Omega - \frac{(Px+Q)^2}{P} = \Omega - \frac{A^2}{[aa]} = R - \frac{Q^2}{P} & \\ = [bb\cdot 1]y^2 + 2\{[bc\cdot 1]z + [bd\cdot 1]t + [bn\cdot 1]\}y & \\ + [cc\cdot 1]z^2 + 2\{[cd\cdot 1]t + [cn\cdot 1]\}z & \\ + [dd\cdot 1]t^2 + 2\ [dn\cdot 1]t + [nn\cdot 1] & \\ = P'y^2 + 2Q'y + R' = \frac{(P'y+Q')^2}{P'} + R' - \frac{Q'^2}{P'}, & \quad (16)\end{aligned}$$

indem man

$$P' = [bb.1]$$

$$Q' = [bc \cdot 1]z + [bd \cdot 1]t + [bn \cdot 1]$$

setzt, woraus dann im Hinblick auf die Gleichungen (13)

$$P'y + Q' = B',$$

also

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{[bb \cdot 1]} = R' - \frac{Q'^2}{P'}$$

folgt.

137. Weiter ist

$$\frac{Q'^2}{P'} = \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc \cdot 1]z^2 + 2\left\{\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd \cdot 1]t + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bn \cdot 1]\right\}z$$
$$+ \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd \cdot 1]t^2 + 2\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bn \cdot 1]t + \frac{[bn.1]}{[bb.1]}[bn \cdot 1];$$

bedient man sich der Abkürzungen (8) und der weitern

$$[nn \cdot 1] - \frac{[bn.1]}{[bb.1]}[bn \cdot 1] = [nn \cdot 2], \quad . \; . \; . \quad (17)$$

so gelangt man zu der Gleichung

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{[bb.1]} = R' - \frac{Q'^2}{P'}$$
$$= [cc.2]z^2 + 2\{[cd.2]t + [cn.2]\}z$$
$$+ [dd.2]t^2 + 2[dn.2]t + [nn.2]$$
$$= P''z^2 + 2Q''z + R''$$
$$= \frac{(P''z + Q'')^2}{P''} + R'' - \frac{Q''^2}{P''}, \quad . \; . \; . \quad (18)$$

wenn

$$P'' = [cc.2],$$
$$Q'' = [cd.2]z + [cn.2]$$

genommen wird; daraus folgt im Hinblick auf (13)

$$P''z + Q'' = C'',$$

also

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{[bb.1]} - \frac{C''^2}{[cc.2]} = R'' - \frac{Q''^2}{P''}.$$

138. Nun ist aber

$$\frac{Q''^2}{P''} = \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd \cdot 2]t^2 + 2\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cn \cdot 2]t + \frac{[cn.2]}{[cc.2]}[cn \cdot 2];$$

berücksichtigt man die Abkürzungen (10) und führt die weitere

$$[nn \cdot 2] - \frac{[cn.2]}{[cc.2]}[cn \cdot 2] = [nn \cdot 3] \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{[bb.1]} - \frac{C''^2}{[cc.2]} &= R'' - \frac{Q''^2}{P''} \\ &= [dd \cdot 3]\,t^2 + 2\,[dn \cdot 3]\,t + [nn \cdot 3] \\ &= P'''t^2 + 2Q'''t + R''' \\ &= \frac{(P'''t + Q''')^2}{P'''} + R''' - \frac{Q'''^2}{P'''}, \quad (20)\end{aligned}$$

wobei

$$P''' = [dd \cdot 3],$$
$$Q''' = [dn \cdot 3]$$

genommen wurde, so dass im Hinblick auf (13)

$$P'''t + Q''' = D'''$$

und

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{[bb.1]} - \frac{C''^2}{[cc.2]} - \frac{D'''^2}{[dd.3]} = R''' - \frac{Q'''^2}{P'''}$$

wird.

Endlich ist

$$\frac{Q'''^2}{P'''} = \frac{[dn.3]}{[dd.3]}[dn \cdot 3],$$

und setzt man noch

$$[nn \cdot 3] - \frac{[dn.3]}{[dd.3]}[dn \cdot 3] = [nn \cdot 4], \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

so wird

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{[bb.1]} - \frac{C''^2}{[cc.2]} - \frac{D'''^2}{[dd.3]} = R''' - \frac{Q'''^2}{P'''} = [nn \cdot 4],$$

daher, wie behauptet worden,

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B'^2}{[bb.1]} + \frac{C''^2}{[cc.2]} + \frac{D'''^2}{[dd.3]} + [nn \cdot 4].$$

Anmerkung. Für die vortheilhaftesten Werthe von x, y, z, t bestehen die Gleichungen (12), daher ist für sie

$$A = 0, \quad B' = 0, \quad C'' = 0, \quad D''' = 0,$$

und die minimale Fehlerquadratsumme wird

$$\min \Omega = \min [\lambda\lambda] = [nn \, . \, 4].$$

Die Berechnung dieses Werthes ist durch die Gleichungen (15), (17), (19), (21) vorgeschrieben.

139. 2) Nun gehen wir daran, zu zeigen, dass die Nenner $[aa]$, $[bb.1]$, . . . des Ausdruckes (14) durchwegs positiv sind.

a) Bei dem ersten ist es unmittelbar einleuchtend, da

$$[aa] = a_1^2 + a_2^2 + \ldots.$$

eine Summe von Quadraten ist.

b) Aus Gleichung (16) geht hervor, dass die Function $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ frei ist von x; man wäre daher zu dieser Function auch gelangt, wenn man aus Ω mit Hilfe der Gleichung $A = 0$ die Variable x eliminirt, oder auch, wenn man diese Variable schon aus den einzelnen λ mittelst der Gleichung $A = 0$ ausgeschieden und die so entstandene neue Quadratsumme: $\Omega - \frac{A^2}{[aa]} = [\lambda'\lambda'] = [(b'y + c'z + d't + n')^2]$ entwickelt hätte; aus dieser Form sieht man aber augenblicklich, dass der Coefficient von y^2, welcher nach (16) eben $[bb.1]$ ist, als Quadratsumme $[b'b']$ positiv ausfällt.

c) Durch ähnliche Betrachtung der Function $\Omega - \frac{A^2}{[aa]} - \frac{B'^2}{[bb.1]}$, welche weder x noch y enthält, wie dies aus Gleichung (18) hervorgeht, gelangt man zu der Ueberzeugung, dass auch $[cc.2]$ als Summe von Quadraten darstellbar und daher positiv ist; u. s. w.

140. **Anmerkung.** Für die folgende Untersuchung bedienen wir uns der Abkürzungen

$$\Omega' = \frac{B'^2}{[bb.1]} + \frac{C''^2}{[cc.2]} + \frac{D'''^2}{[dd.3]} + [nn\cdot 4],$$

$$\Omega'' = \frac{C''^2}{[cc.2]} + \frac{D'''^2}{[dd.3]} + [nn\cdot 4],$$

$$\Omega''' = \frac{D'''^2}{[dd.3]} + [nn\cdot 4];$$

es ist dann

$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \Omega'$, darin enthält nur das erste Glied die Variable x;

$\Omega' = \frac{B'^2}{[bb.1]} + \Omega''$, darin enthält nur das erste Glied die Variable y;

$\Omega'' = \frac{C''^2}{[cc.2]} + \Omega'''$, darin enthält nur das erste Glied die Variable z;

$\Omega''' = \frac{D'''^2}{[dd.3]} + [nn \cdot 4]$, darin enthält nur das erste Glied die Variable t.

141. IV. *Es ist nachzuweisen, dass die durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Werthe der Unbekannten die wahrscheinlichsten sind.*

Wir wollen den Nachweis für die Unbekannte (t) führen, für welche der Werth

$$t_0 = -\frac{[dn.3]}{[dd.3]}\text{*)}$$

gefunden wurde. Dieser Bestimmung hafte ein Fehler τ an, so dass

$$(t) = t_0 + \tau;$$

es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit von τ.

Die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens irgend welcher Werthe x, y, z von (x), (y), (z) ist (Nr. 130)

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2\Omega}\, dx\, dy\, dz;$$

dabei wird der Werth t von (t), der in Ω auftritt, als constant angesehen, also auch der ihm entsprechende Fehler τ. Nun aber kann sich der besondere Werth t mit jedem Werthe von x, von y und von z verbinden, und nachdem letztere Grössen im analytischen Sinne aller Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ fähig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der besondere Werth von t mit irgend einem Werthe von x, y und z zusammentrifft,

$$Y = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu \int_{-\infty}^{\infty}{}_{3} e^{-h^2\Omega}\, dx\, dy\, dz,$$

also die Wahrscheinlichkeit des besonderen Werthes t oder des ihm entsprechenden Fehlers τ

---

*) Für den Augenblick sollen die aus dem Gleichungssystem (5) fliessenden Werthe der Unbekannten mit x_0, y_0, z_0, t_0 bezeichnet, x, y, z, t dagegen als Variable angesehen werden.

$$Q = \frac{Y dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y dt} = \frac{dt \int\limits_{3}^{}\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega} dx\, dy\, dz}{\int\limits_{4}^{}\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega} dx\, dy\, dz\, dt} = \frac{Z}{N}.$$

142. *Berechnung von Z.* Es ist $\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \Omega'$, wobei A allein die Variable x enthält; ferner folgt aus

$$A = [aa]x + [ab]y + \cdots$$

wegen der völligen Unabhängigkeit der Grössen $x, y, \ldots$

$$\frac{dA}{[aa]} = dx;$$

mit diesen Bemerkungen wird

$$Z = dt \int\limits_{2}^{}\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'} dy\, dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \frac{A^2}{[aa]}} \frac{dA}{[aa]}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}} dt \int\limits_{2}^{}\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega'} dy\, dz.$$

Ferner ist $\Omega' = \frac{B'^2}{[bb.1]} + \Omega''$, worin nur B' die Variable y enthält, und da

$$B' = [bb.1]\,y + [bc.1]\,z + \cdots,$$

so folgt

$$\frac{dB'}{[bb.1]} = dy;$$

demnach wird weiter

$$Z = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega''} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \frac{B'^2}{[bb.1]}} \frac{dB'}{[bb.1]}$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^2}{h^2\sqrt{[aa][bb.1]}} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\Omega''} dz.$$

Durch weitere Anwendung der in Nr. 140 zusammengestellten Beziehungen wird endlich

$$Z = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{h^3\sqrt{[aa]\,[bb.1]\,[cc.2]}}\,dt\,e^{-h^2\Omega''}$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^3}{h^3\sqrt{[aa]\,[bb.1]\,[cc.2]}}\,dt\,e^{-h^2\left\{\frac{D'''^2}{[dd.3]}+[nn.4]\right\}}.$$

143. *Berechnung von N.* Um N zu erhalten, bedarf es nur einer Integration des letzteren Ausdruckes in Bezug auf t innerhalb der Grenzen $\pm\infty$; man erhält so

$$N = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{h^3\sqrt{[aa]\,[bb.1]\,[cc.2]}}\,e^{-h^2[nn.4]}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\frac{D'''^2}{[dd.3]}}dt,$$

oder durch Einsetzung des Werthes für D''' aus Nr. 135 (13)

$$N = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{h^3\sqrt{[aa]\,[bb.1]\,[cc.2]}}\,e^{-h^2[nn.4]}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\left\{\sqrt{[dd.3]}\,t+\frac{[dn.3]}{\sqrt{[dd.3]}}\right\}^2}dt$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^4}{h^4\sqrt{[aa]\,[bb.1]\,[cc.2]\,[dd.3]}}\,e^{-h^2[nn.4]}.$$

Mithin ist die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$Q = \frac{Z}{N} = \frac{h\sqrt{[dd.3]}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\frac{D'''^2}{[dd.3]}}\,dt$$

$$= \frac{h\sqrt{[dd.3]}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2[dd.3]\left\{t+\frac{[dn.3]}{[dd.3]}\right\}^2}dt$$

$$= \frac{h\sqrt{[dd.3]}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2[dd.3]\,\tau^2}\,d\tau;$$

dieselbe wird für $\tau = 0$, also für

$$t = -\frac{[dn.3]}{[dd.3]} = t_0$$

am grössten, daher ist dies der vortheilhafteste Werth der Unbekannten (t). In gleicher Weise wäre der Beweis für die übrigen Unbekannten zu führen.

144. V. **Gewichte der Unbekannten.** Aus dem Ausdrucke für Q geht unmittelbar hervor, dass das Gewicht eines Fehlers τ in

$$t = -\frac{[dn.3]}{[dd.3]},$$

also das Gewicht p_t von t, gegeben ist durch

$$p_t = [dd.3].$$

Bei der successiven Elimination, wie sie in Nr. 131—133 durchgeführt worden, ist demnach der Coefficient der Unbekannten, welche zuletzt allein zurückbleibt, zugleich ihr Gewicht.

Um daher die Gewichte der Unbekannten zu finden, wiederhole man die erwähnte Elimination mit veränderter Ordnung der Unbekannten so oft, bis jede derselben einmal an letzter Stelle erschienen ist. In diesem Verfahren liegt zugleich eine Controle der Rechnung.

Bei dem hier betrachteten Falle von vier Unbekannten würde man die Elimination vollständig durchführen in der Ordnung

1) x, y, z, t, wodurch das Gewicht p_t sich ergibt,

und ebenso in der Ordnung*)

2) t, z, y, x, wodurch das Gewicht p_x sich ergibt.

In 1) bleiben nach Ausscheidung von x und y zwei Gleichungen mit z, t**); diese kehrt man um und erhält aus

3) t, z das Gewicht p_z.

In 2) bleiben nach Ausscheidung von t und z zwei Gleichungen mit y, x; diese kehrt man um und erhält aus

4) x, y das Gewicht p_y.

145. VI. *Mittlere Fehler der Unbekannten.* Bezeichnet m den mittleren Fehler einer Beobachtung, welche als Gewichtseinheit gewählt wurde, und sind m_x, m_y, m_z, m_t die mittleren Fehler der vortheilhaftesten Werthe der Unbekannten, so hat man

*) Für diese Ordnung der Unbekannten sind die Normalgleichungen in folgender Art zu schreiben:

$$[dd]\,t + [cd]\,z + [bd]\,y + [ad]\,x + [dn] = 0,$$
$$[cd]\,t + [cc]\,z + [bc]\,y + [ac]\,x + [cn] = 0,$$
$$[bd]\,t + [bc]\,z + [bb]\,y + [ab]\,x + [bn] = 0,$$
$$[ad]\,t + [ac]\,z + [ab]\,y + [aa]\,x + [an] = 0.$$

**) Diese Gleichungen lauten

$$[cc.2]\,z + [cd.2]\,t + [cn.2] = 0,$$
$$[cd.2]\,z + [dd.2]\,t + [dn.2] = 0,$$

und nach vollzogener Umkehrung:

$$[dd.2]\,t + [cd.2]\,z + [dn.2] = 0,$$
$$[cd.2]\,t + [cc.2]\,z + [cn.2] = 0.$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}}, \quad m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}}, \quad m_z = \frac{m}{\sqrt{p_z}}, \quad m_t = \frac{m}{\sqrt{p_t}};$$

ihre Bestimmung setzt also die Kenntniss von m voraus.

146. VII. *Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit.* Aus den wahren Beobachtungsfehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\mu$ ist unmittelbar

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Diese Formel ist zur wirklichen Berechnung nicht verwendbar, weil die ε unbekannt sind; man muss m durch die von den vortheilhaftesten Werthen der Unbekannten zurückgelassenen Fehler λ auszudrücken suchen.

Den Gleichungen (1), Nr. 129, zufolge ist allgemein

$$\varepsilon = n + a(x) + b(y) + c(z) + d(t),$$

den Gleichungen (2) zufolge

$$\lambda = n + ax + by + cz + dt;$$

daraus ergibt sich, wenn man wie früher schon

$$(x) - x = \xi, \quad (y) - y = \eta, \quad (z) - z = \zeta, \quad (t) - t = \tau$$

setzt,

$$\varepsilon = \lambda + a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau; \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

jede der μ Beobachtungen liefert eine Gleichung von dieser Form; quadrirt man diese Gleichungen und bildet nachher ihre Summe mit Berücksichtigung der Relationen (4): $[a\lambda] = 0$, $[b\lambda] = 0$, $[c\lambda] = 0$, $[d\lambda] = 0$, so wird

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda] = [(a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau)^2].$$

Die rechte Seite ist von derselben Form wie in Gleichung (3'), Nr. 135, mit dem Unterschiede, dass an Stelle von $x, y, \ldots$ die Fehler $\xi, \eta, \ldots$ getreten sind, während n fehlt; die Entwickelung muss demnach zu einem ähnlichen Resultate führen wie dort. Setzt man conform mit den Gleichungen (13)

$$\begin{aligned}
A_0 &= [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + [ad]\tau, \\
B_0' &= \quad + [bb.1]\eta + [bc.1]\zeta + [bd.1]\tau, \\
C_0'' &= \quad + [cc.2]\zeta + [cd.2]\tau, \\
D_0''' &= \quad + [dd.3]\tau,
\end{aligned}$$

so wird

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda] = \frac{A_0^2}{[aa]} + \frac{B_0'^2}{[bb.1]} + \frac{C_0''^2}{[cc.2]} + \frac{D_0'''^2}{[dd.3]} \,. \quad (24)$$

Aus (23) folgt, wenn man wieder beachtet, dass $[a\lambda] = 0$, $[b\lambda] = 0, \ldots$, das den Normalgleichungen analoge System

$$\begin{aligned}
[aa]\,\xi + [ab]\,\eta + [ac]\,\zeta + [ad]\,\tau &= [a\varepsilon],\\
[ab]\,\xi + [bb]\,\eta + [bc]\,\zeta + [bd]\,\tau &= [b\varepsilon],\\
[ac]\,\xi + [bc]\,\eta + [cc]\,\zeta + [cd]\,\tau &= [c\varepsilon],\\
[ad]\,\xi + [bd]\,\eta + [cd]\,\zeta + [dd]\,\tau &= [d\varepsilon],
\end{aligned}$$

aus welchem durch ähnliche Vorgänge wie oben, durch allmälige Ausscheidung von ξ, η, ζ nämlich, die reducirten Gleichungen

$$\begin{aligned}
[aa]\,\xi + [ab]\,\eta + [ac]\,\zeta + [ad]\,\tau &= [a\varepsilon],\\
[bb.1]\eta + [bc.1]\zeta + [bd.1]\tau &= [b\varepsilon.1],\\
[cc.2]\zeta + [cd.2]\tau &= [c\varepsilon.2],\\
[dd.3]\tau &= [d\varepsilon.3]
\end{aligned}$$

erhalten werden. Dadurch aber verwandelt sich Gleichung (24) in

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda] = \frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]} + \frac{[b\varepsilon.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[c\varepsilon.2]^2}{[cc.2]} + \frac{[d\varepsilon.3]^2}{[dd.3]} \,. \quad (24')$$

und es erscheint die Differenz $[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda]$ als Function der ε, welche wie unabhängige direct beobachtete Grössen vom wahrscheinlichsten Werthe 0 und dem mittleren Fehler m angesehen werden können. Diese Bemerkung ermöglicht eine Schätzung des obigen Unterschiedes oder des Fehlers, welchen man begehen würde durch Vertauschung von $[\varepsilon\varepsilon]$ mit $[\lambda\lambda]$; die Schätzung erfolgt nach dem dritten Fall in Nr. 122.

Es ist nämlich:

1) Wahrscheinlichster Werth der Function $[a\varepsilon] = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots$ die Nulle.

Mittlerer Fehler dieser Bestimmung:

$$m_{[a\varepsilon]} = m\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots} = m\sqrt{[aa]}.$$

2) Wahrscheinlichster Werth der Function

$$[b\varepsilon\cdot 1] = [b\varepsilon] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\varepsilon] = \left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\varepsilon_1 + \left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_2 + \cdots$$

die Nulle.

Mittlerer Fehler dieser Bestimmung:

$$m_{[b\varepsilon\,.\,1]} = m\sqrt{\left[\left(b - \frac{[ab]}{[aa]}a\right)^2\right]}$$

$$= m\sqrt{[bb] - 2\frac{[ab]}{[aa]}[ab] + \frac{[ab]}{[aa]}[ab]}$$

$$= m\sqrt{[bb\,.\,1]}.$$

3) Wahrscheinlichster Werth der Function

$$[c\varepsilon\,.\,2] = [c\varepsilon\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[b\varepsilon\cdot 1]$$

$$= [c\varepsilon] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\varepsilon] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\left([b\varepsilon] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\varepsilon]\right)$$

$$= \left\{c_1 - \frac{[ac]}{[aa]}a_1 - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\right\}\varepsilon_1 + \cdots$$

die Nulle.

Mittlerer Fehler dieser Bestimmung:

$$m_{[c\varepsilon\cdot 2]} = m\sqrt{\left[\left\{c - \frac{[ac]}{[aa]}a - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\left(b - \frac{[ab]}{[aa]}a\right)\right\}^2\right]}$$

$$= m\sqrt{\left[\left(c - \frac{[ac]}{[aa]}a\right)^2\right] - 2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left[\left(c - \frac{[ac]}{[aa]}a\right)\left(b - \frac{[ab]}{[aa]}a\right)\right] + \frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}\left[\left(b - \frac{[ab]}{[aa]}a\right)^2\right]}$$

$$= m\sqrt{[cc\cdot 1] - 2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1] + \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]}$$

$$= m\sqrt{[cc\cdot 2]}.$$

4) Durch ähnliche Entwickelungen ergibt sich der mittlere Fehler des Werthes Null für $[d\varepsilon\,.\,3]$

$$m_{[d\varepsilon\cdot 3]} = m\sqrt{[dd\,.\,3]}\,.$$

Statt also die Zähler der rechten Seite von (24') gleich Null zu nehmen, ersetzen wir sie durch die eben bestimmten mittleren Fehler, beziehungsweise durch deren Quadrate, und erhalten

$$[\varepsilon\varepsilon] - [\lambda\lambda] = \frac{m^2[aa]}{[aa]} + \frac{m^2[bb\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} + \frac{m^2[cc\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} + \frac{m^2[dd\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$$

$$= m^2 + m^2 + m^2 + m^2.$$

Rechts wiederholt sich m^2 so oft, als es Unbekannte gegeben hat; bezeichnen wir deren Anzahl allgemein mit ν, so wird nach einem Blick auf (22)

$$\mu m^2 - [\lambda\lambda] = \nu m^2,$$

woraus endlich

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - \nu}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

147. VIII. *Rechnungscontrolen.* Nachdem die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten berechnet worden, ergeben sich durch ihre Einsetzung in die Gleichungen (2), Nr. 130 die an den Beobachtungen zurückbleibenden Fehler λ.

1) Eine Controle besteht nun darin, dass die Gleichungen (4) der eben citirten Nummer, nämlich

$$[a\lambda] = 0, \quad [b\lambda] = 0, \quad [c\lambda] = 0, \quad [d\lambda] = 0,$$

erfüllt werden müssen.

2) Eine zweite Controle ergibt sich aus der doppelten Berechnung von $[\lambda\lambda]$, welches ohnehin zur Ermittelung von m erforderlich ist. Man quadrirt nämlich die einzelnen λ und bildet dann die Summe, und zweitens beachtet man, dass nach Anmerkung zu Nr. 138

$$[\lambda\lambda] = [nn.4]$$

ist. Nun ergibt sich durch successive Anwendung der Gleichungen (21), (19), (17), 15)

$$\begin{aligned}[nn \cdot 4] &= [nn \cdot 3] - \frac{[dn \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} \\ &= [nn \cdot 2] - \frac{[cn \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \frac{[dn \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} \\ &= [nn \cdot 1] - \frac{[bn \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cn \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \frac{[dn \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} \\ &= [nn] \quad - \frac{[an]^2}{[aa]} \quad - \frac{[bn \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cn \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \frac{[dn \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]},\end{aligned}$$

es erscheint demnach

$$[\lambda\lambda] = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cn \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \frac{[dn \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} \quad (26)$$

durch Grössen ausgedrückt, welche mit Ausnahme von $[nn]$ sämmtlich bei der Auflösung der Normalgleichungen schon vorgekommen sind.

2. Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

148. Kommt den Beobachtungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ungleiche Genauigkeit zu, und sind $p_1, p_2, \ldots$ ihre auf eine Gewichts-

einheit von der Präcision h bezogenen Gewichte, so haben die Fehler

$$\lambda_1 = n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t,$$
$$\lambda_2 = n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_1 h^2 \lambda_1^2} d\lambda, \quad \frac{h\sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}} e^{-p_2 h^2 \lambda_2^2} d\lambda, \ldots$$

und die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens ist

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu \sqrt{p_1 p_2 \ldots} \, e^{-h^2 [p\lambda\lambda]} (d\lambda)^\mu.$$

Soll diese ein Maximum werden, so muss man die Grössen x, y, z, t so bestimmen, dass

$$\Omega = [p\lambda\lambda] = \text{min.}$$

wird, was wieder dann eintritt, wenn

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \left[p\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right] = [pa\lambda] = 0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \left[p\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right] = [pb\lambda] = 0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \left[p\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right] = [pc\lambda] = 0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \left[p\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right] = [pd\lambda] = 0$$

wird. Substituirt man hier für die λ ihre Werthe, so gelangt man zu den Normalgleichungen

$$[paa]x + [pab]y + [pac]z + [pad]t + [pan] = 0,$$
$$[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbd]t + [pbn] = 0,$$
$$[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcd]t + [pcn] = 0,$$
$$[pad]x + [pbd]y + [pcd]z + [pdd]t + [pdn] = 0.$$

Ueber die Auflösung dieser Gleichungen ist zu dem Früheren nichts weiter zu bemerken, ebenso über die Bestimmung der Gewichte p_x, p_y, p_z, p_t. Dagegen ergibt sich jetzt für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit der Werth

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - \nu}}.$$

149. **Erstes Beispiel.** (Stationsausgleichung, die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.) Zwischen den im Punkte M zusammenlaufenden Strahlen MA, MB, MC, MD (Fig. 6) wurden folgende Winkel gemessen:

$$\begin{array}{lllll}
\varphi_1 = (A, B) = & 48^0\ 17'\ 1''\cdot 4 & \text{mit dem Gewichte} & p_1 = 30; \\
\varphi_2 = (A, C) = & 96\ \ 52\ \ 16\cdot 8 & \text{,,} \qquad \text{,,} & p_2 = 20; \\
\varphi_3 = (A, D) = & 152\ \ 54\ \ 6\cdot 8 & \text{,,} \qquad \text{,,} & p_3 = 26; \\
\varphi_4 = (B, C) = & 48\ \ 35\ \ 14\cdot 3 & \text{,,} \qquad \text{,,} & p_4 = 25; \\
\varphi_5 = (B, D) = & 104\ \ 37\ \ 7\cdot 8 & \text{,,} \qquad \text{,,} & p_5 = 28; \\
\varphi_6 = (C, D) = & 56\ \ 1\ \ 48\cdot 9 & \text{,,} \qquad \text{,,} & p_6 = 44.
\end{array}$$

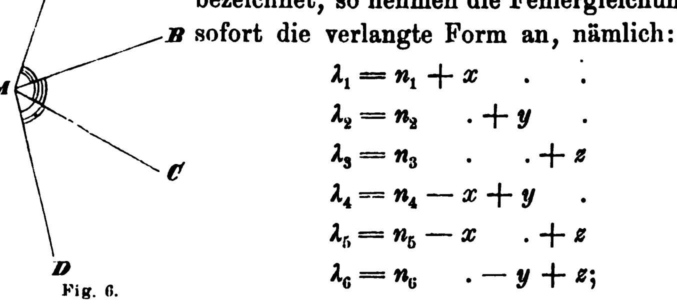
Bezeichnet man die wahren Werthe der Winkel (A, B), (A, C), (A, D) beziehungsweise mit X, Y, Z, so wird sich jeder Winkel φ, der von irgend zwei der vier Strahlen gebildet wird, als Function von der Form

$$\varphi = aX + bY + cZ$$

darstellen lassen, und zwar ist

für die	1. Beobachtung	$a = 1,$	$b = 0,$	$c = 0;$
,,	2. ,,	$= 0,$	$= 1,$	$= 0;$
,,	3. ,,	$= 0,$	$= 0,$	$= 1;$
,,	4. ,,	$= -1,$	$= 1,$	$= 0;$
,,	5. ,,	$= -1,$	$= 0,$	$= 1;$
,,	6. ,,	$= 0,$	$= -1,$	$= 1.$

Werden für die genannten drei Winkel Näherungswerthe X_0, Y_0, Z_0 eingeführt und mit x, y, z deren wahrscheinlichste Verbesserungen bezeichnet, so nehmen die Fehlergleichungen sofort die verlangte Form an, nämlich:



$$\begin{array}{l}
\lambda_1 = n_1 + x \quad . \quad . \\
\lambda_2 = n_2 \quad . + y \quad . \\
\lambda_3 = n_3 \quad . \quad . + z \\
\lambda_4 = n_4 - x + y \quad . \\
\lambda_5 = n_5 - x \quad . + z \\
\lambda_6 = n_6 \quad . - y + z;
\end{array}$$

Fig. 6.

darin ist

$$n_1 = X_0 - \varphi_1, \qquad n_2 = Y_0 - \varphi_2,$$

$$n_3 = Z_0 - \varphi_3,$$

$$n_4 = -X_0 + Y_0 - \varphi_4, \quad n_5 = -X_0 + Z_0 - \varphi_5,$$

$$n_6 = -Y_0 + Z_0 - \varphi_6,$$

und wählt man insbesondere

$$X_0 = \varphi_1, \quad Y_0 = \varphi_2, \quad Z_0 = \varphi_3,$$

so wird

$$n_1 = 0, \qquad n_2 = 0, \qquad n_3 = 0,$$

$$n_4 = 1{\cdot}1, \qquad n_5 = -2{\cdot}4, \qquad n_6 = 1{\cdot}1.$$

Für die Aufstellung der Normalgleichungen ergibt sich folgende Tabelle:

p	a	b	c	n	paa	pab	pac	pan	pbb	pbc	pbn	pcc	pcn
30	+ 1	.	.	.	30	.	.	.	.	.	.	.	.
20	.	+ 1	.	.	.	.	.	.	20	.	.	.	.
26	.	.	+ 1	.	.	.	.	.	.	.	.	26	.
25	— 1	+ 1	.	+ 1·1	25	— 25	.	— 27·5	25	.	+ 27·5	.	.
28	— 1	.	+ 1	— 2·4	28	.	— 28	+ 67·2	.	.	.	28	— 67·2
44	.	— 1	+ 1	+ 1·1	.	.	.	.	44	— 44	— 48·4	44	+ 48·4
					83	— 25	— 28	+ 39·7	89	— 44	— 20·9	98	— 18·8

Die Normalgleichungen lauten demnach:

$$83x - 25y - 28z + 39{\cdot}7 = 0,$$

$$-25x + 89y - 44z - 20{\cdot}9 = 0,$$

$$-28x - 44y + 98z - 18{\cdot}8 = 0.$$

Um neben den Unbekannten auch deren Gewichte zu berechnen, schlagen wir folgenden Weg ein:

1) Durch successive Elimination von x und y gelangt man zu der Gleichung

$$54{\cdot}803\,z - 11{\cdot}162 = 0,$$

aus welcher

$$z = 0{''}{\cdot}203$$

und

$$p_z = 54{\cdot}803$$

folgt; das dieser Eliminationsordnung entsprechende reducirte Gleichungssystem ist (Nr. 134)

$$x - 0{\cdot}301\,y - 0{\cdot}337\,z + 0{\cdot}478 = 0,$$
$$y - 0{\cdot}643\,z - 0{\cdot}109 = 0,$$
$$z - 0{\cdot}203 = 0,$$

woraus durch Substitution des Werthes von z

$$y = \quad 0{\cdot}241'',$$
$$x = -\,0{\cdot}338$$

erhalten wird.

2) Durch vollständige Umkehrung der Normalgleichungen und nachherige Elimination von z und y ergibt sich die Gleichung

$$54{\cdot}614\,x + 18{\cdot}411 = 0,$$

welche für x wieder den obigen Werth und ausserdem

$$p_x = 54{\cdot}614$$

liefert.

3) Bei der unter 2) besprochenen Elimination verbleiben nach Ausscheidung von z die Gleichungen

$$69{\cdot}245y - 37{\cdot}571x - 29{\cdot}340 = 0,$$
$$-\,37{\cdot}571y + 75{\cdot}000x + 34{\cdot}329 = 0;$$

kehrt man dieselben um und eliminirt x, so ergibt sich

$$50{\cdot}425\,y - 12{\cdot}143 = 0,$$

woraus für y der bereits gefundene Werth und

$$p_y = 50{\cdot}425$$

folgt.

Setzt man die für x, y, z erlangten Werthe in die Fehlergleichungen ein, so liefern diese die wahrscheinlichsten an die Beobachtungen anzubringende Verbesserungen

$$\lambda_1 = -\,0{\cdot}338'', \quad \lambda_2 = +\,0{\cdot}241'', \quad \lambda_3 = +\,0{\cdot}203'',$$
$$\lambda_4 = +\,1{\cdot}679, \quad \lambda_5 = -\,1{\cdot}859, \quad \lambda_6 = +\,1{\cdot}062;$$

damit findet man die vortheilhaftesten Werthe der gemessenen Winkel:

$$(A,B) = 48^0\ 17'\ 1''\!\cdot\!062,$$
$$(A,C) = 96\ 52\ 17\cdot041,$$
$$(A,D) = 152\ 54\ 7\cdot003,$$
$$(B,C) = 48\ 35\ 15\cdot979,$$
$$(B,D) = 104\ 37\ 5\cdot941,$$
$$(C,D) = 56\ 1\ 49\cdot962.$$

Für $[p\lambda\lambda]$ ergibt die directe Rechnung

$$222\cdot44,$$

die Controlformel (26) (Nr. 147) in genügender Uebereinstimmung

$$222\cdot53;$$

hieraus erhält man den mittleren Fehler der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{\mu - \nu}} = \sqrt{\frac{222\cdot50}{6-3}} = 8''\!\cdot\!61,$$

und in weiterer Folge die mittleren Fehler der Unbekannten oder der drei ersten Messungen

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = 1''\!\cdot\!17,$$

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = 1\cdot21,$$

$$m_z = \frac{m}{\sqrt{p_z}} = 1\cdot16.$$

150. **Zweites Beispiel.** (Ableitung einer empirischen Formel für die Abhängigkeit der Spannkraft des Wasserdampfes von dessen Temperatur.) Magnus hat im Anschlusse an Untersuchungen von August für den Zusammenhang zwischen der Spannkraft (S) und der Temperatur (t) des Wasserdampfes eine allgemeine Formel von der Gestalt

$$S = X\,10^{\frac{Yt}{Z+t}}$$

aufgestellt; darin sind X, Y, Z constante Coefficienten, für welche auf Grund der folgenden, von Magnus angestellten Beobachtungen die vortheilhaftesten Werthe abzuleiten sind:

Nr.	Temperatur t °C.	Spannkraft φ mm	Nr.	Temperatur t °C.	Spannkraft φ mm
1	— 5·31	2·95	11	58·68	139·72
2	— 3·64	3·45	12	74·47	281·55
3	0·00	4·525	13	78·83	330·58
4	+ 8·01	7·93	14	82·25	387·56
5	11·98	9·88	15	86·21	453·31
6	16·82	13·52	16	91·34	552·20
7	23·85	22·24	17	93·66	602·53
8	35·95	43·96	18	99·39	743·49
9	44·90	71·20	19	100·87	784·07
10	52·12	101·40	20	104·64	895·83

Um den Fehlergleichungen die für die Rechnung erforderliche lineare Gestalt zu geben, ist die Einführung von Näherungswerthen erforderlich; solche verschafft man sich durch Anwendung obiger Gleichung auf die $t = 0$ entsprechende und auf zwei weitere Beobachtungen; wir nehmen nach vorläufiger Rechnung

$$X_0 = 4·53,$$
$$Y_0 = 7·45,$$
$$Z_0 = 234·70.$$

Bezeichnet man den Werth, welchen die rechte Seite der Formel durch Einsetzung dieser Werthe annimmt, mit S_0, so dass

$$S_0 = X_0\, 10^{\frac{Y_0 t}{Z_0 + t}},$$

und setzt

$$\frac{dS_0}{dX_0} = 10^{\frac{Y_0 t}{Z_0 + t}} = a,$$

$$\frac{dS_0}{dY_0} = X_0\, 10^{\frac{Y_0 t}{Z_0 + t}} \cdot \frac{t}{Z_0 + t} \cdot l \cdot 10 = \frac{X_0\, t\, l \cdot 10}{Z_0 + t}\, a = b,$$

$$\frac{dS_0}{dZ_0} = X_0\, 10^{\frac{Y_0 t}{Z_0 + t}} \cdot \frac{-Y_0 t}{(Z_0 + t)^2} \cdot l \cdot 10 = \frac{-Y_0}{Z_0 + t}\, b = c,$$

$$S_0 - \varphi = n,$$

so erlangen die Fehlergleichungen die gewünschte Gestalt

$$\lambda = n + ax + by + cz;$$

darin sind x, y, z die (als klein vorausgesetzten) Verbesserungen der Näherungswerthe.

In der folgenden Tabelle ist das System der Coefficienten a, b, c und der Absolutglieder n zusammengestellt.

Nr.	*a*	*b*	*c*	*n*
1	+ 0·672	— 0·161	+ 0·005	+ 0·095
2	0·763	— 0·124	+ 0·005	+ 0·007
3	1·000	0·000	0·000	+ 0·005
4	1·761	+ 0·605	— 0·018	+ 0·049
5	2·300	1·165	0·035	+ 0·541
6	3·149	2·196	0·064	+ 0·746
7	4·867	4·681	0·136	— 0·194
8	9·763	13·523	0·373	+ 0·265
9	15·717	26·326	0·726	— 0·002
10	22·583	42·806	1·112	+ 0·903
11	30·910	64·490	1·636	+ 0·893
12	62·300	156·520	3·723	+ 0·649
13	73·152	190·924	4·543	+ 1·248
14	85·765	232·136	5·455	+ 1·365
15	100·319	281·098	6·528	+ 3·807
16	122·213	357·103	8·160	+ 0·592
17	133·354	396·752	9·003	+ 2·314
18	164·564	510·637	11·381	+ 1·916
19	173·547	544·065	12·079	+ 6·439
20	198·293	637·758	13·999	— 3.435

Die Normalgleichungen lauten:

$$157743{\cdot}1225x + 476833{\cdot}1814y - 10722{\cdot}0181z + 1816{\cdot}8964 = 0,$$
$$476833{\cdot}1814x + 1449178{\cdot}8203y - 32531.7187z + 5302{\cdot}7052 = 0,$$
$$-10722{\cdot}0181x - 32531{\cdot}7187y + 740{\cdot}5679z - 121{\cdot}5599 = 0.$$

Nach Ausscheidung von x und y erhält man die Gleichung

$$9{\cdot}9061\,z - 1{\cdot}0019 = 0,$$

aus welcher

$$z = 0{\cdot}1011$$

und

$$p_z = 9{\cdot}9061$$

folgt.

Dieser Eliminationsordnung entspricht das reducirte System

$$x + 3{\cdot}0228\,y - 0{\cdot}0679\,z + 0{\cdot}0115 = 0,$$
$$y - 0{\cdot}0155\,z - 0{\cdot}0243 = 0,$$
$$z - 0{\cdot}1011 = 0;$$

dasselbe liefert durch Substitution auch die Werthe der beiden andern Unbekannten:

$$y = \quad 0{\cdot}0259,$$
$$x = -0{\cdot}0829;$$

die Gewichte dieser Grössen finden sich durch die gleichen Umstellungen der Normalgleichungen, wie sie im vorigen Beispiel vorgenommen wurden; es ergibt sich

$$p_y = 6548{\cdot}3592,$$
$$p_x = \quad 816{\cdot}3467.$$

Durch Hinzufügung der Verbesserungen x, y, z zu den Näherungswerthen X_0, Y_0, Z_0 ergeben sich die vortheilhaftesten Werthe der gesuchten Coefficienten, nämlich

$$X_0 + x = \quad 4{\cdot}53 - 0{\cdot}0829 = \quad 4{\cdot}4471,$$
$$Y_0 + y = \quad 7{\cdot}45 + 0{\cdot}0259 = \quad 7{\cdot}4759,$$
$$Z_0 + z = 234{\cdot}70 + 0{\cdot}1011 = 234{\cdot}8011;$$

die Formel lautet demnach

$$S = 4{\cdot}4471 \cdot 10^{\frac{7{\cdot}4759\,t}{234{\cdot}8011 + t}};$$

vergleicht man die nach derselben gerechneten Spannkräfte mit den beobachteten, so ergeben sich die an letztere anzubringenden Verbesserungen:

$\lambda_1 = + \overset{mm}{0{\cdot}036}$,	$\lambda_{11} = - \overset{mm}{0{\cdot}165}$,
$\lambda_2 = - 0{\cdot}058$,	$\lambda_{12} = - 0{\cdot}839$,
$\lambda_3 = - 0{\cdot}078$,	$\lambda_{13} = - 0{\cdot}331$,
$\lambda_4 = - 0{\cdot}082$,	$\lambda_{14} = - 0{\cdot}283$,
$\lambda_5 = + 0{\cdot}376$,	$\lambda_{15} = + 2{\cdot}109$,
$\lambda_6 = + 0{\cdot}537$,	$\lambda_{16} = - 1{\cdot}115$,
$\lambda_7 = - 0{\cdot}490$,	$\lambda_{17} = + 0{\cdot}624$,
$\lambda_8 = - 0{\cdot}230$,	$\lambda_{18} = + 0{\cdot}349$,
$\lambda_9 = - 0.697$,	$\lambda_{19} = + 4{\cdot}922$,
$\lambda_{10} = + 0{\cdot}028$,	$\lambda_{20} = - 4{\cdot}772$.

Aus der Quadratsumme derselben,

$$[\lambda\lambda] = 55{\cdot}3481,$$

berechnet sich der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{\mu - \lambda}} = \sqrt{\frac{55{\cdot}3481}{20 - 3}} = \overset{\text{mm}}{1{\cdot}80},$$

und aus diesem folgen die mittleren, in den Constanten zu befürchtenden Fehler

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = 0{\cdot}0630,$$

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = 0{\cdot}0222,$$

$$m_z = \frac{m}{\sqrt{p_z}} = 0{\cdot}5714;$$

die verhältnissmässig grossen Beträge derselben sind den bei hohen Temperaturen angestellten Beobachtungen zuzuschreiben, die sich ohnehin, wie aus den λ hervorgeht, der Formel nicht genau genug mehr fügen.

Anmerkung. Die Ableitung empirischer Formeln auf Grund abgeführter Beobachtungsreihen bildet einen der zahlreichsten Fälle, in welchen die Methode der kleinsten Quadrate zur Anwendung kommt. Der Zweck, der dabei angestrebt wird, besteht darin, einen mathematischen Ausdruck zu finden, welcher die Beobachtungen mit etwa derselben Genauigkeit wiedergibt, mit welcher das Beobachtungsverfahren sie liefern kann. Den Resultaten ist in diesem Falle nicht die Bedeutung wahrscheinlichster Werthe beizulegen; es sind vielmehr solche Zahlenwerthe, die sich den Beobachtungen möglichst gut anschliessen. Ebenso sind die Fehler, welche die gewonnene Formel an den Beobachtungen zurücklässt, nicht als Beobachtungsfehler, sondern als Fehler der Hypothese anzusehen, d. h. als Fehler, welche die der Beobachtungsreihe zu Grunde gelegte mathematische Formel nach sich zieht; je näher sie das Verhalten zufälliger Fehler aufweisen, desto vortheilhafter der gewählte Ausdruck.

Handelt es sich um die Wahl zwischen zwei oder mehreren empirischen Formeln, so wird zunächst die Summe $[\lambda\lambda]$ entscheiden: sie gibt ein Mass für den Zwang, welchen man den Beobachtungen anthut, indem man sie der Formel

unterordnet; doch muss auch auf die Vertheilung und die Vorzeichen der einzelnen λ gesehen werden. Sollten beispielsweise die λ in einem Theile der Beobachtungsreihe ausgesprochen grösser sein und über die erlaubte Grenze hinausgehen, dann darf die Formel nicht auf das ganze Beobachtungsgebiet ausgedehnt werden; ein solcher Fall ist in unserem Beispiel eingetreten, indem die bei hohen, etwa über 100^0 liegenden Temperaturen beobachteten Spannkräfte mit der Formel nicht mehr so gut in Einklang zu bringen sind.

Es empfiehlt sich, die Beobachtungen vor der Rechnung graphisch aufzutragen; eine solche Darstellung kann zunächst zur Aufdeckung grober Irrungen führen, sie kann aber auch bei der Wahl der Function Anhaltspunkte bieten. Die Rechnung bezweckt eben das Auffinden einer Curve, welche sich den Punkten, die die einzelnen Beobachtungen repräsentiren, möglichst gut anpasst.

IV. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

1. Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

151. I. *Bedingungsgleichungen.* Für die μ Grössen X_1, $X_2, \cdots X_\mu$, welche durch r Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f_1(X_1, X_2, \cdots X_\mu) &= 0, \\ f_2(X_1, X_2, \cdots X_\mu) &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ f_r(X_1, X_2, \cdots X_\mu) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

mit einander verbunden sind, seien durch directe Beobachtung die Werthe $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ erlangt worden.

Bezeichnet man mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\mu$ die als sehr klein vorausgesetzten Fehler dieser Beobachtungsergebnisse, so dass

$$\begin{aligned} x_1 + \varepsilon_1 &= X_1, \\ x_2 + \varepsilon_2 &= X_2, \\ \cdots & \\ x_\mu + \varepsilon_\mu &= X_\mu, \end{aligned}$$

so wird durch Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \cdots x_\mu+\varepsilon_\mu) &= a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_\mu\varepsilon_\mu + w_1 = 0, \\ f_2(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \cdots x_\mu+\varepsilon_\mu) &= b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_\mu\varepsilon_\mu + w_2 = 0, \\ \cdots\cdots & \\ f_r(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \cdots x_\mu+\varepsilon_\mu) &= s_1\varepsilon_1 + s_2\varepsilon_2 + \cdots + s_\mu\varepsilon_\mu + w_r = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

wenn man zur Abkürzung

$$\frac{df_1}{dx_1} = a_1, \cdots \frac{df_1}{dx_\mu} = a_\mu, \quad f_1(x_1, x_2, \cdots x_\mu) = f_1 = w_1;$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = b_1, \cdots \frac{df_2}{dx_\mu} = b_\mu, \quad f_2(x_1, x_2, \cdots x_\mu) = f_2 = w_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{df_r}{dx_1} = s_1, \cdots \frac{df_r}{dx_\mu} = s_\mu, \quad f_r(x_1, x_2, \cdots x_\mu) = f_r = w_r$$

setzt und höhere Potenzen der ε vernachlässigt.

Die Grössen $w_1, w_2, \cdots w_\mu$ sind also die rechten Seiten, welche sich in den Bedingungsgleichungen (1) ergeben, wenn man darin die wahren Werthe durch die Beobachtungsergebnisse ersetzt, mit andern Worten die Widersprüche, welche die Beobachtungsresultate in den Bedingungsgleichungen erzeugen.

Es bedarf wohl kaum besonderer Erwähnung, dass hier immer $r < \mu$ vorausgesetzt wird.

152. II. *Vortheilhafteste Werthe für* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\mu$. Bezeichnet man dieselben mit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\mu$, so werden an sie zwei Forderungen gestellt: 1) müssen sie den Bedingungsgleichungen (1′) Genüge leisten; 2) muss die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammenbestehens, welche gleich ist

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^\mu e^{-h^2[\lambda\lambda]} (d\lambda)^\mu,$$

ein Maximum werden. Man hat daher zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\Omega = [\lambda\lambda] = \text{min.},$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_\mu\lambda_\mu + w_1 = 0, \\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_\mu\lambda_\mu + w_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + \cdots + s_\mu\lambda_\mu + w_r = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Analytisch ausgedrückt, liegt die Bestimmung eines Minimums mit gleichzeitiger Erfüllung gewisser Nebenbedingungen vor.

153. *Zurückführung der Aufgabe auf die Ausgleichung*

vermittelnder Beobachtungen. Wählt man unter den μ Verbesserungen $\mu - r$ beliebig heraus, so lassen sich die r übrigen mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (2) durch diese gewählten ausdrücken.

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\mu-r}$ die als unabhängige Unbekannte gewählten Grössen und setzt man

$$\lambda_1 = x, \quad \lambda_2 = y, \quad \cdots \lambda_{\mu-r} = t,$$

so werden sich für die r übrigen, nämlich $\lambda_{\mu-r+1}, \lambda_{\mu-r+2}, \cdots \lambda_\mu$, bei der linearen Form der Gleichungen (2) Ausdrücke von folgender Gestalt ergeben:

$$\begin{array}{ll} \lambda_{\mu-r+1} & = \nu_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \cdots + \sigma_1 t, \\ \lambda_{\mu-r+2} & = \nu_2 + \alpha_2 x + \beta_1 y + \cdots + \sigma_2 t, \\ \cdots & \cdots \\ \lambda_\mu & = \nu_r + \alpha_r x + \beta_r y + \cdots + \sigma_r t. \end{array}$$

Es ist also genau so, als ob μ vermittelnde Beobachtungen mit den Fehlergleichungen

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 & = \;.\; \; x \; \;.\; \cdots \;. \\ \lambda_2 & = \;.\; \;.\; \; y \; \cdots \;. \\ \cdots & \cdots \\ \lambda_{\mu-r} & = \;.\; \;.\; \;.\; \cdots \; t \\ \lambda_{\mu-r+1} & = \nu_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + \cdots + \sigma_1 t \\ \lambda_{\mu-r+2} & = \nu_2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \cdots + \sigma_2 t \\ \cdots & \cdots \\ \lambda_\mu & = \nu_r + \alpha_r x + \beta_r y + \cdots + \sigma_r t \end{array}$$

zur Bestimmung von $\nu = \mu - r$ Unbekannten vorliegen würden.

154. *Selbständige Lösung der Aufgabe.* Eine directe Lösung des vorliegenden Ausgleichungsproblems, welche überdies den Vortheil grosser Symmetrie und in vielen Fällen auch den der Kürze bietet, stützt sich auf den folgenden Satz.

Lemma. Soll die Function

$$\Omega = F(x, y, \cdots t)$$

von ν Variablen zu einem Maximum gemacht werden unter gleichzeitiger Erfüllung der Bedingungen

$$f_1(x, y, \cdots t) = 0,$$
$$f_2(x, y, \cdots t) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_r(x, y, \cdots t) = 0,$$

so wird allen diesen Forderungen Genüge geleistet, indem man die Function

$$\Omega' = F(x, y, \cdots t) + k_1 f_1(x, y, \cdots t)$$
$$+ k_2 f_2(x, y, \cdots t) + \cdots + k_r f_r(x, y, \cdots t)$$

der unabhängigen Veränderlichen x, y, $\cdots t$ ein Minimum werden lässt; $k_1, k_2, \cdots k_r$ sind vorläufig unbestimmte Coefficienten.

Beweis. Das Minimum von Ω unter Erfüllung der Nebenbedingungen erfordert, dass

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \cdots + \frac{dF}{dt} dt = 0,$$
$$\frac{df_1}{dx} dx + \frac{df_1}{dy} dy + \cdots + \frac{df_1}{dt} dt = 0,$$
$$\frac{df_2}{dx} dx + \frac{df_2}{dy} dy + \cdots + \frac{df_2}{dt} dt = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{df_r}{dx} dx + \frac{df_r}{dy} dy + \cdots + \frac{df_r}{dt} dt = 0,$$

oder, wenn man die Gleichungen von der zweiten angefangen mit vorläufig unbestimmt gelassenen Coefficienten $k_1, k_2, \cdots k_r$ multiplicirt und dann sämmtlich addirt, dass

$$\left(\frac{dF}{dx} + k_1 \frac{df_1}{dx} + k_2 \frac{df_2}{dx} + \cdots + k_r \frac{df_r}{dx}\right) dx$$
$$+ \left(\frac{dF}{dy} + k_1 \frac{df_1}{dy} + k_2 \frac{df_2}{dy} + \cdots + k_r \frac{df_r}{dy}\right) dy + \cdots$$
$$+ \left(\frac{dF}{dt} + k_1 \frac{df_1}{dt} + k_2 \frac{df_2}{dt} + \cdots + k_r \frac{df_r}{dt}\right) dt = 0$$

werde; in letzter Gleichung sind $dx, dy, \cdots dt$ als unabhängig anzusehen; sie kann daher allgemein nur bestehen, wenn

$$\frac{dF}{dx} + k_1 \frac{df_1}{dx} + k_2 \frac{df_2}{dx} + \cdots + k_r \frac{df_r}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + k_1 \frac{df_1}{dy} + k_2 \frac{df_2}{dy} + \cdots + k_r \frac{df_r}{dy} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dF}{dt} + k_1 \frac{df_1}{dt} + k_2 \frac{df_2}{dt} + \cdots + k_r \frac{df_r}{dt} = 0.$$

Auf diese selben Gleichungen wird man aber geführt, wenn es sich um ein Minimum von Ω' handelt.

Die Anzahl der letzten Gleichungen ist v; die Zahl der Bedingungsgleichungen ist r; beide zusammen reichen daher zur Bestimmung der v Variablen $x, y, \cdots t$ und der r eingeführten Coefficienten $k_1, k_2, \cdots k_r$ eben hin.

Auf den vorliegenden Fall angewendet, folgt das vortheilhafteste Werthsystem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_\mu$ aus

$$\begin{aligned} \Omega' = [\lambda\lambda] - 2k_1(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_\mu\lambda_\mu + w_1) \\ - 2k_2(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_\mu\lambda_\mu + w_2) - \cdots \\ - 2k_r(\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \cdots + \sigma_\mu\lambda_\mu + w_r) = \text{min.}; \end{aligned}$$

bei der Unabhängigkeit der Variablen müssen die nach den einzelnen derselben genommenen Differentialquotienten der Null gleich sein; es muss also, wenn man sich auf $4(r)$ Bedingungsgleichungen beschränkt,

$$\begin{aligned} \lambda_1 - a_1k_1 - b_1k_2 - c_1k_3 - d_1k_4 = 0, \\ \lambda_2 - a_2k_1 - b_2k_2 - c_2k_3 - d_2k_4 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_\mu - a_\mu k_1 - b_\mu k_2 - c_\mu k_3 - d_\mu k_4 = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 = a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + d_1k_4, \\ \lambda_2 = a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + d_2k_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_\mu = a_\mu k_1 + b_\mu k_2 + c_\mu k_3 + d_\mu k_4 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

werden. Man nennt nach Gauss die Grössen $k_1, \cdots k_4$ die *Correlaten*, die Gleichungen (3) *Correlatengleichungen*.

Substituirt man die Werthe für $\lambda_1 \cdots \lambda_\mu$ aus den Gleichungen (3) in die Bedingungsgleichungen (2), so ergeben sich die *Normalgleichungen*

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + [ad]\,k_4 + w_1 = 0,\\
[ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + [bd]\,k_4 + w_2 = 0,\\
[ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [cc]\,k_3 + [cd]\,k_4 + w_3 = 0,\\
[ad]\,k_1 + [bd]\,k_2 + [cd]\,k_3 + [dd]\,k_4 + w_4 = 0,
\end{aligned}\right\}\ldots (4)$$

zur Bestimmung der Correlaten. Sind diese berechnet, so liefert ihre Einsetzung in die Gleichungen (3) die vortheilhaftesten, an die Beobahtungen $x_1, x_2, \cdots$ anzubringenden Verbesserungen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, womit die Aufgabe bis auf die Genauigkeitsermittelung abgeschlossen ist.

155. III. *Auflösung der Normalgleichungen.* Die Auflösung der Gleichungen (4) erfolgt genau nach dem in Nr. 131—133 erläuterten Vorgange; nur treten an Stelle von $[bn \cdot 1]$, $[cn \cdot 1]$, $[dn \cdot 1]$; $[cn \cdot 2]$, $[dn \cdot 2]$; $[dn \cdot 3]$ die Grössen $[w_2 \cdot 1]$, $[w_3 \cdot 1]$, $[w_4 \cdot 1]$; $[w_3 \cdot 2]$, $[w_4 \cdot 2]$; $[w_4 \cdot 3]$, wobei in analoger Weise wie dort

$$[w_2 \cdot 1] = w_2 - \frac{[ab]}{[aa]}\,w_1,$$

$$[w_3 \cdot 1] = w_3 - \frac{[ac]}{[aa]}\,w_1,$$

$$[w_4 \cdot 1] = w_4 - \frac{[ad]}{[aa]}\,w_1;$$

$$[w_3 \cdot 2] = [w_3 \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\,[w_2 \cdot 1],$$

$$[w_4 \cdot 2] = [w_4 \cdot 1] - \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\,[w_2 \cdot 1];$$

$$[w_4 \cdot 3] = [w_4 \cdot 2] - \frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}\,[w_3 \cdot 2]$$

zu nehmen ist; so ergibt sich schliesslich das reducirte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
k_1 + \frac{[ab]}{[aa]}\,k_2 + \frac{[ac]}{[aa]}\,k_3 + \frac{[ad]}{[aa]}\,k_4 + \frac{w_1}{[aa]} &= 0,\\
k_2 + \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\,k_3 + \frac{[bd \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\,k_4 + \frac{[w_2 \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} &= 0,\\
k_3 + \frac{[cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}\,k_4 + \frac{[w_3 \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} &= 0,\\
k_4 + \frac{[w_4 \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} &= 0.
\end{aligned}$$

156. IV. *Es soll nachgewiesen werden, dass die durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Werthe von* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ *die wahrscheinlichsten sind.*

Die beiden in Nr. 153 und 154 behandelten Verfahrungsweisen sind nur formell verschieden; sie liefern daher dieselben Resultate.

Nun ist aber durch das erste Verfahren die Aufgabe auf den Fall vermittelnder Beobachtungen zurückgeführt, damit ist also (Nr. 141—143) auch bewiesen, dass die Werthe der unabhängigen Grössen

$$x, y, \cdots t$$

oder

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{\mu-r},$$

wie sie die Methode der kleinsten Quadrate liefert, die wahrscheinlichsten sind; die übrigen Verbesserungen,

$$\lambda_{\mu-r+1}, \lambda_{\mu-r+2}, \cdots \lambda_\mu,$$

sind als Functionen der obigen dargestellt worden, nehmen also (nach Nr. 122) die wahrscheinlichsten Werthe an, wenn man für die Grössen, von denen sie abhängen, die wahrscheinlichsten Werthe einsetzt; dies geschieht wirklich bei der Berechnung, demnach sind auch die für

$$\lambda_{\mu-r+1}, \lambda_{\mu-r+2}, \cdots \lambda_\mu$$

erzielten Werthe die wahrscheinlichsten.

157. V. *Mittlerer Fehler einer Beobachtung.* Nachdem, wie in Nr. 153 gezeigt worden, die vorliegende Aufgabe mit der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen übereinfällt, kann auch die dort (Nr. 146, Gleich. (25)) gefundene Formel unmittelbar angewendet werden, wenn man für die Anzahl der unabhängigen Unbekannten v den Werth $\mu - r$ einführt; dadurch wird

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{r}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

158. VI. *Rechnungscontrole.* Eine durchgreifende Rechnungsprobe bietet sich in der doppelten Berechnung von $[\lambda\lambda]$; einmal findet man diese Summe durch directes Quadriren und Summiren der einzelnen λ, andererseits ergibt sich, wenn man die Gleichungen (3), Nr. 154, einzeln mit dem

zugehörigen λ multiplicirt, summirt und die rechte Seite der neuen Gleichung mit den Gleichungen (2) vergleicht,

$$[\lambda\lambda] = -k_1 w_1 - k_2 w_2 - k_3 w_3 - \cdots = -[kw].$$

2. Beobachtungen ungleicher Genauigkeit.

159. Wurden die Beobachtungen der Grössen $X_1, X_2, \cdots$ mit ungleicher Genauigkeit angestellt und sind $p_1, p_2, \cdots$ die entsprechenden, auf eine Gewichtseinheit von der Präcision h bezogenen Gewichte, so tritt an Stelle der Forderung $[\lambda\lambda] = \text{min.}$ die weitergehende

$$[p\lambda\lambda] = \text{min.},$$

während alles übrige unverändert bleibt. Auf gleichem Wege wie oben kommt man zu den Correlatengleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 + \frac{d_1}{p_1} k_4, \\ \lambda_2 = \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 + \frac{d_2}{p_2} k_4, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_\mu = \frac{a_\mu}{p_\mu} k_1 + \frac{b_\mu}{p_\mu} k_2 + \frac{c_\mu}{p_\mu} k_3 + \frac{d_\mu}{p_\mu} k_4, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (3')$$

und von diesen in Verbindung mit den Bedingungsgleichungen zu den Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] k_3 + \left[\frac{ad}{p}\right] k_4 + w_1 = 0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 + \left[\frac{bd}{p}\right] k_4 + w_2 = 0, \\ \left[\frac{ac}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] k_3 + \left[\frac{cd}{p}\right] k_4 + w_3 = 0, \\ \left[\frac{ad}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bd}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cd}{p}\right] k_3 + \left[\frac{dd}{p}\right] k_4 + w_4 = 0. \end{array}\right\} (4')$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit berechnet sich nach der Formel

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{r}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

die Controlgleichung lautet

$$[p\lambda\lambda] = -[kw].$$

160. **Erstes Beispiel.** *Ausgleichung der Winkel eines Triangulirungsdreiecks.*

1) In dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ wurden alle drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen; die Messung ergab die Werthe

$$x_1 = 50^0\,21'\;\;8''132,$$
$$x_2 = 79\;\;11\;\;1\cdot162,$$
$$x_3 = 45\;\;27\;\;47\cdot758.$$

Die Länge der Seite $M_1 M_2$ ist $19794^{\mathrm{m}}643$. Es sollen die wahrscheinlichsten Werthe der drei Winkel ermittelt werden.

Lösung. Ist E der sphärische Excess des Dreiecks, so haben die an den Winkeln anzubringenden Correctionen λ_1, λ_2, λ_3 der einzigen Bedingung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + x_1 + x_2 + x_3 - (180 + E) = 0$$

Genüge zu leisten.

Bei der Kleinheit des Excesses, welcher in Secunden ausgedrückt gleich kommt

$$E = \frac{F}{R^2}\,206265,$$

in welcher Formel F den Flächeninhalt des Dreiecks und R den Halbmesser der Kugel bedeutet, auf welcher man sich das Dreieck vorstellt, genügt es, für F einen Näherungswerth zu setzen, und zwar jenen, welcher sich ergibt, indem man das Dreieck als eben auffasst und x_1, x_2, x_3 für die wahren Winkel desselben ansieht; es ist dann

$$F = \frac{1}{2}\,\overline{M_1 M_2}^2\,\frac{\sin x_1 \sin x_2}{\sin x_3},$$

woraus

$$\log F = 8\cdot34653.$$

Nimmt man, der mittleren geographischen Breite des Dreiecks entsprechend,

$$\log R = 8\cdot80484,$$

so folgt

$$\log E = 0\cdot05138$$

und

$$E = 1''126.$$

Die Bedingungsgleichung lautet also in Zahlen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 4''\!\cdot\!074 = 0;$$

die Correlatengleichungen sind

$$\lambda_1 = a_1 k_1 = k_1,$$
$$\lambda_2 = a_2 k_1 = k_1,$$
$$\lambda_3 = a_3 k_1 = k_1,$$

die Normalgleichung demnach

$$[aa]\, k_1 + w_1 = 0,$$

oder

$$3k_1 - 4\cdot074 = 0,$$

woraus

$$k_1 = 1''\!\cdot\!358;$$

für die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Winkel ergeben sich also die Beträge

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1''\!\cdot\!358,$$

mit diesen die wahrscheinlichsten Dreieckswinkel

$$\begin{aligned} x_1 + \lambda_1 &= 55^0\,21'\;\;9''\!\cdot\!490, \\ x_2 + \lambda_2 &= 79\;\;11\;\;\;2\cdot520, \\ x_3 + \lambda_3 &= 45\;\;27\;\;49\cdot116, \\ \hline &\;\;\;180^0\;\;0'\;\;1''\!\cdot\!126. \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler einer Winkelbeobachtung ist wegen $r = 1$

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{1}} = \sqrt{[\lambda\lambda]};$$

einerseits ist

$$[\lambda\lambda] = 3 \cdot \overline{1\cdot358}^2 = 5\cdot53,$$

andererseits

$$[\lambda\lambda] = -k_1 w_1 = 1\cdot358 \cdot 4\cdot074 = 5\cdot53,$$

worin eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung liegt; daher

$$m = \sqrt{5\cdot53} = 2''\!\cdot\!39.$$

2) Die Winkel des Dreiecks M_1 M_2 M_3 wurden durch Repetition gemessen; die Messung ergab:

$x_1 = 81^0 21' 43''\!\cdot\!36$, Zahl der Repetitionen oder Gewicht $p_1 = 70$,
$x_2 = 25 \ 16 \ 28\cdot85$, „ „ „ $p_2 = 101$,
$x_3 = 73 \ 21 \ 46\cdot35$, „ „ „ $p_3 = 85$.

Nachdem $E = 0''\!\cdot\!138$ der sphärische Excess des Dreiecks, so besteht die Bedingungsgleichung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1''\!\cdot\!578 = 0;$$

die Correlatengleichungen lauten

$$\lambda_1 = \frac{a_1}{p_1} k_1 = \frac{k_1}{p_1},$$
$$\lambda_2 = \frac{a_2}{p_2} k_1 = \frac{k_1}{p_2},$$
$$\lambda_3 = \frac{a_3}{p_3} k_1 = \frac{k_1}{p_3};$$

die Normalgleichung ist

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + w_1 = 0,$$

oder in Zahlen

$$0\cdot03595\, k_1 - 1\cdot578 = 0,$$

woraus

$$k_1 = \frac{1\cdot578}{0\cdot03595} = 43''\!\cdot\!894.$$

Mithin hat man weiter

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{p_1} = \frac{43\cdot894}{70} = 0''\!\cdot\!627,$$
$$\lambda_2 = \frac{k_1}{p_2} = \frac{43\cdot894}{101} = 0\cdot435,$$
$$\lambda_3 = \frac{k_1}{p_3} = \frac{43\cdot894}{85} = 0\cdot516;$$

daraus die ausgeglichenen Winkelwerthe

$$x_1 + \lambda_1 = 81^0 21' 43''\!\cdot\!987,$$
$$x_2 + \lambda_2 = 25 \ 16 \ 29\cdot285,$$
$$x_3 + \lambda_3 = 73 \ 21 \ 46\cdot866,$$
$$\overline{180^0 \ 0' \ 0''\!\cdot\!138.}$$

Zur Controle findet man durch Quadriren und Summiren

$$[p\lambda\lambda] = 69\cdot2648,$$

nach der andern Formel

$$[p\lambda\lambda] = -k_1 w_1 = 43\cdot894 \cdot 1\cdot578 = 69\cdot2647;$$

der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist demnach

$$m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{r}} = \sqrt{69\cdot265} = 8''\!\cdot32;$$

der mittlere Fehler einer Beobachtung von der Art der ersten, zweiten, dritten Winkelmessung ist beziehungsweise gleich

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{70}} = 1''\!\cdot00, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{101}} = 0''\!\cdot83, \quad m_3 = \frac{m}{\sqrt{85}} = 0''\!\cdot90.$$

161. **Zweites Beispiel.** *Ausgleichung eines Vierecks.* In dem Viereck $ABCD$ wurden die folgenden Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen*):

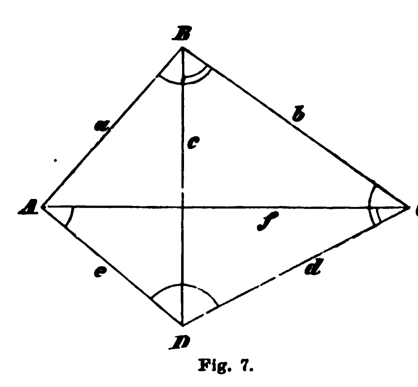


Fig. 7.

$Ad = x_1 = 37^0\,18'\,52''\!\cdot57,$
$Bd = x_2 = 53 \quad 1 \; 47\cdot98,$
$Bf = x_3 = 96 \; 32 \; 31\cdot84,$
$Ce = x_4 = 27 \; 41 \; 29\cdot31,$
$Cc = x_5 = 62 \; 32 \; 24\cdot28,$
$Df = x_6 = 114 \; 59 \; 39\cdot89.$

Nachdem zur Bestimmung der relativen Lage von vier Punkten die Messung von vier Winkeln hinreichen würde, so sind zwei der gemessenen Winkel nicht unmittelbar erforderlich, werden sich daher durch die vier übrigen ausdrücken lassen, d. h. zwischen den sechs Winkeln werden zwei Bedingungsgleichungen bestehen.

Die erste derselben entspringt aus dem Dreieck ACD; da in demselben alle drei Winkel gemessen sind, so muss

$$\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6 + x_1 + x_4 + x_6 - (180 + E) = 0 \quad . \quad (1)$$

werden; eine andere Winkelsummengleichung kann nicht aufgestellt werden.

Die zweite Bedingungsgleichung ergibt sich aus der Nothwendigkeit, dass sich für irgend eine Seite, z. B. für die Seite f, derselbe Werth ergeben muss, auf welchem Wege

*) Die Winkel werden im Folgenden durch den Scheitel und die Gegenseite bezeichnet.

man sie auch rechnen mag, in unserem Beispiel also, ob man f direct aus dem Dreieck ACD rechnet oder durch die Dreiecke ABD und ABC dazu gelangt. Im ersten Falle ist

$$f = e\frac{\sin(x_6 + \lambda_6)}{\sin(x_4 + \lambda_4)};$$

im zweiten Falle ergibt sich zunächst

$$a = e\frac{\sin(x_2 + \lambda_2 + x_5 + \lambda_5 + x_6 + \lambda_6 - 180)}{\sin(x_3 + \lambda_3 - x_2 - \lambda_2)}$$

und damit

$$f = a\frac{\sin(x_3 + \lambda_3)}{\sin(x_5 + \lambda_5 - x_4 - \lambda_4)}$$

$$= e\frac{\sin(x_3 + \lambda_3)\sin(x_2 + \lambda_2 + x_5 + \lambda_5 + x_6 + \lambda_6 - 180)}{\sin(x_5 + \lambda_5 - x_4 - \lambda_4)\sin(x_3 + \lambda_3 - x_2 - \lambda_2)}.$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden für f gefundenen Werthe erhält man die Bedingungsgleichung

$$\frac{\sin(x_5 + \lambda_5 - x_4 - \lambda_4)\sin(x_6 + \lambda_6)\sin(x_3 + \lambda_3 - x_2 - \lambda_2)}{\sin(x_3 + \lambda_3)\sin(x_4 + \lambda_4)\sin(x_2 + \lambda_2 + x_5 + \lambda_5 + x_6 + \lambda_6 - 180)} = 1 \quad . \quad (2)$$

Die Gleichung (1) besitzt bereits die erwünschte Form

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_6\lambda_6 + w_1 = 0,$$

wobei

$$a_1 = a_4 = a_6 = 1, \qquad w_1 = x_1 + x_4 + x_6 - (180 + E);$$
$$a_2 = a_3 = a_5 = 0,$$

bei der zweiten muss dieselbe erst erzielt werden. Zu diesem Ende nehmen wir beiderseits den Logarithmus und erhalten

$$\log\sin(x_5 - x_4 + \lambda_5 - \lambda_4) + \log\sin(x_6 + \lambda_6)$$
$$+ \log\sin(x_3 - x_2 + \lambda_3 - \lambda_2) - \log\sin(x_3 + \lambda_3) - \log\sin(x_4 + \lambda_4)$$
$$- \log\sin(x_2 + x_5 + x_6 - 180 + \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6) = 0.$$

Werden nun die einzelnen Glieder nach dem Taylor'schen Satze unter Vernachlässigung höherer Potenzen der λ entwickelt, so nimmt die Gleichung die Gestalt

$$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_6\lambda_6 + w_2 = 0$$

an; darin ist, wenn man die linke Seite obiger Gleichung, nachdem alle λ der Nulle gleich gesetzt worden, kurz mit F bezeichnet:

$$b_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

$$b_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\alpha \Big(\operatorname{cotg}(x_3 - x_2) + \operatorname{cotg}(x_2 + x_5 + x_6 - 180)\Big),$$

$$b_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3} = \alpha \Big(\operatorname{cotg}(x_3 - x_2) - \operatorname{cotg} x_3\Big),$$

$$b_4 = \frac{\partial F}{\partial x_4} = -\alpha \Big(\operatorname{cotg}(x_5 - x_4) + \operatorname{cotg} x_4\Big),$$

$$b_5 = \frac{\partial F}{\partial x_5} = \alpha \Big(\operatorname{cotg}(x_5 - x_4) - \operatorname{cotg}(x_2 + x_5 + x_6 - 180\Big),$$

$$b_6 = \frac{\partial F}{\partial x_6} = \alpha \Big(\operatorname{cotg} x_6 - \operatorname{cotg}(x_2 + x_5 + x_6 - 180)\Big),$$

$$w_2 = F = \log\sin(x_5 - x_4) + \log\sin x_6 + \log\sin(x_3 - x_2)$$
$$- \log\sin x_3 - \log\sin x_4 - \log\sin(x_2 + x_5 + x_6 - 180);$$

α bedeutet den Quotienten aus dem Modul des Brigg'schen Logarithmensystems durch den Reductionscoefficienten von Bogensecunden in Winkelsecunden, also

$$\alpha = \frac{0{\cdot}434294\cdots}{206265}.$$

Doch kann die Berechnung von $b_1, b_2, \ldots b_6$ in einfacher Weise bei Gelegenheit der Berechnung von w_2 mit Hilfe der dabei benützten Logarithmentafel erfolgen; es ist nämlich, wenn man λ in Secunden ausgedrückt und sehr klein voraussetzt,

$$\log\sin(x + \lambda) = \log\sin x + \varDelta\lambda,$$

wobei $\varDelta$ die in der Tafel bei $\log\sin x$ stehende, einer Secunde entsprechende Differenz bedeutet. Demnach hat man zur Bestimmung von w_2, $b_1, \ldots b_6$ folgende einfache Rechnung:

$\log\sin(x_5 - x_4 + \lambda_5 - \lambda_4)$	$= 9{\cdot}756\ 9478{\cdot}1$	.	.	$-30\ 2\,\lambda_4$	$+30{\cdot}2\,\lambda_5$	
$\log\sin(x_6 + \lambda_6)$	$= 9{\cdot}957\ 2954{\cdot}1$	.	.	.	.	$-$ 9·9
$\log\sin(x_3 - x_2 + \lambda_3 - \lambda_2)$	$= 9{\cdot}837\ 9094{\cdot}7$	$-22{\cdot}2\,\lambda_2$	$+22{\cdot}2\,\lambda_3$	.	.	
	$29{\cdot}552\ 1526{\cdot}9$					
$\log\sin(x_3 + \lambda_3)$	$= 9{\cdot}997\ 1627{\cdot}6$	.	$-\ 2{\cdot}4\,\lambda_3$	.	.	
$\log\sin(x_4 + \lambda_4)$	$= 9{\cdot}667\ 1823{\cdot}3$	.	.	$+40{\cdot}2\,\lambda_4$	.	
$\log\sin(x_2 + x_5 + x_6 - 180 + \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6)$	$= 9{\cdot}887\ 8085{\cdot}2$	$+17\ 3\,\lambda_2$	.	.	$+17\ 3\,\lambda_5$	$+17{\cdot}3$
	$29{\cdot}552\ 1536{\cdot}1$					

Wird die untere Gleichungsgruppe von der oberen abgezogen und das absolute Glied ebenso, wie dies bei den Coefficienten der λ bereits geschehen, in Einheiten der siebenten Decimalstelle ausgedrückt, so erhält man

$$-39{\cdot}5\,\lambda_2+24{\cdot}6\,\lambda_3-70{\cdot}4\,\lambda_4+12{\cdot}9\,\lambda_5-27{\cdot}2\,\lambda_6-9{\cdot}2=0,$$

oder nach Abkürzung durch 10, um das Rechnen mit grossen Zahlen zu vermeiden,

$$-3{\cdot}95\,\lambda_2+2{\cdot}46\,\lambda_3-7{\cdot}04\,\lambda_4+1{\cdot}29\,\lambda_5-2{\cdot}72\,\lambda_6-0{\cdot}92=0.$$

Führt man auch in der ersten Bedingungsgleichung mit dem Excess

$$E=3''{\cdot}74$$

die Rechnung durch, so gelangt man zu den endgiltigen Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \quad . \quad . + \lambda_4 \quad . + \lambda_6-2{\cdot}27=0, \\ .\ -3{\cdot}95\lambda_2+2{\cdot}46\lambda_3-7{\cdot}04\lambda_4+1{\cdot}29\lambda_5-2{\cdot}72\lambda_6-0{\cdot}92=0. \end{array}$$

Daraus ergeben sich die Correlatengleichungen

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = k_1 \quad . \\ \lambda_2 = \ .\ -3{\cdot}95\,k_2, \\ \lambda_3 = \ .\ \ 2{\cdot}46\,k_2, \\ \lambda_4 = k_1-7{\cdot}04\,k_2, \\ \lambda_5 = \ .\ \ 1{\cdot}29\,k_2, \\ \lambda_6 = k_1-2{\cdot}72\,k_2; \end{array}$$

ferner die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} 3{\cdot}00\,k_1-9{\cdot}76\,k_2-2{\cdot}27=0, \\ -9{\cdot}76\,k_1+80{\cdot}28\,k_2-0{\cdot}92=0, \end{array}$$

aus denen

$$\begin{array}{l} k_1=1{\cdot}3139, \\ k_2=0{\cdot}1712 \end{array}$$

gefunden wird. Durch Einführung dieser Werthe in die Correlatengleichungen erhält man

$$\begin{array}{l} \lambda_1=+1''{\cdot}314, \\ \lambda_2=-0{\cdot}677, \\ \lambda_3=+0{\cdot}420, \\ \lambda_4=+0{\cdot}108, \\ \lambda_5=+0{\cdot}220, \\ \lambda_6=+0{\cdot}848. \end{array}$$

Mit diesen Correctionen ergeben sich die ausgeglichenen Winkelwerthe

$$
\begin{aligned}
x_1 + \lambda_1 &= 37^0\ 18'\ 53''\!\cdot\!584, \\
x_2 + \lambda_2 &= 53\ \ \ 1\ 47\cdot303, \\
x_3 + \lambda_3 &= 96\ 32\ 32\cdot260, \\
x_4 + \lambda_4 &= 27\ 41\ 29\cdot418, \\
x_5 + \lambda_5 &= 62\ 32\ 24\cdot500, \\
x_6 + \lambda_6 &= 114\ 59\ 40\cdot738,
\end{aligned}
$$

welche zu einer widerspruchsfreien Rechnung des Vierecks führen.

Zur Controle rechnet man $[\lambda\lambda]$ auf zweifache Weise und findet einerseits durch Quadriren und Summiren

$$[\lambda\lambda] = 3\cdot1405,$$

andererseits in genügender Uebereinstimmung mit diesem Resultate

$$[\lambda\lambda] = -[kw] = 2\cdot9825 + 0\cdot1575 = 3\cdot1400.$$

Der mittlere Fehler einer Winkelmessung ist

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{r}} = \sqrt{\frac{3\cdot14}{2}} = 1''\!\cdot\!25.$$

IX. Capitel.

Auf das Menschenleben bezügliche Wahrscheinlichkeiten.

162. **Einleitung.** Die Individuen einer Generation mögen in der Reihenfolge, in der sie geboren wurden, mit

$$1,\ 2,\ 3, \ldots i, \ldots n$$

bezeichnet werden; stellt man ihre Geburtszeiten

$$t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots t_i, \ldots t_n$$

sowie die von ihnen erlebten Alter

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_i, \ldots a_n$$

zusammen, so gibt eine solche Aufzeichnung über alle, das Leben und Sterben betreffenden Vorgänge in dieser Genera-

tion genaue Aufklärung; so kann beispielsweise der Zeitpunkt τ_i des Absterbens der Person i angegeben werden, indem

$$\tau_i = t_i + a_i$$

ist; ebenso kann entschieden werden, ob die Person k zum Zeitpunkte τ noch am Leben war, indem man τ mit $\tau_k = t_k + a_k$ vergleicht, u. s. w.

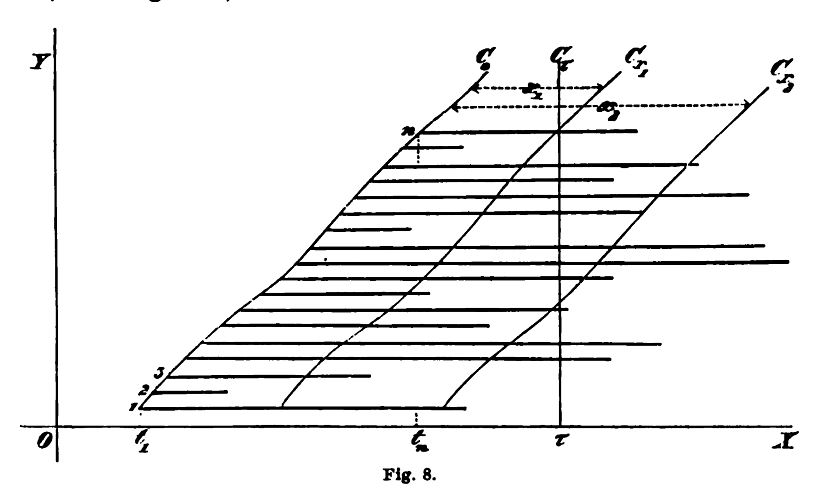


Fig. 8.

Das obige Verzeichniss kann zur besseren Veranschaulichung auch geometrisch dargestellt werden; wählt man hiezu ein rechtwinkliges Coordinatensystem XOY, Fig. 8, so entspricht jedem Individuum ein Punkt, dessen Abscisse die Geburtszeit t und dessen Ordinate die nach einer beliebigen Einheit dargestellte Ordnungszahl ist. Auf solche Weise entsteht eine Punktreihe, und die durch dieselbe gelegte Curve C_0, *Geburtencurve*, stellt die Vertheilung der Geburten nach der Zeit dar. Durch jeden Punkt der Reihe führe man eine zu OX parallele Gerade und trage auf derselben das von der betreffenden Person erlebte Alter in der für die Zeit gewählten Constructionseinheit auf. Die Endpunkte dieser *Alterslinien* geben in ihren Abscissen die Sterbezeiten.

Um zu erfahren, wie viele und welche Personen der Generation ein bestimmtes Alter x_1 erreicht haben, lege man im Abstande x_1, parallel zu OX gemessen, eine zu C_0 pa-

rallele Curve C_{x_1}; die Schnittpunkte dieser Curve mit den Alterslinien beantworten die gestellte Frage.

Handelt es sich weiter darum, wie viele und welche der Personen zu einem Zeitpunkte τ am Leben waren, so führe man im Abstande τ eine zur Ordinatenaxe parallele Gerade C_τ; die Schnittpunkte mit den Alterslinien geben die Lebenden an, die zwischen C_τ und C_0 liegenden Strecken die Alter, in welchen sie eben stehen.

Zählt man, wie viele Alterslinien zwischen den Curven C_{x_1} und C_{x_2} endigen, so erhält man die Anzahl derjenigen aus der Generation, welche zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind. In gleicher Weise lassen sich auch andere Fragen, welche sich auf die sogenannten Gesammtheiten von Lebenden und Verstorbenen beziehen, leicht und anschaulich erledigen.

Diese den thatsächlichen Verhältnissen genau angepasste Darstellung erfasst die Vorgänge in ihrer Discontinuität, ist aber aus diesem Grunde einer analytischen Behandlung nicht leicht zugänglich.

Betrachtet man dagegen die Geburten und Sterbefälle als in Rücksicht zur Zeit continuirliche Erscheinungen, — eine Anschauung, die um so zulässiger ist, je zahlreicher die Generation, — dann lässt sich der ganze Verlauf derselben durch eine Function

$$z = f(t, x) \quad \text{. . . . .} \quad \text{(I)}$$

darstellen, welche die Dichtigkeit der im Zeitpunkte t Geborenen ausdrückt, wenn sie im Alter x stehen, was im Zeitpunkte

$$\tau = t + x \quad \text{. . . . .} \quad (\alpha)$$

stattfindet. Die geometrische Darstellung dieser Function beansprucht den Raum. Trägt man auf die Axe OY, Fig. 9, eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Geburtszeiten t, auf OX die Alter x und auf OZ die Dichtigkeiten z auf, so liefern drei zusammengehörige Werthe t, x, z einen Punkt der Fläche (I), von welcher wir den der Generation $OD'_1 = t_1$ bis $OD'_2 = t_2$ entsprechenden Streifen $D_1 M_1 M_2 D_2$ betrachten wollen. Die diesen Streifen abschliessenden Curven $D_1 M_1$

und D_2M_2 versinnlichen die Abnahme der Dichtigkeit der in den Grenzzeitpunkten t_1 und t_2 Geborenen oder deren Absterbeordnung.

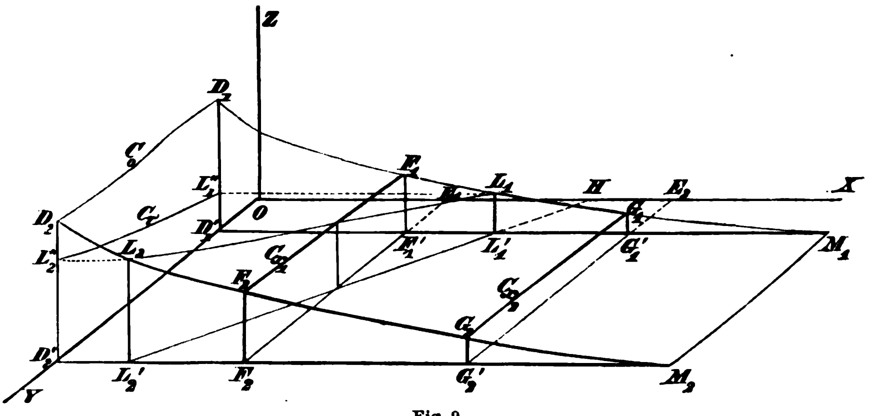


Fig. 9.

1) Die Curve D_1D_2 oder C_0, im Einklange mit der früheren Darstellung, hat die Gleichung

$$z = f(t, 0) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und stellt das Geburtengesetz oder den Verlauf der Geburtendichtigkeit dar.

2) Die Curve F_1F_2 oder C_{x_1}, welche durch einen Parallelschnitt zu YOZ im Abstande $x_1 = OE_1$ entstanden und deren Gleichung

$$z = f(t, x_1) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist, drückt die Dichtigkeit der im Zeitpunkte t Geborenen aus, wenn sie in das Alter x_1 eintreten.

3) Die Curve $L_1''L_2''$, als Projection der Curve L_1L_2 auf die Ebene YOZ, welch' letztere durch einen zu XOZ und YOZ unter 45^0 geneigten Schnitt der Fläche entstanden ist, hat die Gleichung

$$z = f(t, \tau_1 - t) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und stellt die Dichtigkeit der im Zeitpunkte t Geborenen zur Zeit $\tau_1 = OH$ vor; denn für jeden Punkt der Geraden $HL'_1L'_2$ ist $x + t = \tau_1 = OH$, was mit der Relation (α) übereinstimmt.

4) Die Curve $M_1 M_2$, deren Gleichung

$$0 = f(t, x) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

lautet, stellt den Zusammenhang zwischen Geburtszeit und höchstem erlebten Alter dar.

Aus Obigem ergibt sich durch einfache Betrachtung, dass die Integrale

$$F(0) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, 0)\, dt \ldots\ldots\ldots (1')$$

$$F(x_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt \ldots\ldots\ldots (2')$$

$$F(\tau_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \tau_1 - t)\, dt \ldots\ldots\ldots (3')$$

die analytischen Ausdrücke sind

1′) für die Anzahl der Geborenen aus dem Zeitraume t_1 bis t_2;

2′) für die Anzahl derer, welche aus dem genannten Zeitraume stammend das Alter x_1 erreichen; die Erfüllung dieses Alters erfolgt zwischen den Zeitpunkten $t_1 + x_1 = \tau_1$ und $t_2 + x_1 = \tau_2$;

3′) für die Anzahl derer aus der erwähnten Generation, welche den Zeitpunkt τ_1 erleben; ihre Alter liegen zu diesem Zeitpunkte innerhalb der Grenzen $x_1 = \tau_1 - t_2$ uud $x_2 = \tau_1 - t_1$.

Die geometrischen Repräsentanten dieser Anzahlen sind die Schnittflächen $D_1 D_1' D_2' D_2$, $F_1 F_1' F_2' F_2$, $D_1' L_1'' L_2'' D_2'$ beziehungsweise.

Der Unterschied der Schnittflächen $F_1 F_1' F_2' F_2$ und $G_1 G_1' G_2' G_2$, dessen analytischer Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(t, x_2)\, dt$$

ist, gibt beispielsweise die Gesammtheit der Verstorbenen, welche aus der Generation stammend innerhalb der Altersgrenzen $x_1 = OE_1$ und $x_2 = OE_2$ verstorben sind.

163. **Definition.** Unter der *Lebenswahrscheinlichkeit* einer x-jährigen Person versteht man die Wahrscheinlichkeit, welche

der Person für das Durchleben des nächsten Jahres oder die Erreichung des Alters $x + 1$ zukommt.

Allerdings sollten bei Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit nur Personen verglichen werden, die im selben Zeitpunkte geboren sind, weil nicht a priori angenommen werden darf, dass für Personen, die zu verschiedenen Zeitpunkten geboren sind, dieselbe Absterbeordnung gelte. Doch hat diese Auffassung keinen praktischen Werth; wir betrachten daher die Geborenen einer *Generation* und wählen als solche in der Regel die im Laufe eines Kalenderjahres Geborenen.

Der Gegensatz der Lebenswahrscheinlichkeit, d. i. die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des nächsten Jahres, also vor Erreichung des Alters $x + 1$, zu sterben, wird *Sterbenswahrscheinlichkeit* genannt. Bezeichnet man erstere mit p_{x+1}, letztere mit q_{x+1}, so ist

$$p_{x+1} + q_{x+1} = 1.$$

164. **Erstes Problem.** *Die Lebenswahrscheinlichkeit p_{x+1} und die Sterbenswahrscheinlichkeit q_{x+1} einer x-jährigen, aus einer bestimmten Generation stammenden Person zu ermitteln.*

Lösung. Hat man die Anzahlen $F(x)$ und $F(x+1)$ derjenigen beobachtet, welche das Alter x, beziehungsweise das Alter $x + 1$ erreichen, so sind ohne weitere Erklärung die wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Wahrscheinlichkeiten

$$p_{x+1} = \frac{F(x+1)}{F(x)},$$

$$q_{x+1} = 1 - \frac{F(x+1)}{F(x)} = \frac{F(x) - F(x+1)}{F(x)};$$

die Differenz $F(x) - F(x+1)$ stellt die zwischen den Altersgrenzen x und $x + 1$ Verstorbenen vor.

Der wahre Werth der Lebenswahrscheinlichkeit dagegen liegt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen den Grenzen

$$p_{x+1} \pm 0{\cdot}476936 \sqrt{\frac{2F(x+1)\{F(x) - F(x+1)\}}{\{F(x)\}^3}}$$

oder zwischen

$$p_{x+1} \pm 0{\cdot}67449 \sqrt{\frac{p_{x+1}(1 - p_{x+1})}{F(x)}} = p_{x+1} \pm r_{x+1}.$$

165. **Zweites Problem.** *Das Sterblichkeitsgesetz einer Generation, d. i. die Lebens- (oder Sterbens-) Wahrscheinlichkeiten aller Altersclassen zu ermitteln.*

Lösung. Hat man für die betreffende Generation die Anzahlen

$$F(0),\ F(1),\ F(2),\ \ldots\ F(m),\ F(m+1),\ \ldots$$

bis zum höchsten erreichten Altersjahr beobachtet, so geben die Quotienten

$$\frac{F(1)}{F(0)},\ \frac{F(2)}{F(1)},\ \frac{F(3)}{F(2)},\ \ldots\ \frac{F(m+1)}{F(m)},\ \ldots$$

die wahrscheinlichsten Werthe der verlangten Wahrscheinlichkeiten, welche zur Darstellung der Sterblichkeit dienen können.

166. **Drittes Problem.** *Für einen Neugeborenen aus einer bestimmten Generation die Wahrscheinlichkeit P_x zu bestimmen, dass er das Alter x erreichen werde; als bekannt werden die Lebenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Altersclassen vorausgesetzt.*

Lösung. Nachdem es sich hier um ein zusammengesetztes Ereigniss handelt, bestehend

1) aus dem Durchleben des ersten Jahres, wofür die Wahrscheinlichkeit p_1;
2) aus der Vollendung des zweiten Lebensjahres, nachdem das erste bereits durchlebt ist, wofür die Wahrscheinlichkeit p_2;

. . . .

x) aus der Vollendung des $x$ten Lebensjahres, nachdem das Alter $x-1$ bereits erreicht worden ist, wofür die Wahrscheinlichkeit p_x; so ist

$$P_x = p_1 p_2 \ldots p_x.$$

Der wahrscheinliche Fehler R_x dieser Bestimmung lässt sich aus den wahrscheinlichen Fehlern $r_1, r_2, \ldots r_x$ von $p_1, p_2, \ldots p_x$ (vergl. Nr. 164) nach den Sätzen ermitteln, welche für die Functionen direct beobachteter Grössen abgeleitet worden sind (Nr. 122, vierter Fall); es ist

$$R_x^2 = (p_2 \cdots p_x)^2 r_1^2 + (p_1 p_3 \cdots p_x)^2 r_2^2 + \cdots + (p_1 \cdots p_{x-1})^2 r_x^2$$
$$= P_x^2 \left(\left(\frac{r_1}{p_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{p_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{r_x}{p_x}\right)^2\right).$$

167. **Definition.** Unter einer *Sterblichkeits-* oder *Mortalitätstafel* versteht man nach dem fast allgemein noch üblichen Sprachgebrauche eine tabellarische Zusammenstellung von Zahlen, aus welcher zu entnehmen ist, wie eine Anzahl Neugeborener von Jahr zu Jahr durch den Tod sich vermindert.

Eine Zusammenstellung der Lebenswahrscheinlichkeiten könnte eben so gut zur Beantwortung aller die Sterblichkeit betreffenden Fragen dienen; doch ist obige Form für manche, namentlich für Versicherungszwecke vorzuziehen; auch bietet sie eine leichtere Uebersicht und eignet sich besser zur graphischen Darstellung, zur Construction einer sogenannten Mortalitätscurve, als die langsam variirenden Lebenswahrscheinlichkeiten.

Viertes Problem. *Für eine Generation die Sterblichkeitstafel zu construiren.*

Lösung. Hat man auf dem bisher erörterten Wege die Wahrscheinlichkeiten

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ P_x,\ \ldots$$

nebst ihren wahrscheinlichen Fehlern ermittelt, und multiplicirt man dieselben einzeln mit einer Zahl A_0 (meist 1000, 10000 u. s. w.), so ergeben sich die gesuchten Ueberlebenden

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_x,\ \ldots$$

der einzelnen Altersclassen nebst ihren wahrscheinlichen Fehlern, welche mit A_0 die verlangte Tafel abgeben; es ist beispielsweise A_x die Zahl derjenigen von A_0 Neugeborenen aus der Generation, welche das Alter x vollenden.

Zusatz. Den Ausgangspunkt für die Ermittelung des Sterblichkeitsgesetzes bilden, wie aus dem Vorangehenden einleuchtet, die Lebenswahrscheinlichkeiten p.

Der directe Weg zur Bestimmung dieser Elementargrössen bestünde allerdings darin, dass man eine Generation von ihrem Inslebentreten bis zum Aussterben verfolgt und die Zahlen $F(0)$, $F(1)$, . . $F(x)$, . . . (Nr. 165) beobachtet. Doch stehen der Durchführung eines solchen Verfahrens mehrfache Hindernisse im Wege, als: die lange Beobachtungsdauer, die Schwierigkeit, eine ausgedehnte Generation bis zu ihrem Aussterben evident zu erhalten, ferner der Umstand,

dass die aus solchen Beobachtungen abgeleiteten Wahrscheinlichkeitswerthe in den höheren Altersjahren immer mehr an Genauigkeit abnehmen; denn. selbst bei einer zahlreichen Generation werden die Zahlen der Ueberlebenden in den hohen Altersjahren verhältnissmässig gering.

Ein Mittel, für die Lebenswahrscheinlichkeiten aller Altersclassen auf einmal Werthe zu ermitteln, liegt in den Volkszählungen. Werden solche in richtiger Weise vorgenommen, d. h. die Lebenden nach Geburtsjahren geordnet, und mit entsprechend geführten Todtenregistern, in welchen die Verstorbenen nach Geburtsjahren *und* Altersclassen ausgeschieden sind, zusammengehalten, so kann man auf Grund einfacher Betrachtungen für alle Altersclassen die Lebenswahrscheinlichkeiten ableiten und aus diesen eine Sterblichkeitstafel bilden. Eine solche Tafel ist aber von der Sterblichkeitstafel einer Generation, wie sie oben besprochen worden, wohl zu unterscheiden; denn jede Altersclasse, die von einer Volkszählung getroffen wird, rührt der Geburt nach aus einer andern Zeit her: man erhält auf solche Weise die Lebenswahrscheinlichkeiten und somit auch eine *Sterblichkeitstafel gleichzeitig Lebender.* Eine Tafel dieser Gattung kann nicht dazu dienen, ein Sterblichkeitsgesetz zu finden, — denn darunter versteht man im engsten Sinne das Gesetz, nach welchem sich eine Anzahl *gleichzeitig* Geborener, oder im weiteren Sinne doch das Gesetz, nach welchem sich Personen *derselben Generation* durch den Tod vermindern, — dagegen ist sie für mancherlei praktische Zwecke verwendbar.

Auch aus den Registern von Gesellschaften mit stetig ein- und austretenden Mitgliedern, wie sie im Versicherungswesen sich bieten, lassen sich — allerdings nur unter Zugrundelegung gewisser Hypothesen — Lebenswahrscheinlichkeiten und Sterblichkeitstafeln gewinnen; aber auch solche sind ihrem Wesen nach von Sterblichkeitstafeln bestimmter Generationen weit entfernt.

Diese Auffassung der Verhältnisse ist erst in der neuesten Zeit zur Geltung gebracht worden. Die zahlreichen älteren Sterblichkeitstafeln sind mit wenigen Ausnahmen nur von untergeordnetem Werthe; bei den meisten derselben

wurde nämlich die verwerfliche sogenannte Halley'sche Methode befolgt, von welcher weiter unten nochmals die Rede sein wird *).

Die am Schlusse des Werkes mitgetheilte Tafel II, welcher wir die Zahlen für unsere Beispiele entnehmen wollen, ist von Dr. K. Heym im V. Bande der „Rundschau der Versicherungen" von E. A. Masius veröffentlicht worden und stützt sich auf Bevölkerungs- und Todtenlisten der belgischen Bevölkerung. Die Wahl fiel auf diese Tafel, nicht als ob wir derselben vor allen andern den Vorzug geben würden, sondern aus dem Grunde, weil viele der neueren guten Tafeln, so die Tafeln von Brune, die Heym'sche Tafel für das Königreich Sachsen u. a. erst bei einem späteren Altersjahre beginnen und sich daher zu Beispielen für alle im Folgenden zu besprechenden Fälle nicht eignen.

Die Tafel III, welche den Verlauf der Sterblichkeit in acht europäischen Ländern zur Darstellung bringen soll, ist Ad. Quetelet's Schrift: „*Tables de mortalité et leur développement*" (1872) entlehnt.

169. *Beschreibung der Tafel II.* Dieselbe besteht aus drei Colonnen, welche die Ueberschriften „Alter", „Lebende", „Verstorbene" tragen.

Die erste Colonne enthält die Altersclassen von 0 bis 100 Jahren nach Jahren fortschreitend.

Die zweite Colonne gibt die Zahlen der Ueberlebenden des entsprechenden Alters aus der ersten Colonne. Man ersieht beispielsweise aus der Tafel, dass von 10000 Neugeborenen 6647 das 16. Lebensjahr vollenden. Wir wollen in der Folge die Zahl der im Alter m Lebenden mit A_m bezeichnen.

Die dritte Colonne zeigt die Anzahl derjenigen an, welche von den in der zweiten Colonne danebenstehenden im Laufe des nächsten Jahres, also vor Erreichung des nächsthöheren

*) Eine Aufzählung und Würdigung der zahlreichen vorhandenen Sterblichkeitstafeln wollen wir, als über den Rahmen des vorliegenden Werkes hinausfallend, mit dem Hinweise auf Dr. Ph. Fischer's Schrift: „Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens" (Oppenheim a. Rh. 1860) unterlassen.

Alters sterben. So findet man beispielsweise, dass von den 6647 Individuen des Alters von 16 Jahren 55 im Laufe des nächsten Jahres sterben. Die Zahl der zwischen den Altersjahren m und $m+1$ Verstorbenen bezeichnen wir mit B_{m+1}, so dass

$$B_{m+1} = A_m - A_{m+1}.$$

170. *Sterblichkeitsformeln.* Es hat nicht an Bemühungen gefehlt, die Zahlen von Sterblichkeitstafeln in empirische Formeln zu fassen; doch blieben die meisten in dieser Richtung angestellten Versuche erfolglos. Am häufigsten wohl wird die Sterblichkeitsformel L. Moser's*) angeführt, deren Coefficienten sich theils auf die erste Brune'sche Sterblichkeitstafel für Ehemänner, theils, für die ersten Lebensjahre, auf Kersseboom's Sterblichkeitstafel beziehen. In den 30 ersten Lebensjahren drückt Moser die Anzahl der Ueberlebenden von je einem Neugeborenen im Alter x durch

$$y = 1 - 0{\cdot}2\sqrt[4]{x}$$

aus, während er für die späteren Lebensjahre die Formel

$$y = 1 - 0{\cdot}2\sqrt[4]{x} - \frac{0{\cdot}7125}{10^5}\sqrt[4]{x^9} - \frac{0{\cdot}1570}{10^8}\sqrt[4]{x^{17}}$$

angibt.

Der wissenschaftliche Werth dieses Ausdruckes ist von Vielen, u. A. auch von Poisson und von Moser selbst, überschätzt worden. Es muss ausdrücklich betont werden, dass dieser und ähnlichen Darstellungen *nur* die Bedeutung empirischer Formeln, welche sich den Zahlen irgend einer bestimmten Sterblichkeitstafel mehr oder weniger gut anschliessen, und durchaus nicht die eines in mathematische Form gefassten Naturgesetzes beizulegen ist.

1. Wahrscheinlichkeiten, eine Person betreffend.

171. **Erstes Problem.** *Die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass eine Person im Alter von m Jahren nach 1, 2, . . . n Jahren noch leben werde.*

*) L. F. Moser, Gesetze der Lebensdauer. Königsberg 1839.

Lösung. Es sei

A_m die Zahl der Lebenden im Alter von m Jahren;

$A_{m+1}, \ldots A_{m+n}$ die Zahl der um $1, \ldots n$ Jahre älteren Personen.

Die Zahl der günstigen Fälle, dass die betrachtete Person das Alter $m+1$ erreicht, ist A_{m+1}; die Zahl aller möglichen Fälle ist A_m; die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\Pi_1 = \frac{A_{m+1}}{A_m}.$$

In gleicher Weise ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten, dass die Person nach $2, \ldots n$ Jahren am Leben sein werde,

$$\Pi_2 = \frac{A_{m+2}}{A_m}, \ldots \Pi_n = \frac{A_{m+n}}{A_m}.$$

Beispiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine 18jährige Person, nach 13 Jahren noch zu leben?

Aus der Tafel entnimmt man

$$A_{18} = 6535, \quad A_{18+13} = A_{31} = 5722,$$

woraus das gesuchte

$$\Pi_{13} = \frac{5722}{6535} = 0{\cdot}8757.$$

172. **Zweites Problem.** *Die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass eine Person im Alter von m Jahren vor Ende des 1., 2., ... n^{ten} Jahres sterben wird.*

Lösung. Werden die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit $\Pi_1', \Pi_2', \ldots \Pi_n'$, ihre Gegensätze mit $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ bezeichnet, so haben wir

$$\Pi_1 + \Pi_1' = 1, \quad \Pi_2 + \Pi_2' = 1, \ldots \Pi_n + \Pi_n' = 1,$$

woraus

$$\Pi_1' = 1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}, \quad \Pi_2' = 1 - \frac{A_{m+2}}{A_m}, \ldots \Pi_n' = 1 - \frac{A_{m+n}}{A_m}.$$

Zusatz I. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die betrachtete (m-jährige) Person im Laufe des 2., 3., ... n^{ten} Jahres sterben werde?

$\frac{A_{m+1}}{A_m}$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Ende des ersten Jahres zu erleben;

$1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}$ ist die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des zweiten Jahres zu sterben;

die verlangte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)=\frac{A_{m+1}-A_{m+2}}{A_m}=\frac{B_{m+2}}{A_m}.$$

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des **dritten** Jahres zu sterben,

$$\frac{A_{m+2}}{A_m}\left(1-\frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\right)=\frac{A_{m+2}-A_{m+3}}{A_m}=\frac{B_{m+3}}{A_m}.$$

181. **Zusatz II.** Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die betrachtete Person in dem Zeitraume vom p^{ten} bis zum $(p+q)^{\text{ten}}$ Jahre sterben wird; n wird dabei sehr gross vorausgesetzt.

Von den A_m Personen des Alters m sterben in dem gedachten Zeitraume $A_{m+p}-A_{m+p+q}$ hinweg; die fragliche Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\frac{A_{m+p}-A_{m+p+q}}{A_m}.$$

Beispiel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine 20-jährige Person zu erwarten, dass sie im Alter zwischen 50 und 60 Jahren sterben wird?

Die Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{A_{50}-A_{60}}{A_{20}}=\frac{4450-3470}{6415}=\frac{980}{6415}=0{\cdot}1527.$$

173. **Drittes Problem.** *Wie viele von l Personen des Alters m sterben vor Erreichung des Alters von $m+1$ Jahren?*

Die Sterblichkeitstafel gibt an, dass von A_m Personen im Alter von m Jahren B_{m+1} im Laufe des nächsten Jahres sterben. Aus der Proportion

$$A_m : B_{m+1} = l : x$$

folgt dann

$$x=\frac{l\cdot B_{m+1}}{A_m}.$$

Beispiel. Für $l=10000$ und $m=40$ findet man wegen $A_{40}=5159$ und $B_{m+1}=71$

$$x=\frac{10000\cdot 71}{5159}=138.$$

174. *Sterblichkeit* (Mortalität) und *Leblichkeit* (Vitalität). Die Zahlen der Verstorbenen in den einzelnen Altersclassen, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, eignen sich nicht zur Beurtheilung der Sterblichkeit, da sie in jeder Altersclasse

aus einer andern Anzahl von Lebenden hervorgehen. So stammen die 1493 Verstorbenen des 1. Jahres aus 10000 Lebenden, die 49 zwischen 14 und 15 Jahren Verstorbenen aus 6750 Lebenden. Reducirt man sie sämmtlich in der in voriger Nummer angegebenen Weise auf ein und dieselbe Zahl, etwa auf 10000, so stellen die so erhaltenen Zahlen den Verlauf der *Sterblichkeit* dar.

Als Mass der *Leblichkeit* hat dann offenbar der reciproke Werth der Sterblichkeit zu dienen. In der folgenden Tabelle sind die Werthe der Vitalität zur besseren Uebersicht so transformirt, dass der grösste dem Alter von 12 Jahren entsprechende gleich 1 ist; dies geschah einfach dadurch, dass die reciproken Werthe der Zahlen aus der zweiten Colonne sämmtlich mit 66 multiplicirt wurden.

Tafel der Sterblichkeit und Leblichkeit.

Alter	Von 10000 Personen sterben im nächsten J. Sterblichkeit.	Leblichkeit	Alter	Von 10000 Personen sterben im nächsten J. Sterblichkeit	Leblichkeit
0	1493	0·04	18	90	0·73
1	681	0·10	19	94	0·70
2	375	0·18	20	98	0·67
3	246	0·27	25	103	0·64
4	175	0·38	30	105	0·63
5	160	0·41	35	111	0·59
6	121	0·54	40	138	0·48
7	89	0·74	45	137	0·48
8	78	0·84	50	184	0·36
9	71	0·93	55	247	0·27
10	75	0·88	60	340	0·19
11	68	0·97	65	483	0·14
12	66	1·00	70	818	0·08
13	69	0·95	75	1313	0·05
14	72	0·91	80	1596	0·04
15	80	0·82	85	2047	0·03
16	83	0·79	90	2678	0·02
17	86	0·76	95	3333	0·02

175. **Viertes Problem.** *Wie viele von l gleichzeitig geborenen Personen (oder von l Personen einer Generation) sind nach m Jahren noch am Leben?*

Lösung. Der Tafel zufolge sind von $A_0 = 10000$ Neugeborenen im Alter von m Jahren noch A_m am Leben; man hat daher

$$A_0 : A_m = l : x, \quad \text{woraus} \quad x = \frac{l A_m}{A_0}.$$

176. **Fünftes Problem.** *Wie viele von l Personen des Alters m sind nach p Jahren noch am Leben?*

Lösung. Aus der Proportion

$$A_m : A_{m+p} = l : x$$

folgt unmittelbar

$$x = \frac{l A_{m+p}}{A_m}.$$

166. **Sechstes Problem.** *Wie viele von l Personen des Alters m sterben in den p nächsten Jahren?*

Lösung. Die verlangte Zahl ist, dem obigen gemäss,

$$l - \frac{l A_{m+p}}{A_m} = l \frac{A_m - A_{m+p}}{A_m}.$$

So sterben

von	10000	Neugeborenen	im	nächsten	Altersdecennium	3059,
„	„	Zehnjährigen	„	„	„	758,
„	„	Zwanzigjährigen	„	„	„	985,
„	„	Dreissigjährigen	„	„	„	1079,
„	„	Vierzigjährigen	„	„	„	1374,
„	„	Fünfzigjährigen	„	„	„	2202,
„	„	Sechzigjährigen	„	„	„	3945,
„	„	Siebzigjährigen	„	„	„	7406,
„	„	Achtzigjährigen	„	„	„	8973,
„	„	Neunzigjährigen	„	„	„	10000,

2. Die mittlere und wahrscheinliche Lebensdauer.

178. *Definition der mittleren Lebensdauer.* Verfolgt man eine grosse Anzahl von Personen des Alters x_1, welche derselben Generation entstammen, bis zu jenem Zeitpunkte, in welchem sie das Alter x_2 erreichen würden, summirt die innerhalb dieses Intervalls von den einzelnen wirklich durchlebten Zeiträume und dividirt diese Summe durch die Anzahl der beobachteten Personen, so heisst der Quotient

die *mittlere Lebensdauer der x_1-jährigen bis zum Alter* x_2. Es ist der auf eine Person entfallende Antheil der von Allen durchlebten Zeit.

Denkt man sich an Stelle einer Altersgrenze x_2 das höchste erreichbare Alter, so heisst der in angegebener Weise gerechnete Quotient *mittlere Lebensdauer der x_1-jährigen überhaupt.* Die Summe aus x_1 und der mittleren Lebensdauer heisst *mittleres Lebensalter der x_1-jährigen.*

Tritt endlich noch an Stelle von x_1 das Alter Null, so gelangt man zu der *mittleren Lebensdauer der Neugeborenen,* welche in diesem Falle mit dem Begriffe des mittleren Lebensalters übereinfällt.

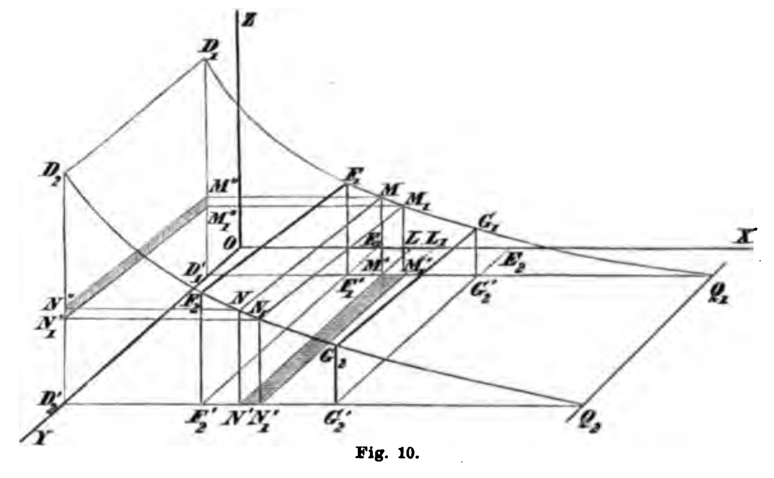


Fig. 10.

Analytischer Ausdruck für die mittlere Lebensdauer. Nach Nr. 162 stellt der Inhalt der Schnittfläche $M'MNN'$, Fig. 10, im Abstande $OL = x$ von der YZ-Ebene, d. i.

$$F(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\, dt,$$

die Anzahl derjenigen aus der Generation $OD'_1 = t_1$ bis $OD'_2 = t_2$, welche in das (zwischen x_1 und x_2 liegende) Alter x eintreten; von allen diesen kann angenommen werden, dass sie das unendlich benachbarte Alter $OL_1 = x + dx$ erreichen; die Summe der in diesem Intervall von ihnen durchlebten Zeiten ist

$$dS = F(x) \cdot dx = dx \int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\, dt;$$

integrirt man vorliegenden Ausdruck in Bezug auf x innerhalb der Grenzen $x_1 = OE_1$ und $x_2 = OE_2$, so wird

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{S}} = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\, dt = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\, dx\, dt$$

die Summe der von $F(x_1)$ Personen des Alters x_1 bis zur Erreichung des Alters x_2 durchlebten Zeiträume, mithin

$$\frac{\overset{x_2}{\underset{x_1}{S}}}{F(x_1)} = \frac{\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\, dx\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} f(t, x_1)\, dt} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx}{F(x_1)}$$

die entsprechende mittlere Lebensdauer. Der Zähler dieses Ausdruckes stellt augenscheinlich den Rauminhalt des zwischen $F_1' F_1 F_2 F_2'$ und $G_1' G_1 G_2 G_2'$ enthaltenen Körpers vor. Auch dem Quotienten lässt sich leicht eine geometrische Deutung unterlegen.

Für die mittlere Lebensdauer der x_1-jährigen überhaupt hat man die obere Grenze x_2 durch das höchste Alter zu ersetzen, der Zähler stellt sodann den Inhalt des ganzen, rechts von dem Schnitte $F_1' F_1 F_2 F_2'$ liegenden Körpers vor. Wird endlich noch an Stelle von x_1 Null genommen, so repräsentirt der obige Ausdruck die mittlere Lebensdauer der Neugeborenen aus der betrachteten Generation.

179. **Zusatz I.** Die mittlere Lebensdauer lässt noch eine andere Auffassung zu, die wir an der mittleren Lebensdauer der Neugeborenen erläutern wollen. Dabei beziehen wir uns auf die Fig. 10 in Nr. 178.

Der Unterschied der beiden unendlich benachbarten Schnitte $M' M N N'$ und $M_1' M_1 N_1 N_1'$, welche den Altern $OL = x$ und $OL_1 = x + dx$ entsprechen, hat zum analytischen Ausdruck

$$t_x = d_x \int_{t_1}^{t_2} f(t, x)\, dt = dx \int_{t_1}^{t_2} \frac{d f(t, x)}{dx}\, dt = dx\, \psi(x) \;.\;. \quad (1)$$

und stellt sich in der Projection $M_1'' M'' N'' N_1''$ des Flächen-

streifens $M_1 M N N_1$ auf die Ebene YZ dar. Seine Bedeutung ist leicht zu erkennen, es ist nämlich die Zahl derjenigen Personen aus der Generation, welche zwischen den genannten Altersgrenzen sterben; die von ihnen durchlebte Zeit ist

$$t_x \cdot x = x\psi(x)\,dx$$

und erscheint geometrisch durch den prismatischen Körper $M_1'' M'' N'' N_1'' N_1 N M M_1$ dargestellt.

Integrirt man diesen Ausdruck innerhalb der Grenzen 0 und ω, wobei ω das höchste erreichbare Alter vorstellt, und dividirt die so erhaltene Summe durch die Anzahl $F(0)$ der Neugebornen, so ergibt sich die mittlere Lebensdauer M_0, nämlich

$$M_0 = \frac{\int_0^\omega x\psi(x)\,dx}{F(0)} = \int_0^\omega x\,\frac{\psi(x)\,dx}{F(0)} = \int_0^\omega x\varphi(x)\,dx \;.\;.\; (2)$$

Nun ist offenbar

$$\varphi(x)\,dx = \frac{\psi(x)\,dx}{F(0)} = \frac{t_x}{F(0)}$$

die Wahrscheinlichkeit, zwischen den Altersgrenzen x und $x + dx$ zu sterben, oder die Wahrscheinlichkeit, ein zwischen den unendlich nahen Grenzen x und $x + dx$ liegendes Alter zu erreichen, das Product $x\varphi(x)dx$ daher die auf dieses Alter bezügliche mathematische Erwartung; das Alter wird nämlich mit einer Summe verglichen, für deren Erlangung die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)dx$ besteht. In diesem Sinne erscheint also die mittlere Lebensdauer als *mathematische Hoffnung*.

180. **Zusatz II.** Häufig begegnet man einer Ableitung der mittleren Lebensdauer aus Sterblichkeitstafeln, welche sich in folgender Weise darstellen lässt.

Die A_m Personen vom Alter m, welche die Sterblichkeitstafel anführt, zerfallen in zwei Gruppen:

1) In A_{m+1} Personen, welche das ganze nächste Jahr durchleben; die von diesen durchlebte Zeit ist demnach

$$A_{m+1} \cdot 1 = A_{m+1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

2) In $A_m - A_{m+1}$ Personen, welche im Laufe des

nächsten Jahres allmälig absterben. Um die von diesen durchlebte Zeit zu ermitteln, muss eine Annahme über die Absterbeordnung *innerhalb eines Jahres* getroffen werden; man nimmt nun an, dass die Sterbefälle gleichmässig auf die Zeit sich vertheilen, so dass, wenn x einen Bruchtheil des Jahres (vom Anfange desselben gezählt) bedeutet, die Zahl der in dieser Zeit Verstorbenen

$$x(A_m - A_{m+1})$$

ist; in der Zeit $x + dx$ sterben mithin

$$(x + dx)(A_m - A_{m+1}),$$

so dass auf das unendlich kleine Intervall dx

$$dx\,(A_m - A_{m+1})$$

Verstorbene entfallen, welche zusammen die Zeit

$$x dx\,(A_m - A_{m+1})$$

durchlebt haben. Durch Integration dieses Ausdruckes innerhalb der Grenzen 0 und 1 ergibt sich die von den Verstorbenen durchlebte Zeit

$$(A_m - A_{m+1})\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}(A_m - A_{m+1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Summe aus (1) und (2) gibt die von den A_m m-jährigen bis zum Alter $m + 1$ durchlebte Zeit

$$\frac{1}{2}(A_m + A_{m+1});$$

ebenso hat man für die folgenden Lebensjahre bis zum höchsten Alter $\omega - 1$, für welches die Tafel noch Lebende aufweist:

$$\frac{1}{2}(A_{m+1} + A_{m+2}),$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\frac{1}{2}(A_{\omega-2} + A_{\omega-1}),$$
$$\frac{1}{2}(A_{\omega-1} + 0).$$

Die Gesammtsumme der durchlebten Zeit ist also

$$\frac{1}{2}A_m + A_{m+1} + \cdots + A_{\omega-1},$$

die mittlere Lebensdauer der m-jährigen

$$M_m = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{\omega-1}}{A_m}, \quad \ldots (3)$$

die der Neugeborenen

$$M_0 = \frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_{\omega-1}}{A_0} \ldots\ldots (4)$$

Diese Werthe hätten nun, wenn sie sich auf die Sterblichkeitstafel *einer Generation* stützen würden, die Bedeutung von ziemlich rohen Näherungswerthen, weil die über die Absterbeordnung gemachte Annahme, namentlich in den ersten Lebensjahren, nicht zutrifft. Liegt aber der Berechnung eine anders geartete Sterblichkeitstafel zu Grunde, dann dürfte den aufgestellten Formeln kein besonderer wissenschaftlicher Werth beizumessen sein.

Nachstehend sind die auf Grund der Sterblichkeitstafel II. nach Formel (3) und (4) gerechneten Werthe der mittleren Lebensdauer für alle Altersjahre zusammengestellt.

Tafel der mittleren Lebensdauer.

m	M_m	m	M_m	m	M_m	m	M_m	m	M_m
0	38·97	20	38·52	40	25·47	60	12·53	80	4·73
1	44·72	21	37·90	41	24·82	61	11·95	81	4·54
2	46·95	22	37·28	42	24·17	62	11·38	82	4·32
3	47·76	23	36·66	43	23·52	63	10·83	83	4·08
4	47·95	24	36·05	44	22·85	64	10·28	84	3·84
5	47·79	25	35·42	45	22·18	65	9·74	85	3·60
6	47·56	26	34·78	46	21·48	66	9·21	86	3·40
7	47·14	27	34·15	47	20·59	67	8·69	87	3·19
8	46·56	28	33·50	48	20·09	68	8·18	88	3·05
9	45·92	29	32·85	49	19·40	69	7·71	89	2·92
10	45·25	30	32·19	50	18·73	70	7·26	90	2·78
11	44·58	31	31·53	51	18·07	71	6·86	91	2·62
12	43·88	32	30·86	52	17·43	72	6·49	92	2·40
13	43·17	33	30·19	53	16·79	73	6·16	93	2·21
14	42·76	34	29·51	54	16·17	74	5·85	94	2·07
15	41·77	35	28·84	55	15·54	75	5·57	95	1·94
16	41·11	36	28·16	56	14·92	76	5·33	96	1·66
17	40·45	37	27·48	57	14·31	77	5·14	97	1·25
18	39·79	38	26·80	58	13·71	78	4·99	98	1·00
19	39·15	39	26·14	59	13·11	79	4·86	99	0·50

Anmerkung. Der Näherungswerth (3) für die mittlere Lebensdauer gibt zu einigen Relationen Veranlassung.

1) Es ist

$$M_m = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots}{A_m} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left\{1 + \frac{A_{m+2} + A_{m+3} + \cdots}{A_{m+1}}\right\}$$

$$M_{m+1} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2} + A_{m+3} + \cdots}{A_{m+1}} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\left\{1 + \frac{A_{m+3} + A_{m+4} + \cdots}{A_{m+2}}\right\}$$

. . . .

also

$$M_m = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+1}}{A_m}\left\{M_{m+1} + \frac{1}{2}\right\},$$

$$M_{m+1} = \frac{1}{2} + \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\left\{M_{m+2} + \frac{1}{2}\right\},$$

. . . .

Mit Hilfe dieser Formeln kann M_{m+1} durch M_{m+2}, M_m durch M_{m+1} u. s. w. ausgedrückt werden. So fände man beispielsweise

$$M_{38} = 0{\cdot}5 + \frac{5226}{5292}\{26{\cdot}14 + 0{\cdot}5\} = 26{\cdot}80.$$

2) Nachdem $\frac{A_{m+1}}{A_m} = p_{m+1}$, $\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}} = p_{m+2}$, u. s. w. die Lebenswahrscheinlichkeiten für die Alter m, $m+1$, u. s. w. sind, so hat man die Beziehungen

$$M_m = \frac{1}{2} + p_{m+1}\left\{M_{m+1} + \frac{1}{2}\right\},$$

$$M_{m+1} = \frac{1}{2} + p_{m+2}\left\{M_{m+2} + \frac{1}{2}\right\},$$

welche dazu dienen könnten, aus einer Tafel der mittleren Lebensdauer eine Tafel der Lebenswahrscheinlichkeiten abzuleiten, indem

$$p_{m+1} = \frac{M_m - \frac{1}{2}}{M_{m+1} + \frac{1}{2}},$$

$$p_{m+2} = \frac{M_{m+1} - \frac{1}{2}}{M_{m+2} + \frac{1}{2}}, \text{ u. s. w.}$$

So ergibt sich aus der obigen Tafel der mittleren Lebensdauer

$$p_{20} = \frac{39{\cdot}15 - 0{\cdot}5}{38{\cdot}52 + 0{\cdot}5} = \frac{38{\cdot}65}{39{\cdot}02} = 0{\cdot}9905,$$

welcher Werth mit dem aus der Sterblichkeitstafel abgeleiteten

$$p_{20} = \frac{A_{20}}{A_{19}} = \frac{6416}{6476} = 0{\cdot}9906$$

genügend übereinstimmt.

181. **Erstes Problem.** *Es ist die Wahrscheinlichkeit P_ω zu bestimmen, dass die Summe der von n im selben Zeitabschnitte geborenen Personen erreichten Alter $\omega = l + n\mu$ ist.*

Lösung. Sei a das höchste erreichbare Alter; ferner drücke $\varphi(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit aus, ein zwischen den Grenzen x und $x + dx$ gelegenes Alter zu erreichen, oder zwischen diesen unendlich nahen Altersgrenzen zu sterben (vergl. Nr. 179). Dann ist

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = 1,$$

nachdem jede Person ein zwischen den Grenzen 0 und a befindliches Alter nothwendig erreichen muss; ferner bedeutet:

$$\int_0^a x\varphi(x)\,dx$$

den strengen Werth der mittleren Lebensdauer;

$$\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx$$

die Summe aus den Quadraten aller möglichen Alter mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, sie zu erreichen;

$$\int_0^a x^3\varphi(x)\,dx$$

die ähnliche auf die dritten Potenzen der Alter bezügliche Summe u. s. w.

Im Folgenden lassen wir die Altersstufen nach dem constanten Intervall da fortschreiten, so dass bei den obigen Integrationen dx durchwegs gleich da zu denken und x der Reihe nach durch $0, da, 2da, 3da \cdots$ zu ersetzen ist.

Bezieht man alle Altersclassen auf das höchste Alter a als Einheit, setzt also

$$x = ax', \quad \varphi(ax') = \psi(x'),$$

dann

$$\int_0^1 \psi(x')dx' = k_0, \int_0^1 x'\psi(x')dx' = k_1, \int_0^1 x'^2\psi(x')dx' = k_2, \cdots$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \int_0^a \varphi(x)\,dx &= a\int_0^1 \psi(x')dx' = ak_0 = 1, \\ \int_0^a x\varphi(x)dx &= a^2\int_0^1 x'\psi(x')dx' = a^2k_1, \\ \int_0^a x^2\varphi(x)dx &= a^3\int_0^1 x'^2\psi(x')dx' = a^3k_2\cdots \end{aligned}\right\}\cdots\cdots (1)$$

Von der Bemerkung ausgehend, dass die Glieder der Entwickelung

$$\{\varphi(0)da + \varphi(da)da + \cdots + \varphi(a - da)da\}^n = 1$$

die Wahrscheinlichkeiten aller Combinationen der von n Personen erreichten Alter abgeben, construiren wir die Function

$$X = \{\varphi(0)dat^0 + \varphi(da)dat^{da} + \varphi(2da)dat^{2da} + \cdots\}^n = \Sigma P_\omega t^\omega,$$

in welcher sofort P_ω die verlangte Wahrscheinlichkeit vorstellt, dafür nämlich, dass die von den n Personen erreichten Alter ω zur Summe geben.

Um P_ω zu finden, setze man $t = e^{-\varpi\sqrt{-1}}$, wodurch

$$X = \{\varphi(0)da + \varphi(da)da\,e^{-\varpi\,da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)da\,e^{-\varpi 2da\sqrt{-1}} + \ldots\}^n$$
$$= \Sigma P_\omega e^{-\varpi\omega\sqrt{-1}}$$
$$= P_0 + P_{da}e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + P_{2da}e^{-\varpi 2da\sqrt{-1}} + \cdots + P_\omega e^{-\varpi\omega\sqrt{-1}} + \cdots$$

wird; nun ist allgemein

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{m\varpi\sqrt{-1}}\,d\varpi = 0,$$

ferner

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi = 2\pi;$$

multiplicirt man also obige Gleichung mit $e^{\varpi\omega\sqrt{-1}}\,d\varpi$ und integrirt nachher innerhalb der Grenzen $\pm\pi$, so verschwinden rechts alle Glieder mit Ausnahme des mit P_ω behafteten und man erhält

$$\int_{-\pi}^{\pi} X e^{\varpi\omega\sqrt{-1}}\,d\varpi = 2\pi P_\omega,$$

woraus

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{\varpi\omega\sqrt{-1}}\, d\varpi$$

folgt, und nimmt man $\omega = l + n\mu$, so wird weiter

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi\, e^{l\varpi\sqrt{-1}}\{e^{\mu\varpi\sqrt{-1}}\, da\, [\varphi(0) + \varphi(da)\, e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)\, e^{-\varpi 2da\sqrt{-1}} + \cdots]\}^n$$

oder kurz

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi\, e^{l\varpi\sqrt{-1}}\, A,$$

wenn

$$A = \{e^{\mu\varpi\sqrt{-1}}\, da[\varphi(0) + \varphi(da)\, e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da) e^{-\varpi 2da\sqrt{-1}} + \cdots]\}^n$$

gesetzt wird. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
l\cdot A &= n\mu\varpi\sqrt{-1} + nl\cdot[\varphi(0)da \\
&\quad + \varphi(da)da\, e^{-\varpi da\sqrt{-1}} + \varphi(2da)da\, e^{-\varpi 2da\sqrt{-1}} + \cdots] \\
&= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\cdot l\Big[\varphi(0)da \\
&\quad + \varphi(da)da\Big\{1 - \varpi da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 da^2}{2} + \frac{\varpi^3 da^3}{2\cdot 3}\sqrt{-1} + \cdots\Big\} \\
&\quad + \varphi(2da)da\Big\{1 - \varpi 2da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2\overline{2da}^2}{2} + \frac{\varpi^3\overline{2da}^3}{2\cdot 3}\sqrt{-1} + \cdots\Big\} \\
&\quad + \varphi(3da)da\Big\{1 - \varpi 3da\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2\overline{3da}^2}{2} + \frac{\varpi^3\overline{3da}^3}{2\cdot 3}\sqrt{-1} + \cdots\Big\} + \cdots\Big] \\
&= n\mu\varpi\sqrt{-1} + nl\cdot\Big[\{\varphi(0)da + \varphi(da)da + \varphi(2da)da + \cdots\} \\
&\quad - \varpi\sqrt{-1}\,\{da\varphi(da)da + 2da\varphi(2da)da + 3da\varphi(3da)da + \cdots\} \\
&\quad - \frac{\omega^2}{2}\,\{da^2\varphi(da)da + \overline{2da}^2\varphi(2da)da + \overline{3da}^2\varphi(3da)da + \cdots\} \\
&\quad + \frac{\varpi^3}{2\cdot 3}\sqrt{-1}\,\{da^3\varphi(da)da + \overline{2da}^3\varphi(2da)da + \overline{3da}^3\varphi(3da)da + \cdots\} + \cdots\Big] \\
&= n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\cdot l\Big[\int_0^a \varphi(x)dx - \varpi\sqrt{-1}\int_0^a x\varphi(x)dx - \frac{\varpi^2}{2}\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx \\
&\quad + \frac{\varpi^3}{2\cdot 3}\sqrt{-1}\int_0^a x^3\varphi(x)\,dx + \cdots\Big];
\end{aligned}$$

berücksichtigt man die Gleichungen (1), so kann weiter geschrieben werden

$$l\cdot A = n\mu\varpi\sqrt{-1} + nl\cdot\left[1 - \varpi\sqrt{-1}\,a^2k_1 - \frac{\varpi^2}{2}a^3k_2 + \frac{\varpi^3}{2\cdot 3}\sqrt{-1}\,a^4k_3 + \cdots\right]$$

$$= n\mu\varpi\sqrt{-1} + nl\cdot\left[1 - \varpi\sqrt{-1}\,\frac{ak_1}{k_0} - \frac{\varpi^2}{2}\frac{a^2k_2}{k_0} + \frac{\varpi^3}{2}\sqrt{-1}\,\frac{a^3k_3}{k_0} + \cdots\right].$$

Durch Entwickelung des Logarithmen in eine Reihe ergibt sich

$$l\cdot A = n\mu\varpi\sqrt{-1} + n\left[-\varpi\sqrt{-1}\,\frac{ak_1}{k_0} - \frac{\varpi^2}{2}\frac{a^2k_2}{k_0} + \frac{\varpi^2}{2}\frac{a^2k_1^2}{k_0^2} - \cdots\right]$$

$$= \left(\mu - \frac{ak_1}{k_0}\right)n\varpi\sqrt{-1} - na^2\varpi^2\frac{k_0k_2 - k_1^2}{2k_0^2} - \cdots,$$

wenn man nämlich bei der zweiten Potenz der Variablen ϖ stehen bleibt. Nachdem die Grösse μ bisher unbestimmt gelassen wurde, kann nunmehr derart über dieselbe verfügt werden, dass der imaginäre Antheil des obigen Ausdruckes verschwindet; es braucht nur

$$\mu = \frac{ak_1}{k_0} = \frac{a^2k_1}{ak_0} = a^2k_1 = \int_0^a x\varphi(x)dx,$$

also gleich dem wahren Werthe der mittleren Lebensdauer genommen zu werden. Dann folgt einfach

$$l\cdot A = -n\frac{k_0k_2 - k_1^2}{2k_0^2}a^2\varpi^2 - \cdots,$$

woraus durch Uebergang zu der Zahl sich

$$A = e^{-n\frac{k_0k_2 - k_1^2}{2k_0^2}a^2\varpi^2}$$

ergibt, wenn man, n als sehr gross voraussetzend, alle weiteren Glieder des Exponenten unterdrückt. Die Einsetzung dieses Werthes in den letzten Ausdruck für P_ω liefert zunächst

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi\, e^{l\varpi\sqrt{-1}}\, e^{-n\frac{k_0k_2 - k_1^2}{2k_0^2}a^2\varpi^2},$$

und wenn, was mit Hinblick auf die Natur der Function unter dem Integralzeichen erlaubt ist, die Grenzen bis $\pm\infty$ ausgedehnt werden,

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi\, e^{l\varpi\sqrt{-1} - n\frac{k_0k_2 - k_1^2}{2k_0^2}a^2\varpi^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

Um die hier angezeigte Integration ausführen zu können, zerlegen wir den Exponenten wie folgt:

$$l\varpi\sqrt{-1}-n\frac{k_0k_2-k_1^2}{2k_0^2}a^2\varpi^2=-n\frac{k_0k_2-k_1^2}{2k_0^2}a^2\left\{\varpi^2-\frac{2k_0^2l\sqrt{-1}}{na^2(k_0k_2-k_1^2)}\varpi\right\}$$

$$=-n\frac{k_0k_2-k_1^2}{2k_0^2}a^2\left\{\left[\varpi-\frac{k_0^2l\sqrt{-1}}{na^2(k_0k_2-k_1^2)}\right]^2-\left[\frac{k_0^2l\sqrt{-1}}{na^2(k_0k_2-k_1^2)}\right]^2\right\};$$

setzt man noch zur Abkürzung

$$\beta^2=\frac{k_0^2}{2(k_0k_2-k_1^2)},\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

so ist weiter

$$l\varpi\sqrt{-1}-n\frac{k_0k_2-k_1^2}{2k_0^2}a^2\varpi^2=-\left(\frac{a\sqrt{n}}{2\beta}\right)^2\left\{\left[\varpi-\frac{2\beta^2}{na^2}l\sqrt{-1}\right]^2+\frac{4\beta^4l^2}{n^2a^4}\right\}$$

$$=-\left[\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta}-\frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}}\right]^2-\frac{\beta^2l^2}{na^2},$$

und die Formel (2) lautet jetzt

$$P_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\varpi\, e^{-\left[\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta}-\frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}}\right]^2}e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}}.$$

Nun sei

$$\frac{\varpi a\sqrt{n}}{2\beta}-\frac{\beta l\sqrt{-1}}{a\sqrt{n}}=t,\qquad d\varpi=\frac{2\beta}{a\sqrt{n}}dt;$$

durch diese Substitution, welche die Integrationsgrenzen nicht berührt, erhält man

$$P_\omega=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}}\frac{2\beta}{a\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt,$$

oder, wenn für das Integral der bekannte Werth $\sqrt{\pi}$ eingeführt wird,

$$P_\omega=\frac{\beta}{a\sqrt{n\pi}}e^{-\frac{\beta^2l^2}{na^2}};\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

dies also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die summirten Alter von n im selben Zeitabschnitt Geborenen

$$\omega=l+n\mu=l+na^2k_1=l+n\int_0^a x\varphi(x)\,dx$$

ergeben.

Zweites Problem. *Die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass die Summe der von n Individuen erreichten Alter zwischen*

$$n\mu \pm l = na^2k_1 \pm ar\sqrt{n} = n\left\{a^2k_1 \pm \frac{ar}{\sqrt{n}}\right\}$$

enthalten sei.

Lösung. Lässt man in dem Ausdrucke (4) die Grösse l (als Variable betrachtet) in Intervallen dl alle Werthe von $-l$ bis $+l$ durchlaufen, so ergibt sich die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\beta}{a\sqrt{n\pi}}\int_{-l}^{l} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{na^2}}\,dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\beta}{a\sqrt{n}}\int_0^l e^{-\frac{\beta^2 l^2}{na^2}}\,dl = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-\beta^2 r^2}\,dr\,. \quad (5)$$

P ist demnach auch die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältniss der Summe der von den n Individuen erreichten Alter zur Anzahl der Individuen zwischen $a^2k_1 \pm \frac{ar}{\sqrt{n}}$ oder zwischen der um $\frac{ar}{\sqrt{n}}$ vermehrten und verminderten wahren mittleren Lebensdauer enthalten ist.

Anmerkung. Sind $a_1, a_2, \cdots a_n$ die von den n Personen wirklich zurückgelegten Alter und setzt man

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\sum_1^n a_i}{n} = G,$$

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} = \frac{\sum_1^n a_i^2}{n} = H,$$

so kann bei sehr grossem n ohne wesentlichen Fehler

$$\int_0^a x\varphi(x)\,dx = a^2k_1 = G,$$

$$\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx = a^3k_2 = H.$$

genommen werden; alsdann ist im Hinblick auf Formel (3) und (1)

$$\beta^2 = \frac{k_0^2}{2\left(ak_0\frac{H}{a^4} - \frac{G^2}{a^4}\right)} = \frac{(ak_0)^2 a^2}{2(ak_0 H - G^2)} = \frac{a^2}{2(H - G^2)},$$

$$\beta = \frac{a}{\sqrt{2(H - G^2)}}, \quad \frac{1}{2\beta} = \frac{\sqrt{H - G^2}}{a\sqrt{2}}.$$

183. **Drittes Problem.** *Den in dem Werthe G für die mittlere Lebensdauer zu fürchtenden durchschnittlichen Fehler zu bestimmen.*

Lösung. Zunächst muss der Begriff des durchschnittlichen Fehlers, den Laplace als mittleren Fehler bezeichnet, vorausgeschickt werden. Multiplicirt man alle Fehlergrössen mit den ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und summirt die Producte, so wird der auf diese Weise erhaltene wahre Durchschnitt aller Fehler durchschnittlicher Fehler genannt.

Die Wahrscheinlichkeit von r ist der Formel (4) zufolge

$$\frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 r^2} dr,$$

der durchschnittliche Betrag von r ist demnach der obigen Definition zufolge

$$\pm \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty r e^{-\beta^2 r^2} dr,$$

daher der durchschnittliche Werth von $\frac{ar}{\sqrt{n}}$ oder des Fehlers, welchen man begeht, indem man für die mittlere Lebensdauer den Quotienten G nimmt,

$$\pm \frac{a}{\sqrt{n\pi}} \int_0^\infty \beta r e^{-\beta^2 r^2} dr;$$

wegen

$$\int_0^\infty \beta r e^{-\beta^2 r^2} dr = \frac{1}{2\beta}$$

und im Hinblick auf die vorige Anmerkung ergibt sich für ihn der Ausdruck

$$\pm \frac{a}{2\beta\sqrt{n\pi}} = \pm \frac{\sqrt{H - G^2}}{\sqrt{2n\pi}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers in G ist dieselbe wie jene des Durchschnittswerthes von r, welcher gleich ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \beta r e^{-\beta^2 r^2} dr = \frac{1}{2\beta\sqrt{\pi}},$$

beträgt also nach Formel (5)

$$P = \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\beta\sqrt{\pi}}} dr\, e^{-\beta^2 r^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}} dt\, e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0\cdot 28209} dt\, e^{-t^2},$$

und mit Benützung der Tafel I.

$$P = 0\cdot 3101;$$

mit diesem Grade der Wahrscheinlichkeit ist der wahre Werth der mittleren Lebensdauer zwischen den Grenzen

$$G \pm \frac{\sqrt{H - G^2}}{\sqrt{2n\pi}} = \frac{\sum_1^n a_i}{n} \pm \frac{\sqrt{n \Sigma a_i^2 - (\Sigma a_i)^2}}{n\sqrt{2n\pi}}$$

enthalten.

Anmerkung. Diese Resultate bleiben auch aufrecht, wenn die mittlere Lebensdauer von einem andern Zeitpunkte als dem der Geburt gezählt wird.

184. **Viertes Problem.** *Die mittlere Lebensdauer für den Fall zu bestimmen, dass eine der Ursachen der Sterblichkeit (sie heisse C) verschwindet.*

Lösung. Zur näherungsweisen Lösung des vorliegenden Problems genügt es, für die einzelnen Altersjahre die Anzahlen der Ueberlebenden zu kennen unter der Voraussetzung, dass die Ursache nicht besteht; denn auf Grund einer solchen, mit Ausschluss der Ursache C construirten Sterblichkeitstafel kann nach Nr. 180 ein Approximativwerth der mittleren Lebensdauer abgeleitet werden, welcher mit dem aus der gewöhnlichen Tafel, bei welcher von der Ursache C nicht Umgang genommen wurde, gewonnenen verglichen den Einfluss dieser Ursache auf die mittlere Lebensdauer erkennen lässt.

Es bedeute:

y die Zahl der Ueberlebenden im Alter x, wenn die Ursache C besteht,

Y die analoge Anzahl, wenn diese Ursache nicht existirt;

$\psi(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit, in dem Zeitintervall x bis $x + dx$ in Folge der Wirkung der Ursache C zu sterben;

$\varphi(x)dx$ die analoge Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die übrigen Todesursachen.

Alsdann ist

$y\psi(x)dx$ die Zahl derjenigen, welche im genannten Zeittheilchen der Ursache C zum Opfer fallen;

$y\varphi(x)dx$ die Zahl derjenigen, welche den übrigen neben C bestehenden Todesursachen erliegen; die Summe beider gibt die Aenderung, welche y in dem erwähnten Zeitintervall erleidet; doch muss dieses dy das Vorzeichen — erhalten, weil dem Wachsen der Zeit eine Abnahme der Ueberlebenden entspricht; man hat also

$$-dy = y\{\psi(x)dx + \varphi(x)dx\}.$$

Ferner stellt $Y\varphi(x)dx$ die Zahl der im Zeitintervall x bis $x + dx$ Verstorbenen vor, wenn die Ursache C nicht besteht, also die Aenderung von Y, so dass

$$-dY = Y\varphi(x)dx.$$

Durch Eliminirung von $\varphi(x)dx$ ergibt sich die Relation

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dy}{y} + \psi(x)dx,$$

aus welcher

$$l \cdot Y = l \cdot y + \int \psi(x)dx = l \cdot y e^{\int \psi(x)dx}$$

und endlich

$$Y = y e^{\int \psi(x)dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

folgt. Für das Integral im Exponenten lässt sich ein Näherungswerth in folgender Weise ableiten. Hebt man aus den Todtenregistern heraus, wie viele von einer grossen Anzahl im selben Zeitabschnitte (Jahre) geborener Personen zwischen 0 und 1 Jahr, zwischen 1 und 2 Jahren, u. s. w. zwischen $x - 1$ und x Jahren der Ursache C erlegen sind und dividirt jede dieser Zahlen durch die Anzahl der beobachteten Personen, welche in der Mitte der betreffenden Altersclasse gelebt, also das Alter $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\cdots x - \frac{1}{2}$ erreicht haben, so gibt die Summe dieser Quotienten, wie leicht ersichtlich, einen Näherungswerth des berührten Integrals, mit welchem dann Y zu rechnen ist.

Beispiel. Um die Anwendung des Problems an einem einfachen Beispiele zu erläutern, nehmen wir an, eine Epidemie habe in jeder Altersclasse constant $\frac{1}{200} = 0{\cdot}005$ aller in dieser Altersclasse beobachteten Todesfälle zur Folge; die Tafel II. gelte mit Einschluss dieser Krankheit. Unter diesen Annahmen soll die Anzahl der Ueberlebenden des Alters von 10 Jahren berechnet werden, wenn die Krankheit nicht bestehen würde.

Aus der Colonne B_{m+1} der Tafel II. entnimmt man, dass der erwähnten Ursache im 1., 2., ... 10ten Lebensjahre

7·46, 2·89, 1·48, 0·94, 0·65, 0·58, 0·43, 0·32, 0·27, 0·25

Todesfälle zuzuschreiben sind; dividirt man diese Zahlen durch die arithmetischen Mittel der aufeinanderfolgenden Zahlen der Ueberlebenden, — diese Mittelwerthe können nämlich als die Anzahlen derjenigen angesehen werden, welche $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, ... $9\frac{1}{2}$ Jahre alt werden und aus welchen die obigen Todesfälle hervorgegangen sind, — also durch

9253, 8217, 7779, 7537, 7378, 7254, 7152, 7077, 7018, 6966,

so ergeben sich die Quotienten

0·0008062,
0·0003517,
0·0001902,
0·0001247,
0·0000881,
0·0000799,
0·0000601,
0·0000452,
0·0000385,
0·0000359

als Näherungswerthe der Wahrscheinlichkeiten, der Epidemie in den betreffenden Altersjahren zum Opfer zu fallen, und ihre Summe

0·0018205

ist ein Näherungswerth des Integrals $\int\psi(x)dx$; die Formel (1) gibt dann die gesuchte Zahl

$$Y_{10} = y_{10}\, e^{0\cdot 0018205} = 6941 \cdot 1\cdot 00182$$
$$= 6953.$$

Würde also die Epidemie erlöschen, so wäre die Zahl derjenigen von 10000 Neugeborenen, welche das Alter von 10 Jahren erleben, 6953, also um 12 grösser, als dies beim Walten der Krankheit der Fall ist.

Auf demselben Wege liessen sich die Zahlen der Ueberlebenden für alle andern Altersjahre ableiten.

185. **Definition der wahrscheinlichen Lebensdauer.** Die wahrscheinliche Lebensdauer einer Person des Alters m ist jener Zeitraum, innerhalb dessen die Hälfte der Personen dieses Alters verstorben ist. Wird sie mit R_m bezeichnet, so kann man eins gegen eins wetten, dass eine m-jährige Person noch R_m Jahre leben oder vor Ablauf dieser Zeit sterben wird.

Um R_m aus der Sterblichkeitstafel zu finden, nehme man die dem Alter m entsprechende Zahl A_m und suche in der Alterscolonne jene Zahl k, welche der Zahl $\frac{1}{2} A_m$ in der Colonne der Lebenden entspricht, so ist

$$R_m = k - m.$$

Insbesondere ist R_0 die wahrscheinliche Lebensdauer oder das wahrscheinliche Lebensalter der Neugeborenen.

Erstes Beispiel. Die wahrscheinliche Lebensdauer einer 50jährigen Person zu suchen.

Man findet aus der Tafel II.

$$A_{50} = 4450, \quad \frac{1}{2} A_{50} = 2225;$$

der letzteren Zahl entspricht das Alter $k = 69\cdot 23$, also ist

$$R_{50} = 69\cdot 23 - 50 = 19\cdot 23.$$

Zweites Beispiel. Die wahrscheinliche Lebensdauer der Neugeborenen zu berechnen.

Zu diesem Ende suche man das der Zahl $\frac{1}{2} A_0 = 5000$ entsprechende Alter und findet

$$R_0 = 42\cdot 22;$$

innerhalb dieses Zeitraumes hat sich also die Zahl der Neugebornen auf die Hälfte reducirt.

3. Wahrscheinlichkeiten, verbundene Leben betreffend.

186. **Erstes Problem.** *Zwei Personen A und B, m und n Jahre alt, sind für einen Zeitraum von t Jahren verbunden; welches sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Personen nach Ablauf dieser Zeit noch leben oder verstorben sein werden?*

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit,

dass A nach t Jahren lebt, ist $p' = \frac{A_{m+t}}{A_m}$;

„ B „ „ „ „ $p'' = \frac{A_{n+t}}{A_n}$;

„ A „ „ „ „ $q' = 1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}$;

„ B „ „ „ „ $q'' = 1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}$.

1) Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Personen nach t Jahren noch am Leben sind, ist

$$p'p'' = \frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n}.$$

2) Die Wahrscheinlichkeit des Gegensatzes, dass entweder keine oder nur eine der Personen nach t Jahren am Leben ist, hat den Werth

$$1 - \frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n}.$$

3) Die Wahrscheinlichkeit, dass nach t Jahren A lebt und B todt ist, lautet

$$p'q'' = \frac{A_{m+t}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right).$$

4) Die Wahrscheinlichkeit, dass nach t Jahren B lebt und A bereits gestorben ist, lautet

$$q''p' = \frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right).$$

5) Die Wahrscheinlichkeit, dass nach t Jahren beide Personen verstorben sein werden, ist

$$q'q'' = \left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right).$$

Anmerkung I. Die Wahrscheinlichkeiten unter 1), 3), 4), 5) sind die Glieder des Productes

$$(p' + q')(p'' + q'') = 1.$$

Anmerkung II. Die Wahrscheinlichkeiten, welche sich auf drei für einen gewissen Zeitraum verbundene Personen beziehen, gibt das Product

$$(p' + q')(p'' + q'')(p''' + q''') = 1.$$

187. **Zweites Problem.** *Sei M eine Anzahl von Ehepaaren, die Männer sämmtlich im Alter von m, die Frauen im Alter von n Jahren; welches sind die Anzahlen der nach t Jahren noch verbundenen, der getrennten und der verstorbenen Paare?*

Lösung.

1) Nach t Jahren sind noch $M\frac{A_{m+t}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+t}}{A_n}$ Paare verbunden.

2) Nach t Jahren leben $M\frac{A_{n+t}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)$ Witwen.

3) Nach t Jahren leben $M\frac{A_{m+t}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right)$ Witwer.

4) Nach t Jahren existiren $M\left(1 - \frac{A_{m+t}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{n+t}}{A_n}\right)$ Paare nicht mehr.

Liegen nach dem Geschlechte getrennte Sterblichkeitstafeln vor, so sind die Zahlen A_m, A_{m+t} der Tafel für das männliche, die Zahlen A_n, A_{n+t} jener für das weibliche Geschlecht zu entnehmen.

Beispiel. Unter der Voraussetzung, dass die Tafel II. für beide Geschlechter Giltigkeit hat, sind von 10000 Ehepaaren, bei welchen die Männer im Alter von 30, die Frauen im Alter von 20 Jahren stehen, nach 15 Jahren noch

$$10000 \cdot \frac{A_{45}}{A_{30}} \cdot \frac{A_{35}}{A_{20}} = 7092 \text{ verbunden; ferner leben}$$

$$10000 \cdot \frac{A_{35}}{A_{20}} \left(1 - \frac{A_{45}}{A_{30}}\right) = 1449 \text{ Witwen,}$$

$$10000 \cdot \frac{A_{45}}{A_{30}} \left(1 - \frac{A_{35}}{A_{20}}\right) = 1212 \text{ Witwer, und}$$

$$10000 \cdot \left(1 - \frac{A_{45}}{A_{30}}\right)\left(1 - \frac{A_{35}}{A_{20}}\right) = 247 \text{ Paare existiren nicht mehr.}$$

4. Mittlere Dauer einer Verbindung von Menschenleben.

188. **Definitionen.** Unter der *mittleren Ehedauer* versteht man die durchschnittliche Anzahl von Jahren, durch welche Ehepaare von bestimmter Alterscombination verbunden bleiben.

Als *mittlere Dauer des Witwenstandes*, beziehungsweise *Witwerstandes* wird die durchschnittliche Anzahl von Jahren bezeichnet, welche die Frauen, beziehungsweise Männer der betreffenden Kategorie als Witwen, respective Witwer, also nach erfolgter Lösung der Ehe, verleben.

189. **Erstes Problem.** *Die mittlere Dauer von Ehen zwischen Männern im Alter von a und Frauen im Alter von a' Jahren zu bestimmen.*

Erstes Verfahren. Das Sterblichkeitsgesetz sei in der Weise dargestellt, dass die Zahl der in jedem Alter Ueberlebenden als Function dieses Alters ausgedrückt ist.

Sei also $F(a)$ die Zahl der Männer, welche das Alter a erreichen, $F_1(a')$ die Zahl der Frauen, welche das Alter a' erreichen; die Wahrscheinlichkeit, dass nach x Jahren Mann und Frau leben werden, hat dann zum Ausdruck

$$\frac{F(a+x)}{F(a)} \cdot \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')},$$

und dies ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass sie das nächste Zeittheilchen dx zusammen durchleben. Integrirt man demnach den Ausdruck

$$\frac{F(a+x)}{F(a)} \cdot \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')}\, dx$$

zwischen $x = 0$ und jenem Werthe von x, für welchen einer

der beiden Factoren Null wird, so ergibt sich die gesuchte mittlere Ehedauer

$$M_{aa'} = \int \frac{F(a+x)}{F(a)} \cdot \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')} dx \ldots\ldots (1)$$

Zweites Verfahren. Das Sterblichkeitsgesetz sei durch

$$y = \varphi(u)\, du,$$
$$y_1 = \psi(u)\, du$$

dargestellt, wobei y die Wahrscheinlichkeit, im Zeitintervall u bis $u + du$ zu sterben, für den Mann, y_1 die analoge Wahrscheinlichkeit für die Frau bedeutet.

Die mittlere Ehedauer, als mathematische Erwartung aufgefasst, setzt sich aus zwei Antheilen zusammen: 1) aus dem Antheile, welcher von dem durch den Tod des Mannes, 2) aus jenem Antheile, welcher von den durch den Tod der Frau gelösten Ehepaaren herrührt.

1) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann nach x, die Frau nach z Jahren, vom Zeitpunkte der Eheschliessung an gezählt, stirbt, ist

$$\varphi(a + x)\, \psi(a' + z)\, dx\, dz;$$

zugleich ist dies, *wenn* $x < z$, die Wahrscheinlichkeit, dass die Ehe durch x Jahre verbunden bleibt und nach Ablauf dieser Zeit durch den Tod des Mannes gelöst wird; wenn man demnach den Ausdruck

$$x\varphi(a + x)\, \psi(a' + z)\, dx\, dz$$

in Bezug auf z innerhalb der Grenzen x und $\omega' - a'$ (ω' bedeutet das höchste Frauenalter) und hierauf in Bezug auf x innerhalb der Grenzen 0 und $\omega - a$ (ω ist das höchste Mannesalter) integrirt, so erhält man den ersten Antheil

$$\int_0^{\omega-a} \int_x^{\omega'-a'} x\, \varphi(a + x)\, \psi(a' + z)\, dx\, dz \ldots\ldots (\alpha)$$

2) Derselbe Ausdruck

$$\varphi(a + x)\, \psi(a' + z)\, dx\, dz$$

bedeutet, *wenn* $x > z$, die Wahrscheinlichkeit, dass die Ehe durch z Jahre verbunden bleibt und nach Ablauf dieser Zeit durch den Tod der Frau gelöst wird; man braucht daher nur

$$z\, \varphi(a + x)\, \psi(a' + z)\, dx\, dz$$

in Bezug auf z innerhalb der Grenzen 0 und x, sodann in Bezug auf x innerhalb der Grenzen 0 und $\omega - a$ zu integriren, um den zweiten Antheil

$$\int_0^{\omega-a}\int_0^{x} z\,\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz \;\ldots\ldots\; (\beta)$$

zu erhalten. Durch Summirung von (α) und (β) ergibt sich

$$M_{aa'} = \int_0^{\omega-a}\int_x^{\omega'-a} x\varphi(a+x)\psi(a'+z)dx\,dz + \int_0^{\omega-a}\int_0^{x} z\varphi(a+x)\psi(a'+z)\,dx\,dz \;. \quad (2)$$

190. **Zusatz.** Aus Sterblichkeitstafeln der üblichen Form lässt sich ein Werth für die mittlere Ehedauer ableiten, sobald über die Absterbeordnung innerhalb eines Jahres eine Annahme getroffen wird. Diese soll, wie schon in Nr. 180, in der Voraussetzung der gleichmässigen Vertheilung der Sterbefälle auf das ganze Jahr bestehen.

Wir legen unserer Rechnung die Formel (1) zu Grunde, müssen jedoch die Integration, der gegenwärtigen Natur der Function entsprechend, streckenweise — von Jahr zu Jahr — vornehmen. Bedeutet nämlich x einen echten Bruch, so ist

$$F(m+x) = A_m - x B_{m+1}$$

oder

$$F(m+x) = A_{m+1} + (1-x) B_{m+1};$$

man hat daher

$$M_{aa'} = \frac{1}{A_a A'_{a'}}\left\{\int_0^1 \left(A_{a+1}+(1-x)B_{a+1}\right)\left(A'_{a'+1}+(1-x)B'_{a'+1}\right)dx \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \left(A_{a+2}+(1-x)B_{a+2}\right)\left(A'_{a'+2}+(1-x)B'_{a'+2}\right)dx + \cdots\right\}.$$

Nun findet sich leicht

$$\int_0^1 \left(A_{a+1} + (1-x) B_{a+1}\right)\left(A'_{a'+1} + (1-x) B'_{a'+1}\right) dx$$
$$= A_{a+1} A'_{a'+1} + \tfrac{1}{2}(A_{a+1}B'_{a'+1} + A'_{a'+1}B_{a+1}) + \tfrac{1}{3}B_{a+1}B'_{a'+1};$$

stellt man die analogen Ausdrücke für die übrigen Integrale innerhalb der Klammer her und zieht die Summe, so wird

$$M_{aa'} = \frac{1}{A_a A_{a'}}\left[\sum_1 {}_i A_{a+i} A'_{a'+i} + \tfrac{1}{2}\left(\sum_1 {}_i A_{a+i} B'_{a'+i} + \sum_1 {}_i A'_{a'+i} B_{a+i}\right)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{3}\sum_1 {}_i B_{a+i} B'_{a'+i}\right] \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

Die Zahlen A, B beziehen sich auf die Tafel für das männliche, jene A', B' auf die Tafel für das weibliche Geschlecht. Die sämmtlichen Summen sind bis zu den Null werdenden Gliedern zu führen.

191. **Beispiel.** Die mittlere Ehedauer für Ehepaare zu bestimmen, wo der Mann im Alter von 70 (a), die Frau im Alter von 60 (a') Jahren steht, unter der Voraussetzung, dass die Tafel II. für beide Geschlechter Giltigkeit hat.

In Ausführung der Formel (3) findet sich:

$$A_{70} \quad A_{60} = 7{,}290.470,$$

$$\sum_1^{29} {}_i A_{70+i} A_{60+i} = 37{,}660.262,$$

$$\sum_1^{29} {}_i A_{70+i} B_{60+i} = 1{,}934.401,$$

$$\sum_1^{30} {}_i A_{60+i} B_{70+i} = 5{,}055.464,$$

$$\sum_1^{30} {}_i B_{70+i} B_{60+i} = 293.187,$$

und durch Einführung dieser Werthe in die Formel erhält man

$$M_{70,60} = 5{\cdot}52 \text{ Jahre.}$$

192. **Zweites Problem.** *Die mittlere Dauer des Witwenstandes zu ermitteln.*

Erstes Verfahren. Die Wahrscheinlichkeit, dass die a'-jährige Frau eines a-jährigen Mannes nach x Jahren als Witwe lebt, ist

$$\left(1 - \frac{F(a+x)}{F(a)}\right) \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')};$$

dies ist zugleich die Wahrscheinlichkeit, dass sie das nächste Zeittheilchen dx als Witwe zubringt; wenn man also den Ausdruck

$$\left(1 - \frac{F(a+x)}{F(a)}\right) \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')} dx$$

innerhalb der Grenzen 0 und $\omega' - a'$ integrirt, so ergibt sich der gesuchte Werth

$$W'_{aa'} = \int_0^{\omega'-a'} \left(1 - \frac{F(a+x)}{F(a)}\right) \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')}\, dx$$

$$= \int_0^{\omega'-a'} \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')}\, dx - \int_0^{\omega'-a'} \frac{F(a+x)}{F(a)} \frac{F_1(a'+x)}{F_1(a')}\, dx;$$

nun ist der erste Theil der rechten Seite die mittlere Lebensdauer einer a'-jährigen Frau (Nr. 178), der zweite Theil die mittlere Ehedauer (nach Gl. (1), Nr. 188), daher ist

$$W'_{aa'} = M'_{a'} - M_{aa'} \dots\dots\dots \quad (4)$$

Zweites Verfahren. Der Ausdruck

$$\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz$$

gibt, wenn $z > x$ ist, die Wahrscheinlichkeit an, dass die Frau ihren Ehegatten um die Zeit $z - x$ überlebt, diesen Zeitraum also (vorausgesetzt, dass sie nicht wieder eine Ehe eingeht) als Witwe zubringt; integrirt man sonach

$$(z - x)\,\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz$$

in Bezug auf z innerhalb der Grenzen x und $\omega' - a'$, dann in Bezug auf x innerhalb der Grenzen 0 und $\omega - a$, so erhält man die gesuchte Zeitdauer

$$W'_{aa'} = \int_0^{\omega-a} \int_x^{\omega'-a'} z\,\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz$$

$$- \int_0^{\omega-a} \int_x^{\omega'-a'} x\,\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz.$$

Durch Addition dieser Gleichung zu jener (2), Nr. 189 ergibt sich

$$W'_{aa'} + M_{aa'} = \int_0^{\omega-a} \int_0^{x} z\,\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz$$

$$+ \int_0^{\omega-a} \int_x^{\omega'-a'} z\,\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz$$

$$= \int_0^{\omega-a} \int_0^{\omega'-a'} z\,\varphi(a+x)\,\psi(a'+z)\,dx\,dz$$

$$= \int_0^{\omega-a} \varphi(a+x)\,dx \int_0^{\omega'-a'} z\,\psi(a'+z)\,dz;$$

nun ist aber offenbar

$$\int_{0}^{\omega - a} \varphi (a + x)\, dx = 1,$$

weil der Mann ein zwischen a und ω liegendes Alter erreichen muss; der Werth des zweiten Integrals gibt die mittlere Lebensdauer der a'-jährigen Frau, man hat also

$$W'_{aa'} + M_{aa'} = M'_{a'},$$

woraus wie vorhin

$$W'_{aa'} = M'_{a'} - M_{aa'}$$

folgt.

193. **Drittes Problem.** *Die mittlere Dauer des Witwerstandes zu berechnen.*

Durch analoge Betrachtungen, wie sie vorhin geführt wurden, findet man

$$W_{aa'} = M_a - M_{aa'} \dots\dots\dots\dots (5)$$

Beispiel. Für Ehen der in Nr. 191 bezeichneten Kategorie die mittlere Dauer des Witwenstandes und Witwerstandes zu berechnen.

Lösung. Durch Zuhilfenahme der Tafel in Nr. 180 und des in Nr. 191 erhaltenen Werthes von $M_{aa'}$ findet man

$$W'_{aa'} = 12{\cdot}53 - 5{\cdot}52 = 7{\cdot}01,$$

$$W_{aa'} = 7{\cdot}26 - 5{\cdot}52 = 1{\cdot}74 \text{ Jahre.}$$

Anmerkung. Auf Grund der Formeln (4) und (5) kann die für eine bestimmte Altersdifferenz der Eheleute construirte Tafel der mittleren Ehedauer, durch Zuhilfenahme von Tafeln der mittleren Lebensdauer, mit den Colonnen „mittlere Dauer des Witwenstandes“ und „mittlere Dauer des Witwerstandes“ leicht ergänzt werden.

194. *Laplace's Untersuchung über die mittlere Ehedauer.* Wir betrachten eine Anzahl n von Ehepaaren, bestehend aus a-jährigen Männern und a'-jährigen Frauen.

Erreicht ein a-jähriger Mann mit der Wahrscheinlichkeit φ das Alter $a + x$, eine a'-jährige Frau mit der Wahrscheinlichkeit ψ das Alter $a' + x$, so ist $\varphi\psi$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Ehe der erwähnten Art x Jahre, nachdem sie geschlossen worden, noch besteht. Mithin repräsentirt das

Glied $n C_i (\varphi\psi)^i (1-\varphi\psi)^{n-i}$ der Entwickelung $[\varphi\psi + (1-\varphi\psi)]^n$ die Wahrscheinlichkeit, dass nach Ablauf der Zeit x noch i der Ehepaare verbunden sein werden. Das grösste Glied der genannten Entwickelung ist jenes, in welchem die Proportion

$$\varphi\psi : 1 - \varphi\psi = i : n - i$$

mit möglichster Annäherung erfüllt ist; eine strenge Erfüllung dieser Proportion ist in der Regel nicht thunlich, da i und $n - i$ ganze Zahlen sein müssen. Es folgt dann hieraus die relativ wahrscheinlichste Zahl der noch bestehenden Ehen

$$i = n\varphi\psi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Für φ und ψ können aus einer Sterblichkeitstafel Näherungswerthe berechnet werden; nimmt man nämlich für φ und ψ die Werthe

$$\varphi = \frac{A_{a+x}}{A_a} = \frac{q'}{p'}, \qquad \psi = \frac{A'_{a'+x}}{A'_{a'}} = \frac{q''}{p''},$$

so hat man in

$$i = n\frac{q'q''}{p'p''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

einen Näherungswerth für die Anzahl der nach x Jahren noch existirenden Ehen und kann mit Hilfe dieser Formel eine von Jahr zu Jahr fortschreitende Tabelle der Werthe von i construiren. Bildet man die Summe aller dieser Werthe und dividirt selbe durch n, so hat man in dem Quotienten einen Näherungswerth für die mittlere Ehedauer.

Bei dieser Rechnungsweise wird jedoch stillschweigend angenommen, dass die Lösung der Ehen durch den Tod des einen oder andern Ehegatten immer nur zu Beginn eines jeden Jahres erfolgt; von der in Nr. 190 entwickelten Formel wird nur das erste Glied

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_{a+i}}{A_a} \frac{A'_{a'+i}}{A'_{a'}}$$

in Betracht gezogen; der dadurch bedingte Unterschied gegen die citirte Formel wird namentlich für die niedrigeren Werthe von a und a' beträchtlich ausfallen können; so würde sich

für Ehepaare, wie sie in Nr. 191 behandelt wurden, die mittlere Ehedauer mit 5·17 Jahren gegen 5·52 ergeben.

Zur Vereinfachung der folgenden Untersuchung betrachten wir den Fall, dass beide Ehegatten in gleichem Alter stehen und dass die Sterblichkeitsverhältnisse für beide Geschlechter dieselben sind; es ist dann

$$a = a', \quad A_a = A'_{a'} = p', \quad A_{a+x} = A'_{a'+x} = q', \quad \varphi = \psi = \frac{q'}{p'},$$

und Formel (2) übergeht in

$$i = n\frac{q'^2}{p'^2} \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Nimmt man an, es sei $n\frac{q'^2}{p'^2} + s$ der wahre Werth von i, so ist s der Fehler in der Bestimmung (3). Um die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers wird es sich nun handeln.

Die Untersuchung zerfällt in zwei Theile: 1) In die Aufstellung der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler in der Bestimmung $\varphi = \frac{q'}{p'}$; 2) in die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass bei irgend einem Fehler in dieser Bestimmung der Fehler in i den Betrag s erreicht.

195. 1) Gesetzt, es sei beobachtet worden, dass von p Personen im Alter von a Jahren q in das Alter $a + x$ eintreten, so handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit Π, dass von p' Personen, welche im Alter a stehen,

$$\frac{p'q}{p} + z$$

das Alter $a + x$ erlangen. Den Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit liefert unmittelbar Formel (a) von Nr. 76, wenn man darin

$$\begin{array}{rcl} p + q & \text{durch} & p, \\ p & \text{„} & q, \\ q & \text{„} & p - q, \end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{rcl} m + n & \text{durch} & p', \\ m & \text{„} & q' + z, \\ n & \text{„} & p' - q' - z \end{array}$$

ersetzt; dabei ist unter q' der Werth $\frac{p'q}{p}$ zu verstehen, so dass die Relation

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

statthat. Man erhält auf diese Weise zunächst

$$\Pi = \frac{p'!}{(q'+z)!(p'-q'-z)!}$$
$$\times \frac{(p+p'-q-q'-z)^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}(q+q'+z)^{q+q'+z+\frac{1}{2}}p^{p+\frac{3}{2}}}{(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}q^{q+\frac{1}{2}}(p+p')^{p+p'+\frac{3}{2}}};$$

entwickelt man den Coefficienten nach der Stirling'schen Formel, welcher zufolge

$$p'! = p'^{p'+\frac{1}{2}}e^{-p'}\sqrt{2\pi}$$
$$(q'+z)! = (q'+z)^{q'+z+\frac{1}{2}}e^{-q'-z}\sqrt{2\pi},$$
$$(p'-q'-z)! = (p'-q'-z)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}e^{-p'+q'+z}\sqrt{2\pi},$$

so wird nach einigen Transformationen unter Berücksichtigung von (α)

$$\Pi = \sqrt{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}}$$
$$\times \frac{\left(1+\frac{z}{q+q'}\right)^{q+q'+z+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{p+p'-q-q'}\right)^{p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{z}{q'}\right)^{q'+z+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{p'-q'}\right)^{p'-q'-z+\frac{1}{2}}}$$
$$= \sqrt{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}}A,$$

weil die noch übrigbleibenden Factoren sich zu

$$\left(\frac{1+\frac{q'}{q}}{1+\frac{p'}{p}}\right)^{q+q'+z+\frac{1}{2}}$$

vereinigen lassen, was im Hinblick auf die Beziehung (α) der Einheit gleichkommt.

Die letzte Formel gestattet eine weitere Reduction; entwickelt man den natürlichen Logarithmus des von dem Wurzelzeichen freien Factors A unter Vernachlässigung höherer Potenzen von z, so wird, wenn man immer wieder von (α) Gebrauch macht,

$$l\cdot A=\left(q+q'+z+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{z}{q+q'}+\cdots\right\}$$
$$-\left(p+p'-q-q'-z+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{z}{p+p'-q-q'}+\cdots\right\}$$
$$-\left(q'+z+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{z}{q'}+\cdots\right\}+\left(p'-q'-z+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{z}{p'-q'}+\cdots\right\}$$
$$=\frac{(2q-p)p^2z-p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}$$

und daraus

$$A=e^{\frac{(2q-p)p^2z}{2qp'(p-q)(p+p')}}\,e^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}$$
$$=\left(1+\frac{(2q-p)p^2z}{2qp'(p-q)(p+p')}\right)e^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}.$$

Der erste Factor dieses Ausdruckes kann unter Voraussetzung, dass p, q, p' sehr grosse Zahlen sind, der Einheit gleichgeachtet werden, und setzt man den solcher Weise reducirten Werth von A in die Formel für Π ein, so erhält man

$$\Pi=\sqrt{\frac{p^3}{2qp'(p-q)(p+p')\pi}}\,e^{-\frac{p^3z^2}{2qp'(p-q)(p+p')}}\,dz$$

als Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der von p' a-jährigen im Alter $a+x$ Ueberlebenden

$$q'=\frac{p'q}{p}+z$$

beträgt (eigentlich zwischen diesem Werthe und dem unendlich benachbarten $\frac{p'q}{p}+z+dz$ enthalten ist), oder als Wahrscheinlichkeit der Beziehung

$$\frac{q}{p}=\frac{q'}{p'}-\frac{z}{p'};$$

nun kann bei sehr grossem p und q der Quotient $\frac{q}{p}$ durch φ ersetzt werden; es ist also Π die Wahrscheinlichkeit für

$$\varphi=\frac{q'}{p'}-\frac{z}{p'},$$

oder, bei Vernachlässigung von $\frac{z^2}{p'^2}$, für

$$\varphi^2=\frac{q'^2}{p'^2}-\frac{2q'z}{p'^2},$$

oder endlich die Wahrscheinlichkeit des Ausdruckes

$$\frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2}$$

für $n\varphi^2$.

196. 2) Um die Wahrscheinlichkeit Π' zu finden, dass die Zahl i der nach x Jahren noch bestehenden Ehen $n\varphi^2 + l$ beträgt, beachte man, dass $n\varphi^2$ der Exponent von φ^2 in dem maximalen Gliede der Entwickelung $[\varphi^2 + (1 - \varphi^2)]^n$ ist; mithin gibt das l^{te} Glied vor diesem maximalen Gliede den Ausdruck für Π'. Nun ist aber nach Nr. 51 (wenn man dort die jetzt giltigen Bezeichnungen einführt, also μ mit n, p mit φ^2 und q mit $1 - \varphi^2$ vertauscht)

$$G_{n^2\varphi - l} + G_{n\varphi^2 + l} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n\varphi^2(1 - \varphi^2)}}\, e^{-\frac{l^2}{2n\varphi^2(1 - \varphi^2)}};$$

nimmt man an, dass $G_{n\varphi^2 - l} = G_{n\varphi^2 + l}$, so folgt

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\varphi^2(1 - \varphi^2)}}\, e^{-\frac{l^2}{2n\varphi^2(1 - \varphi^2)}}\, dl$$

als Wahrscheinlichkeit der Bestimmung

$$i = n\varphi^2 + l,$$

oder präciser gesprochen als Wahrscheinlichkeit der unendlich benachbarten Grenzen $n\varphi^2 + l$ und $n\varphi^2 + l + dl$ von i; ersetzt man hier $n\varphi^2$ durch den in Nr. 195 abgeleiteten Werth $\frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2}$, so ist dann die Wahrscheinlichkeit Π_1 der Bestimmung

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l$$

das Product aus der Wahrscheinlichkeit Π von z und der Wahrscheinlichkeit Π' von l, also

$$\Pi_1 = \Pi\Pi' = \frac{1}{\sqrt{2\frac{q}{p}p'\left(1 - \frac{q}{p}\right)\left(1 + \frac{p'}{p}\right)\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi n\varphi^2(1 - \varphi^2)}}$$

$$\times\, e^{-\frac{z^2}{2\frac{q}{p}p'\left(1 - \frac{q}{p}\right)\left(1 + \frac{p'}{p}\right)} - \frac{l^2}{2n\varphi^2(1 - \varphi^2)}}\, dz\, dl$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2p'\varphi(1 - \varphi)} - \frac{l^2}{2n\varphi^2(1 - \varphi^2)}}}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1 - \varphi)^2(1 + \varphi)}}\, dz\, dl,$$

wenn man $\frac{p'}{p}$ neben 1 unterdrückt.

Nun wurde aber an die Spitze der Untersuchung die Frage nach der Wahrscheinlichheit von s in

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} + s$$

gestellt; vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorigen

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} - \frac{2nq'z}{p'^2} + l,$$

so folgt

$$s = l - \frac{2nq'z}{p'^2},$$

und führt man den hieraus für l fliessenden Werth

$$l = s + \frac{2nq'z}{p'^2}$$

in dem Ausdruck für Π_1 ein, integrirt sodann in Bezug auf z innerhalb der Grenzen $\pm\infty$, so ergibt sich

$$P_s = \frac{ds}{2\pi\sqrt{np'\varphi^3(1-\varphi)^2(1+\varphi)}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)} - \frac{\left(s + \frac{2nq'z}{p'^2}\right)^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}}$$

als Wahrscheinlichkeit, dass bei irgend einem Werthe von z der Werth von i innerhalb der unendlich benachbarten Grenzen

$$i = \frac{nq'^2}{p'^2} + s$$

und $\frac{nq'^2}{p'^2} + s + ds$ enthalten ist.

197. Die Wahrscheinlichkeit P zu bestimmen, dass der Fehler in $i = \frac{nq'^2}{p'^2}$ innerhalb gegebener Grenzen $\pm s$ enthalten sei, integrire man den obigen Ausdruck für P_s nochmals in Bezug auf s innerhalb der Grenzen $\pm s$. Behufs Ausführung dieser Integrationen transformiren wir den Exponenten von e, wobei wir im zweiten Gliede desselben $\frac{q'}{p'}$ näherungsweise durch φ ersetzen, wie folgt:

$$\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)} + \frac{(p's + 2n\varphi q'z)^2}{2np'^2\varphi^2(1-\varphi^2)}$$

$$= \frac{p'(1+\varphi) + 4n\varphi}{2p'^2\varphi(1-\varphi^2)} z^2 - \frac{2s}{p'\varphi(1-\varphi^2)} z + \frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)}$$

$$= \frac{p'(1+\varphi) + 4n\varphi}{2p'^2\varphi(1-\varphi^2)} \left\{ z^2 + \frac{4p's}{p'(1+\varphi) + 4n\varphi} z \right\} + \frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)};$$

zur Abkürzung sei

$$\frac{p'(1+\varphi)+4n\varphi}{2p'^2\varphi(1-\varphi^2)} = h, \quad \frac{2p's}{p'(1+\varphi)+4n\varphi} = g;$$

es ist dann weiter

$$\frac{z^2}{2p'\varphi(1-\varphi)} + \frac{(p's+2n\varphi q'z)^2}{2np'^2\varphi^2(1-\varphi^2)} = \frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)} - hg^2 + h[z+g]^2,$$

mithin, wenn für den Augenblick der vor dem Integrationszeichen stehende Coefficient mit c bezeichnet wird,

$$P = c\int_{-s}^{s} ds\, e^{-\left[\frac{s^2}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)} - hg^2\right]} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-h[z+g]^2}$$

$$= c\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}}\int_{-s}^{s} ds\, e^{-\left[\frac{1}{2n\varphi^2(1-\varphi^2)} - \frac{2}{\varphi(1-\varphi^2)\{p'+(p'+4n)\varphi\}}\right]s^2}$$

$$= \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{2\pi n\varphi^2(1-\varphi)\{p'+(p'+4n)\varphi\}}}\int_{-s}^{s} ds\, e^{-\frac{p's^2}{2n\varphi^2(1-\varphi)\{p'+(p'+4n)\varphi\}}}.$$

Setzt man schliesslich zur Abkürzung

$$\frac{p'}{2n\varphi^2(1-\varphi)\{p'+(p'+4n)\varphi\}} = k^2,$$

so wird

$$P = \frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^s e^{-k^2s^2}\, ds$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Beispiel. Unter Zugrundelegung von Tafel II. sind die wahrscheinlichen Grenzen der Anzahl jener Ehepaare zu berechnen, welche von 10000 zwischen 20-jährigen Personen geschlossenen Ehen nach 30 Jahren, zu einer Zeit also, wo die Ehegatten 50 Jahre alt sind, noch bestehen.

Für diesen Fall ist

$$p' = 6415, \quad q' = 4450,$$
$$n = 10000;$$

rechnet man k mit dem Werthe $\varphi = \frac{4450}{6415} = 0{\cdot}6936867$, so findet sich

$$k = 0{\cdot}007507.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit der Fehlergrenze s in

$$i = n \frac{q'^2}{p'^2} = 4812.$$

ausgedrückt durch

$$P = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-k^2 s^2} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ks} e^{-t^2} dt,$$

und da es sich um die wahrscheinliche Fehlergrenze handelt, so muss $P = 0{\cdot}5$ werden, wofür

$$ks = 0{\cdot}476936$$

wird. Mit dem für k gefundenen Zahlenwerthe erhält man nun

$$s = \frac{0{\cdot}476936}{0{\cdot}007507} = 64;$$

mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ liegt also die Anzahl der von 10000 Ehen der erwähnten Kategorie nach 30 Jahren noch bestehenden Ehepaare zwischen den Grenzen

$$4812 - 64 = 4748 \quad \text{und} \quad 4812 + 64 = 4876.$$

Für $P = 0{\cdot}9$ fände man aus Tafel I. durch Interpolation

$$ks = 1{\cdot}160013$$

und mit Hilfe von k

$$s = \frac{1{\cdot}160013}{0{\cdot}007507} = 155,$$

so dass dieser Wahrscheinlichkeit die Grenzen

$$4657 \quad \text{und} \quad 4967$$

von i entsprechen. Mit weiter wachsendem P rücken die Grenzen von i immer langsamer auseinander.

5. Theorie der Bevölkerung nach Euler's Hypothese.

198. **Theorem.** *Ist in einem Lande das Verhältniss der jährlichen Geburten sowie jenes der jährlichen Sterbefälle zur gesammten Bevölkerung constant, so bilden die Zahlen der Geburten, der Sterbefälle sowie die Bevölkerungszahlen der aufeinanderfolgenden Jahre geometrische Progressionen.*

Beweis. Es bezeichne:

V die Bevölkerung zum Zeitpunkte τ; T, G beziehungsweise die Zahl der Todes- und Geburtsfälle in dem diesem Zeitpunkte nachfolgendem (ersten) Jahre;

V_1 die Bevölkerung zum Zeitpunkte $\tau + 1$;
T_1, G_1 die analogen Zahlen des 2. Jahres;
V_2 die Bevölkerung zum Zeitpunkte $\tau + 2$;
T_2, G_2 die analogen Zahlen des 3. Jahres; u. s. w.
Die Hypothese Euler's nimmt an, es sei

$$\frac{V}{G} = g, \quad \frac{V}{T} = t; \quad \text{woraus } G = \frac{V}{g}, \quad T = \frac{V}{t}, \quad \frac{T}{G} = \frac{g}{t};$$

$$\frac{V_1}{G_1} = g, \quad \frac{V_1}{T_1} = t; \quad \text{„} \quad G_1 = \frac{V_1}{g}, \quad T_1 = \frac{V_1}{t}, \quad \frac{T_1}{G_1} = \frac{g}{t},$$

$$\frac{V_2}{G_2} = g, \quad \frac{V_2}{T_2} = t; \quad \text{„} \quad G_2 = \frac{V_2}{g}, \quad T_2 = \frac{V_2}{t}, \quad \frac{T_2}{G_2} = \frac{g}{t},$$

u. s. w.

1) Die Ueberschüsse der Geburten über die Todesfälle in den aufeinanderfolgenden Jahren sind

$$\Sigma = G - T = \frac{V}{g} - \frac{V}{t} = V\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{t}\right),$$

$$\Sigma_1 = G_1 - T_1 = \ldots V_1\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{t}\right),$$

$$\Sigma_2 = G_2 - T_2 = \ldots V_2\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{t}\right), \text{ u. s. w.}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$r = 1 + \frac{1}{g} - \frac{1}{t},$$

so ergibt sich leicht

$$V = \ldots\ldots\ldots\ldots V,$$

$$V_1 = V + \Sigma = \left(1 + \frac{1}{g} - \frac{1}{t}\right) = Vr,$$

$$V_2 = V_1 + \Sigma_1 = \ldots\ldots V_1 r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_i = V_{i-1} + \Sigma_{i-1} = \ldots\ldots V_{i-1} r;$$

durch Multiplication dieser Gleichungen findet man nach entsprechender Abkürzung

$$V_i = V r^i; \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

daher ist

$$V_{i+1} = V r^{i+1},$$

woraus

$$r = \frac{V_{i+1}}{V_i}, \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha')$$

gefunden wird.

2) Ersetzt man in (α) V_i durch $g G_i$ und V durch $g G$, so folgt

$$G_i = G r^i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

also

$$G_{i+1} = G r^{i+1},$$

woraus wieder

$$r = \frac{G_{i+1}}{G_i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta')$$

geschlossen wird.

3) Setzt man in Gleichung (α) an Stelle von V_i den Werth $t T_i$, ebenso $t T$ statt V, so erhält man

$$T_i = T r^i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

woraus

$$T_{i+1} = T r^{i+1}$$

und

$$r = \frac{T_{i+1}}{T_i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma')$$

folgt.

Durch die Gleichungen (α), (β), (γ) ist das aufgestellte Theorem erwiesen; die Formeln (α'), (β'), (γ') zeigen, wie der gemeinschaftliche Quotient der geometrischen Progressionen aus den Bevölkerungs-, Geburts- und den Zahlen der Verstorbenen zweier aufeinanderfolgender Jahre ermittelt werden kann.

Anmerkung. Die Verhältnisszahlen g und t, welche auch als Anzahlen derjenigen Einwohner gedeutet werden können, auf welche jährlich je ein Geburts-, respective Sterbefall kommt, bezeichnet man als Geburts-, beziehungsweise Sterblichkeitsziffer. Häufig belegt man auch die Reciproken dieser Zahlen mit den eben angeführten Namen. Der Werth r würde gewissermassen ein Mass für das Wachsthum der Bevölkerung abgeben.

Geburts- und Sterblichkeitsziffer werden sehr häufig zur Beurtheilung der Bevölkerungsbewegung angeführt, hauptsächlich wegen ihrer anschaulichen Bedeutung. Besonderen wissenschaftlichen Werth darf man diesen Zahlen jedoch, namentlich in der vorliegenden Auffassung, nicht beilegen.

Was die in der Euler'schen Hypothese vorausgesetzte Beständigkeit von g und t anlangt, so muss im Vorhinein

bemerkt werden, dass eine solche wohl nirgends, namentlich nicht für lange Zeiträume, streng besteht; vielmehr sind die genannten Werthe mehr weniger grossen Schwankungen unterworfen.

199. **Erstes Problem.** *Für eine Bevölkerung, welche den im vorigen Theorem gestellten Forderungen Genüge leistet, die Anzahl i von Jahren abzuleiten, welche nöthig ist, damit sie auf den m-fachen Betrag ihres gegenwärtigen Standes anwachse.*

Lösung. Ist V die gegenwärtige Bevölkerung, so ist sie nach Ablauf von i Jahren Vr^i; aus der Bedingung

$$Vr^i = mV$$

folgt

$$i = \frac{\log m}{\log r}.$$

Beispiel. Für $a = 2$ und $m = 500$ Millionen findet sich unter Zugrundelegung des Werthes $r = 1{\cdot}0062$, (welchen Liagre für die Bevölkerung Belgiens abgeleitet hat),

$$i = 3240,$$

so dass 3240 Jahre hinreichen würden, damit aus einem Menschenpaare eine Bevölkerung von 1000 Millionen anwachse.

200. **Zweites Problem.** *Unter der gleichen Voraussetzung bestimme man aus dem Ueberschusse Σ der Geburten über die Sterbefälle innerhalb eines Zeitraumes von i Jahren den Quotienten der Reihe, welche von den successiven Bevölkerungszahlen gebildet wird.*

Lösung. Wäre V die Bevölkerung am Beginn, V_i die Bevölkerung am Schlusse des gedachten Zeitraumes, so hätte man

$$V_i = Vr^i,$$

woraus

$$r = \sqrt[i]{\frac{V_i}{V}} = \sqrt[i]{\frac{V + \Sigma}{V}} = \sqrt[i]{1 + \frac{\Sigma}{V}}$$

$$= 1 + \frac{\Sigma}{iV} = 1 + \frac{V_i - V}{iV}$$

gefunden wird.

Beispiel. In Preussen betrug die Bevölkerung

1822 . . 11,664133,

1834 . . 13,509927;

daher war Σ in diesem 12jährigen Zeitraume 1,845794; hieraus würde sich

$$r = 1 + \frac{1,845794}{12 \cdot 11,664133} = 1{\cdot}013187$$

ergeben. Rechnet man mit diesem Betrage die Bevölkerung für das Jahr 1828 nach der Formel

$$V = 11,664133 \cdot (1{\cdot}013187)^6,$$

so ergibt sie sich mit 12,617991 gegen die wirklich beobachtete 12,726110.

201. **Drittes Problem.** *In dem Kalenderjahre von* τ *bis* $\tau + 1$ *seien* T'_{i+1} *Sterbefälle von Personen zwischen den Altersgrenzen* i *und* $i + 1$ *beobachtet worden; es soll hieraus die Zahl* T_{i+1} *von Personen ermittelt werden, welche, aus einem Geburtsjahre stammend, zwischen den Altersgrenzen* i *und* $i + 1$ *sterben.*

Lösung. Die Verstorbenen T'_{i+1} zerfallen in zwei Gruppen, nämlich in solche, welche aus dem Geburtsjahre

$$\tau - (i + 1) \quad \text{bis} \quad \tau - i \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

und in solche, welche aus dem Geburtsjahre

$$\tau + 1 - (i + 1) = \tau - i \quad \text{bis} \quad \tau + 1 - i = \tau - i + 1 \;.\, (2)$$

stammen; bezeichnet man die Zahl der in die erste Gruppe gehörigen mit t'_{i+1}, die Zahl der Verstorbenen aus der zweiten Gruppe mit t''_{i+1}, so ist

$$T'_{i+1} = t'_{i+1} + t''_{i+1} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Versteht man unter T_{i+1} die Zahl aller zwischen i und $i + 1$ Jahren Verstorbenen, die nur aus dem *einen* Geburtsjahre (2), d. i. vom Zeitpunkte $\tau - i$ bis zu jenem $\tau - i + 1$, herrühren, so ist t''_{i+1} bereits ein Theil dieser Sterbefälle; der andere Theil, den wir mit t'''_{i+1} bezeichnen wollen, käme erst im nächsten Kalenderjahre ($\tau + 1$ bis $\tau + 2$) zur Beobachtung und ist analog den Sterbefällen t'_{i+1}, diesen jedoch nicht gleich, weil er einer um ein Jahr späteren, also r mal grösseren Geburtenmenge entstammt; folglich ist

$$t'''_{i+1} = r t'_{i+1}, \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

und nachdem

$$T_{i+1} = t''_{i+1} + t'''_{i+1},$$

so hat man schliesslich

$$T_{i+1} = t''_{i+1} + r\, t'_{i+1} \ldots \ldots \ldots (5)$$

Wurden demnach die in einem Jahre beobachteten Sterbefälle T'_{i+1} zwischen zwei Altersgrenzen i und $i+1$ auch nach dem Geburtsjahre gesondert (in die Theile t'_{i+1} und t''_{i+1}), so lässt sich auf Grund solcher Beobachtungen bei bekanntem r die andere Gesammtheit von Verstorbenen, nämlich T_{i+1}, ableiten.

Beispiel. Zur Erklärung des Obigen nehmen wir an, es seien in dem Kalenderjahre vom 1. Jan. 1878 (τ) bis 1. Jan. 1879 ($\tau + 1$) 3972 Todesfälle von Personen zwischen 10 und 11 Jahren (i und $i+1$) beobachtet und nach dem Geburtsjahre geschieden worden; ein Theil t'_{11} dieser Verstorbenen wird nämlich aus dem Kalenderjahre (1)

1878 — 11 = 1867 (1. Jan.) bis 1878 — 10 = 1868 (1. Jan.),

der andere Theil t''_{11} aus dem Kalenderjahre (2)

1879 — 11 = 1868 (1. Jan.) bis 1879 — 10 = 1869 (1. Jan.)

herrühren, und es sei

$$t'_{11} = 1969,\ t''_{11} = 2003, \text{ sodass } T'_{11} = t'_{11} + t''_{11} = 3972.$$

Gilt für r der in Nr. 200 gefundene Werth 1·013187, so hat man als Zahl der zwischen den Altersgrenzen von 10 und 11 Jahren Verstorbenen, welche aus dem Geburtsjahre (2) vom 1. Jan. 1868 bis 1. Jan. 1869 stammen, nach der Formel (5)

$$T_{11} = 2003 + 1{\cdot}013187 \cdot 1969 = 3998.$$

202. **Viertes Problem.** *In dem Kalenderjahre τ bis $\tau + 1$ wurde die Vertheilung der Verstorbenen nach Altersclassen und Geburtsjahren beobachtet, ebenso die Zahl der Geburten G ermittelt. Aus diesen Beobachtungen, sowie aus dem bekannten Quotienten r sollen die Zahlen der von den G Geborenen nach 1, 2, 3, ... Jahren Ueberlebenden abgeleitet werden.*

Lösung. Aus den beobachteten Theilgesammtheiten (t'_1, t''_1), (t'_2, t''_2), $\cdots$ berechnet man nach Formel (5) die Zahlen

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \cdots\ T_i,\ \cdots;$$

doch beziehen sich diese Gesammtheiten von Verstorbenen auf verschiedene Geburtenmengen, müssen daher sämmtlich auf die Geburtenmenge G des Kalenderjahres τ bis $\tau + 1$ zurückgeführt werden; und zwar entspricht

T_1 der Geburtenmenge G,
T_2 „ eines um 1 Jahr zurückliegenden,
T_3 „ „ „ 2 Jahre „
. . . .
T_i „ „ „ $i-1$ Jahre „ Kalenderjahres;

durch Reduction auf die Geburtenmenge G erhält man die Zahlen

$$\begin{aligned} B_1 &= T_1, \\ B_2 &= r\,T_2, \\ B_3 &= r^2\,T_3, \\ &\vdots \\ B_i &= r^{i-1}T_i, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Nun ist, wenn man die Ueberlebenden nach i und $i+1$ Jahren beziehungsweise mit A_i und A_{i+1} bezeichnet,

$$A_i - A_{i+1} = B_{i+1},$$

woraus

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= A_i - B_{i+1} \\ &= A_i - r^i\,T_{i+1} \quad \ldots\ldots\ldots (6) \end{aligned}$$

folgt. Ersetzt man in dieser Formel i nach und nach durch $0, 1, 2, 3, \cdots$ und beachtet, dass $A_0 = G$ ist, so hat man

$$\begin{aligned} A_0 &= G \\ A_1 &= A_0 - T_1, \\ A_2 &= A_1 - r\,T_2, \\ A_3 &= A_2 - r^2\,T_3, \\ &\cdots \\ A_i &= A_{i-1} - r^{i-1}\,T_i, \end{aligned}$$

woraus durch Addition

$$A_i = G - \{T_1 + r\,T_2 + r^2\,T_3 + \cdots + r^{i-1}T_i\} \,.\,. \quad (7)$$

erhalten wird.

Diese Formel gibt den Weg an, wie aus den in der oben angegebenen Weise angeordneten Beobachtungen *eines* Jahres und unter Zugrundelegung des Euler'schen Theorems eine Mortalitätstafel der üblichen Form abzuleiten wäre.

Für $r = 1$ hat man es mit einer stationären Bevölkerung zu thun; durch Ausdehnung der Formel (7) bis zu jener Altersgrenze ω, für welche $A_\omega = 0$ ist, ergibt sich in diesem Falle

$$G = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_\omega; \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

da überdies, wie ein Blick auf die Gleichungen (3) und (5) belehrt, die Gesammtheiten T_{i+1} mit den direct beobachteten T'_{i+1} zusammenfallen, so braucht die Zahl der Geburten nicht besonders beobachtet zu werden, da sie der Gesammtzahl der Verstorbenen des betroffenen Kalenderjahres gleichkommt.

Durch Einsetzung des Werthes für G aus (8) in (7) ergibt sich

$$A_i = T_{i+1} + T_{i+2} + \cdots + T_\omega \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

In dieser Formel ist das Wesen der früher vielfach benutzten Halley'schen Methode zur Construction von Sterblichkeitstafeln enthalten, welche sich auf die Verstorbenen allein stützt. Ueber den Werth dieser Methode braucht, wenn man die Reihe der Voraussetzungen überblickt, welche auf die vorliegende Formel geführt haben, nichts weiter bemerkt zu werden.

203. *Ableitung einer Bevölkerungstafel aus einer Sterblichkeitstafel.* Die zu einem Zeitpunkte τ bestehende Bevölkerung V zerfällt in Altersgruppen von 0 bis 1, 1 bis 2, 2 bis 3, $\cdots \omega - 1$ bis ω Jahren; jede dieser Altersgruppen stammt jedoch aus einem andern Geburtsjahre, und zwar

die Altersgruppe 0 bis 1 aus dem Jahre $\tau - 1$ bis τ,
" 1 " 2 aus einem um 1 Jahr zurückliegenden,
" 2 " 3 " " 2 Jahre "
. . . . . .
" i " $i+1$ " " i " " Kalenderjahre.

Die Absterbeordnung der im Jahre $\tau - 1$ bis τ Geborenen G sei dargestellt durch die Zahlen

$$A_0 = G, A_1, A_2, \cdots A_i, \cdots A_{\omega - 1}.$$

Bezeichnet man mit $C_1, C_2, C_3, \cdots C_{i+1}, \cdots$ die Anzahlen der Personen in den oben erwähnten Altersclassen, so kann

$$C_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}$$

gesetzt werden; ebenso könnte C_2 gleichgenommen werden $\frac{A_1 + A_2}{2}$, wenn die zweite Altersclasse aus demselben Geburtsjahre, also aus derselben Geburtenmenge stammen würde; nachdem dies nicht der Fall und die Geburtenmenge des um ein Jahr zurückliegenden Kalenderjahres r mal geringer ist, so wird man

$$C_2 = \frac{A_1 + A_2}{2r}$$

zu nehmen haben; ebenso wird man für C_3 nicht $\frac{A_2 + A_3}{2}$ nehmen dürfen, weil diese Altersclasse aus einer um zwei Jahre zurückliegenden, also r^2 mal geringeren Geburtenmenge herrührt; es ist daher

$$C_3 = \frac{A_2 + A_3}{2r^2}$$

zu setzen. In gleicher Weise ergibt sich

$$C_4 = \frac{A_3 + A_4}{2r^3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_{i+1} = \frac{A_i + A_{i+1}}{2r^i},$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_\omega = \frac{A_{\omega-1}}{2r^{\omega-1}}.$$

Demnach ist

$$V = C_1 + C_2 + \cdots + C_\omega$$
$$= \frac{A_0 + A_1}{2} + \frac{A_1 + A_2}{2r} + \frac{A_2 + A_3}{2r^2} + \cdots + \frac{A_{\omega-1}}{2r^{\omega-1}},$$

während die Zahlen $C_1, C_2, \cdots C_\omega$ die Vertheilung der Bevölkerung nach Altersclassen, also eine Bevölkerungstafel darstellen.

Für $r = 1$, d. h. für eine stationäre Bevölkerung, wird

$$C_1 = \frac{A_0 + A_1}{2},$$

$$C_2 = \frac{A_1 + A_2}{2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ferner

$$V = \frac{A_0}{2} + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{\omega - 1};$$

hebt man rechter Hand $A_0 = G$ heraus, so ergibt sich im Hinblick auf Formel (4) Nr. 180

$$V = G\left\{\frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_{\omega - 1}}{A_0}\right\} = G M_0.$$

Aus dieser allerdings höchst einfachen und an sich interessanten Beziehung, welche jedoch auf Voraussetzungen beruht, die nirgends stattfinden, würde einerseits aus der Geburtenmenge eines Jahres und der mittleren Lebensdauer die (constante) Bevölkerung, andererseits aus Geburtenmenge und Bevölkerung die mittlere Lebensdauer folgen. Ueberdies liessen sich Consequenzen über den Zusammenhang der Geburtenmenge und mittleren Lebensdauer ziehen, die wir wegen ihrer Unhaltbarkeit nicht erst anführen.

204. **Anmerkung.** Die Entwickelung einer Bevölkerung sei durch die Function

$$v = k e^{a t}$$

dargestellt, erfolge also nach einer geometrischen Progression, wenn die Zeit t nach einer arithmetischen Reihe fortschreitet; k und a sind Constanten, e die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Nennt man die dem Anfangspunkte der Zeitzählung entsprechende Bevölkerung v_0, so ist

$$v_0 = k e^0 = k,$$

weshalb

$$v = v_0 e^{a t}$$

zu schreiben ist. Der nach t genommene Differentialquotient von v drückt die Geschwindigkeit im Wachsthum der Bevölkerung aus und wird als *Energie ihrer Entwickelung* bezeichnet; man erhält für ihn den Werth

$$\frac{dv}{dt} = a v_0 e^{a t} = a v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Zur Ermittelung von a ist die Kenntniss zweier zusammengehöriger Werthe von v und t erforderlich; wüsste man beispielsweise, dass v in $2v$ übergeht, wenn t auf $t + 25$ anwächst, so wäre

$$2v = v_0 e^{at} e^{25a} = v e^{25a},$$

woraus

$$a = \frac{l \cdot 2}{25} = 0{\cdot}027726$$

folgt.

In Europa weisen die Beobachtungen im Allgemeinen eine Abnahme in der Energie der Entwickelung, also in av nach. Um diesem Umstande Ausdruck zu verleihen, nehmen wir an, diese Abnahme finde proportional mit dem Wachsen der Bevölkerung statt und betrage daher $g(v - V_0)$, worin g den Proportionalitätsfactor und V_0 eine vor der Hand unbestimmt gelassene Normalbevölkerung bedeutet; Formel (α) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\frac{dv}{dt} = av - g(v - V_0),$$

woraus

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt} = a - g\frac{v - V_0}{v} = \frac{gV_0 - (g - a)v}{v}.$$

Wird

$$g - a = m, \quad gV_0 = mV$$

gesetzt, so hat man weiter

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{m(V - v)}{v}$$

und

$$dt = \frac{1}{m} \frac{dv}{V - v},$$

woraus durch Integration

$$t + c = -\frac{1}{m} l \cdot (v - V)$$

erhalten wird; nachdem aber für $t = 0 \cdots v = v_0$ wird, so ist

$$c = -\frac{1}{m} l \cdot (v_0 - V)$$

und

$$t = \frac{1}{m} l \cdot \frac{V - v_0}{V - v}, \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

$$l \cdot (V - v) = l \cdot (V - v_0) - mt = l \cdot [(V - v_0) e^{-mt}];$$

die Auflösung nach v ergibt endlich

$$v = V - (V - v_0) e^{-mt} \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Es erübrigt noch die Bestimmung von V und m.

Kennt man die zugehörigen Werthepaare

$$t_1,\ v_1;\quad 2t_1,\ v_2,$$

so ergeben sich durch Anwendung der Formel (β) die Gleichungen

$$t_1 = \frac{1}{m}\, l \cdot \frac{V - v_0}{V - v_1},$$

$$2t_1 = \frac{1}{m}\, l \cdot \frac{V - v_0}{V - v_2},$$

aus welchen durch Ausscheidung von m zunächst

$$V = \frac{v_1^2 - v_0 v_2}{2v_1 - (v_0 + v_2)} \ldots\ldots\ldots (\delta)$$

und hiermit

$$m = \frac{1}{t_1}\, l \cdot \frac{V - v_0}{V - v_1} = \frac{1}{t_1}\, l \cdot \left\{ \frac{\frac{v_1^2 - v_0 v_2}{2v_1 - (v_0 + v_2)} - v_0}{\frac{v_1^2 - v_0 v_2}{2v_1 - (v_0 + v_2)} - v_1} \right\} \ldots (\varepsilon)$$

sich ergibt.

Beispiel. Die Bevölkerung Preussens betrug

im Jahre 1816 . . . 10,349031,
„ „ 1822 . . . 11,664133,
„ „ 1828 . . . 12,726110.

Wird mit der Zeitzählung im Jahre 1816 begonnen, so hat man

$$v_0 = 10{,}349031,$$

$$t_1 = 6,\quad v_1 = 11{,}664133;\qquad 2t_1 = 12,\quad v_2 = 12{,}726110.$$

Hiermit ergeben sich durch Anwendung der Formeln (δ) und (ε) die Werthe

$$V = 17{,}181391,$$

$$m = 0{\cdot}0356315,$$

und die Formel (γ) lautet in Zahlen

$$v = 17{,}181391 - 6{,}832360\, e^{-0{\cdot}0356315\, t}.$$

Rechnet man mit Hilfe derselben die Bevölkerungszahl für das Jahr 1837, wofür

$$t = 21$$

zu setzen ist, so findet sich

$$v = 13{,}948395,$$

während die Beobachtung

$$v' = 14{,}098125$$

ergab. Der Unterschied beträgt $\frac{1}{94}$ oder 1·06 % des beobachteten Werthes.

6. Laplace' Theorie der Bestimmung der Bevölkerung eines Landes.

205. **Erstes Problem.** *Das Verhältniss g der Volksmenge zur Anzahl der jährlichen Geburten zu ermitteln.*

Lösung. Zu diesem Zwecke hat man das Ergebniss einer Volkszählung mit genau geführten Geburtsregistern zusammenzuhalten. Ist p die Bevölkerungszahl, q die Anzahl der jährlichen Geburten, welche aus dieser Bevölkerung hervorgegangen sind, so hat man

$$g = \frac{p}{q}$$

zu setzen.

Anmerkung. Laplace versteht unter q die Anzahl der Geburten, welche in dem der Volkszählung vorausgegangenen Jahre beobachtet wurden. Doch wird, zur Ermittelung der Geburtsziffer g, wohl auch die Geburtenmenge des dem Zählungszeitpunkte nachfolgenden Jahres in Rechnung gezogen, wie dies in Nr. 198 geschehen ist; endlich wird zuweilen die Geburtenmenge eines Jahres mit dem Durchschnitte der Bevölkerungszahlen am Beginn und Ende dieses Jahres verglichen.

Beispiel. Am 22. September 1802 wurde in einer Anzahl von Gemeinden Frankreichs eine Volkszählung vorgenommen; die Gemeinden waren über 30 Departements und diese über das ganze Land so vertheilt, dass eine Ausgleichung der aus der Veränderlichkeit des Klimas hervorgehenden Einflüsse erwartet werden durfte. Die Zählung ergab

$$p = 2{,}037615.$$

In den drei, dem Zählungszeitpunkte vorangehenden Jahren, also vom 22. September 1799 bis zum 22. September 1802

wurden in den genannten Gemeinden 110312 Knaben und 105287 Mädchen geboren; auf ein Jahr entfallen also im Durchschnitt

$$q = \frac{110312 + 105287}{3} = 71866$$

Geburten. Hieraus ergibt sich

$$g = \frac{p}{q} = 28{\cdot}352845.$$

206. **Zweites Problem.** *Aus der bekannten Geburtsziffer g und der Anzahl q' der jährlichen Geburten die Bevölkerung des Landes zu berechnen.*

Lösung. Unter der Voraussetzung, dass die Geburtsziffer eine Constante ist, welcher man um so näher kommt, je ausgedehnter das zu ihrer Berechnung verwendete Beobachtungsmaterial, ergibt sich der vortheilhafteste Werth für die verlangte Bevölkerung

$$p' = g\,q' = \frac{p\,q'}{q}.$$

Beispiel. Für den im vorigen Beispiel gefundenen Werth von g ergibt sich die $q' = 1{,}000000$ Geburten entsprechende Bevölkerung

$$p' = 1{,}000000 \cdot 28{\cdot}352845 = 28{,}352845,$$

ferner die einer Geburtenmenge $q' = 1{,}500000$ entsprechende Bevölkerung

$$p' = 42{,}529267.$$

207. **Drittes Problem.** *Die Wahrscheinlichkeit Π eines Fehlers z in der Bestimmung $p' = \frac{p\,q'}{q}$ zu ermitteln.*

Lösung. Die analytische Lösung für dieses Problem ist bereits in Nr. 195 enthalten. Es wurde nämlich beobachtet, dass aus einer Bevölkerung p im Jahre q Geburten hervorgehen, und nun verlangt man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass q' später beobachtete Geburten einer Bevölkerung

$$\frac{p\,q'}{q} + z$$

entstammen. Vertauscht man mithin in der für Π in Nr. 195 gefundenen Formel

p mit q,
q mit p,
p' mit q',

so ergibt sich sofort die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$\Pi = \sqrt{\frac{q^3}{2q'p(p-q)(q+q')\pi}}\, e^{-\frac{q^3 z^2}{2q'p(p-q)(q+q')}}\, dz.$$

208. **Viertes Problem.** *Die Wahrscheinlichkeit P zu bestimmen, dass der in $p' = \frac{pq'}{q}$ enthaltene Fehler innerhalb der Grenzen $\pm z$ sich befindet.*

Lösung. Zu diesem Behufe hat man obigen Ausdruck innerhalb dieser Grenzen zu integriren und erhält

$$P = \sqrt{\frac{q^3}{2q'p(p-q)(q+q')\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{q^3 z^2}{2q'p(p-q)(q+q')}}\, dz$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-a^2 z^2}\, dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{az} e^{-t^2}\, dt,$$

worin

$$a^2 = \frac{q^3}{2q'p(p-q)(q+q')}$$

zu nehmen ist

Beispiel. Für

$$p = 2{,}037615,$$
$$q = 71866,$$
$$q' = 1{,}500000$$

erhält man für die Bevölkerung den Werth

$$p' = \frac{pq'}{q} = 42{,}529267,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass demselben ein zwischen den Grenzen

$$\pm z = \pm 500000$$

belegener Fehler anhafte, ist, nachdem sich für a der Werth

$$a = 0{\cdot}000004433$$

ergibt, mit Zuhilfnahme von Tafel I.

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2 \cdot 2165} e^{-t^2} dt = 0{\cdot}9982787 = 1 - \frac{1}{581}{}^{*)},$$

so dass man 580 gegen 1 wetten kann, die in der angegebenen Weise bestimmte Bevölkerungszahl 42,529267 sei nicht um mehr als eine halbe Million fehlerhaft.

Anmerkung. Der Rechnung liegt selbstverständlich die Annahme zu Grunde, dass die Bevölkerung nicht auch durch Ein- und Auswanderung geändert werde; es wird also an eine völlig geschlossene Bevölkerung gedacht.

X. Capitel.

Ueber Lebensversicherungen.

209. **Vorbemerkungen.** Das theoretische Princip, welches dazu dient, um Fragen, welche Versicherungen betreffen, in Form von Gleichungen darzustellen und sodann durch Rechnung zu erledigen, besteht in der Gleichsetzung der Einnahmen der Anstalt mit deren Auslagen.

Je nach der Art des Versicherungsmodus setzen sich die Einnahmen zusammen: 1) Aus denjenigen Capitalien (S), welche die Parteien bei Abschluss der Versicherung an die Anstalt abgeben; 2) aus den zeitweise oder lebenslänglich gezahlten Beiträgen (σ), Prämien genannt.

Diesen gegenüber befinden sich die Ausgaben, bestehend 1) aus den an die Versicherten oder deren Erben ein- für allemal oder terminweise zu zahlenden Capitalien oder Versicherungssummen (ϱ); 2) aus den für eine bestimmte Frist oder zeitlebens zu leistenden Renten, Zeit- oder Lebensrenten genannt; 3) aus den Verwaltungskosten. Letztere werden in Form von Zuschlägen zu den auf mathematischem Wege gefundenen Netto-Einlagen oder Netto-Prämien hereingebracht; die so veränderten Werthe werden Brutto-Ein-

*) Laplace gibt, wohl in Folge eines Versehens, $1 - \frac{1}{1162}$ an.

lagen, beziehungsweise Bruttoprämien genannt und bilden den Tarif der Anstalt.

Einnahmen und Ausgaben sind als auf Zinseszins liegende Capitalien zu behandeln und müssen daher, um verglichen werden zu können, auf denselben Zeitpunkt reducirt werden.

Im Folgenden soll r den Werth der Geldeinheit nach Ablauf eines Jahres bezeichnen, sodass, jenachdem die Verzinsung mit $3, 3\frac{1}{2}, 4$ und 5 Procent erfolgt, $r = 1{\cdot}03$, $1{\cdot}035$, $1{\cdot}04$, $1{\cdot}05$ zu setzen sein wird.

210. **Problem I.** *Es ist die Frage nach dem Capital S, welches eine Person im Alter von m Jahren einer Versicherungsanstalt vorauszubezahlen hat, damit, wenn sie durch die a ersten Jahre, jedesmal am Ende des Jahres, den Beitrag σ leistet, ihr die Anstalt eine durch c Jahre vom b^{ten} Jahre nach Abschluss des Vertrages an laufende, immer am Ende des Jahres fällige Rente ρ zusichere.*

Lösung. I. *Berechnung der Einnahmen.*

1) Es sei M eine (sehr grosse) Anzahl von Personen des Alters m, welche unter den Bedingungen der Aufgabe mit der Anstalt gleichzeitig Verträge abschliessen; dies bedingt für die Gesellschaft eine sofortige Einnahme MS.

2) Von diesen M Personen sind am Ende des ersten Jahres noch $M\frac{A_{m+1}}{A_m}$ am Leben und diese zahlen die Summe $M\sigma\frac{A_{m+1}}{A_m}$ ein, deren gegenwärtiger Werth jedoch $\frac{M\sigma}{r}\frac{A_{m+1}}{A_m}$ ist.

3) Ebenso ergibt sich der gegenwärtige Werth der aus den am Ende des zweiten Jahres geleisteten Beiträgen resultirenden Einnahme mit

$$\frac{M\sigma}{r^2}\frac{A_{m+1}}{A_m} \text{ u. s. w.,}$$

schliesslich der auf das Ende des a^{ten} Jahres bezügliche Werth mit

$$\frac{M\sigma}{r^a}\frac{A_{m+a}}{A_m}.$$

4) Die gesammte von den M Individuen herrührende Einnahme ist daher

$$M\left\{S + \frac{\sigma}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+a}}{r^a}\right)\right\};$$

dividirt man dieselbe durch M, so gibt der **Quotient** die durchschnittliche, auf ein Individuum entfallende **Einnahme**

$$X = S + \frac{\sigma}{A_m}\left[\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+a}}{r^a}\right] \ldots \text{(I)}$$

II. *Berechnung der Ausgaben.*

1) Während der b ersten Jahre zahlt die Anstalt **nichts.**

2) Am Ende des $\overline{b+1}^{\text{ten}}$ Jahres ist die Zahl der Ueberlebenden

$$M \frac{A_{m+b+1}}{A_m}$$

und der gegenwärtige Werth der an sie ausbezahlten **Renten**

$$\frac{M\varrho}{r^{b+1}} \frac{A_{m+b+1}}{A_m}.$$

3) Der gegenwärtige Werth der am Ende des $\overline{b+2}^{\text{ten}}$ Jahres fälligen Auslage ergibt sich mit

$$\frac{M\varrho}{r^{b+2}} \frac{A_{m+b+2}}{A_m}, \text{ u. s. w.,}$$

endlich der discontirte Werth der letzten, am Schlusse des $\overline{b+c}^{\text{ten}}$ Jahres fälligen Renten mit

$$\frac{M\varrho}{r^{b+c}} \frac{A_{m+b+c}}{A_m}.$$

Durch Addition und nachherige Division durch M folgt der durchschnittliche discontirte Werth der an eine Person zu zahlenden Renten

$$Y = \frac{\varrho}{A_m r^b}\left\{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+b+c}}{r^c}\right\}. \text{(II)}$$

Von den Verwaltungskosten abgesehen, hat man demnach

$$X = Y \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(A)}$$

zu setzen.

Anmerkung. Dauert die Einzahlung der Prämie σ lebenslänglich, was wir dadurch anzeigen wollen, dass wir $a = \omega$ setzen, so muss die Reihe in dem Ausdrucke für X bis an das Ende der Sterblichkeitstafel fortgesetzt werden.

Ist die Rente eine Leibrente, was durch $c = \omega$ angedeutet werden soll, dann müssen die Glieder der Reihe in Y bis an die Grenze der Mortalitätstafel fortgeführt werden.

Mit Hilfe der Gleichung (A) kann eine der Grössen S, σ, ϱ berechnet werden, sobald die beiden andern gegeben sind; a, b, c, r werden als bekannt vorausgesetzt.

Besondere Fälle.

Erster Fall. Handelt es sich um eine Leibrente, welche sofort nach Abschluss des Vertrages beginnen und durch einmalige Einzahlung des Capitals S (auf Capitalsfuss, wie man diesen Modus bezeichnet) erworben werden soll, so hat man

$$\sigma = 0, \quad b = 0, \quad c = \omega$$

zu nehmen und Gleichung (A) liefert

$$S = \frac{\varrho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots\right), \quad \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

woraus auch

$$\frac{S}{r^m} = \frac{\varrho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r^{m+1}} + \frac{A_{m+2}}{r^{m+2}} + \cdots\right)$$

gefunden wird; um nach letzterer Formel bequem rechnen zu können, construirt man eine „Tafel der discontirten Zahlen der Lebenden", bestehend in der Zahlenreihe

$$\frac{A_0}{r^0} = a_0, \quad \frac{A_1}{r^1} = a_1, \quad \frac{A_2}{r^2} = a_2 \cdots \quad \frac{A_m}{r^m} = a_m \cdots$$

und bildet auch gleich die Summen

$$L_i = \sum_i^{\omega} a_i = \sum_i^{\omega} \frac{A_i}{r^i};$$

obige Formel schreibt sich dann kurz

$$\frac{S}{r^m} = \frac{\varrho}{A_m} \cdot L_{m+1},$$

woraus das verlangte

$$S = r^m \frac{\varrho}{A_m} \cdot L_{m+1} = \varrho \frac{L_{m+1}}{\frac{A_m}{r^m}} = \varrho \frac{L_{m+1}}{a_m}$$

gefunden wird.

Zweiter Fall. Soll eine Altersrente oder aufgeschobene Rente (welche erst bei einem höheren festgesetzten Alter

beginnt und bis ans Lebensende dauert) durch ein Capital S erkauft werden, so ist

$$\sigma = 0, \quad c = \omega$$

zu setzen und es wird

$$S = \frac{\varrho}{A_m r^b}\left(\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots\right),$$

oder mit Zuhilfenahme der oben erwähnten Symbole

$$S = \varrho \frac{L_{m+b+1}}{a_m}.$$

Dritter Fall. Soll eine aufgeschobene Leibrente durch Prämieneinzahlung (auf Beitragsfuss) erworben werden, so setze man, da die erste Prämie gleich bei Abschluss der Versicherung zu erlegen sein wird,

$$S = \sigma, \quad c = \omega,$$

und erhält, wenn die Prämienzahlung auch wieder nur a mal erfolgen soll,

$$\sigma = \frac{\varrho}{r^b} \frac{\frac{A_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots}{A_m + \frac{A_{m+1}}{r} + \cdots + \frac{A_{m+a+1}}{r^{a-1}}}$$

$$= \varrho \frac{L_{m+b+1}}{L_m - L_{m+a}}.$$

Vierter Fall. Handelt es sich um eine sofort zu beginnende Zeitrente, welche durch einmalige Einzahlung eines Capitals erworben werben soll, so ist

$$\sigma = 0, \quad b = 0$$

zu nehmen; Gleichung (A) gibt dann

$$S = \frac{\varrho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+c}}{r^c}\right)$$

$$= \varrho \frac{L_{m+1} - L_{m+c+1}}{a_m}.$$

Fünfter Fall. Für eine aufgeschobene Zeitrente auf Beitragsfuss ist wie im ersten Falle

$$S = \sigma$$

zu nehmen, und es ergibt sich dann bei a maliger Prämienzahlung

$$\sigma = \frac{\varrho}{r^b} \frac{A_{m+b+1} + \frac{A_{m+b+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+b+c}}{r^c}}{A_m + \frac{A_{m+1}}{r} + \cdots + \frac{A_{m+a-1}}{r^{a-1}}}$$

$$= \varrho \frac{L_{m+b+1} - L_{m+b+c+1}}{L_m - L_{m+a}}.$$

Allgemein kann die Gleichung (A) zur Lösung aller einschlägigen Aufgaben in der Form

$$S + \sigma \frac{L_{m+1} - L_{m+a+1}}{a_m} = \varrho \frac{L_{m+b+1} - L_{m+b+c+1}}{a_m}$$

geschrieben werden.

Anmerkung. Bezeichnet S' das von einer $m+1$ Jahre alten Person zu leistende Capital für eine unmittelbar nach Abschluss des Vertrags beginnende Leibrente, so gibt Formel (a) des ersten Falles nach einiger Reduction die Beziehung

$$S = \frac{A_{m+1}}{A_m} \cdot \frac{S' + \varrho}{r},$$

welche zur Construction einer Leibrententafel verwendet werden kann.

211. **Problem II.** *Es ist die Frage nach der Summe S, welche eine Person im Alter von m Jahren bei der Anstalt zu erlegen hat, damit, indem sie durch die a ersten Jahre nach Abschluss des Vertrages am Ende eines jeden Jahres den Betrag σ einzahlt, an ihre Erben eine Versicherungssumme ϱ ausbezahlt werde, vorausgesetzt, dass der Tod weder vor Ende des b^{ten}, noch nach Schluss des $\overline{b+c}^{\text{ten}}$ Jahres, vom Zeitpunkte des Vertrages gezählt, eintritt.*

Lösung. I. Die *Einnahmen* ergeben dieselbe Summe wie im vorigen Problem.

II. Die *Ausgaben* entnimmt man der folgenden Zusammenstellung:

Zahl der Sterbefälle:

Vom b^{ten} bis zum $\overline{b+1}^{\text{ten}}$ Jahre . . . $M \frac{A_{m+b} - A_{m+b+1}}{A_m}$,

„ $\overline{b+1}$ „ $\overline{b+2}$ „ . . . $M \frac{A_{m+b+1} - A_{m+b+2}}{A_m}$,

. . . .

„ $\overline{b+c-1}$ „ $\overline{b+c}$ „ . . . $M \frac{A_{m+b+c-1} - A_{m+b+c}}{A_m}$.

Discontirte Ausgabe:

$$\frac{M\varrho}{r^{b+1}}\,\frac{A_{m+b}-A_{m+b+1}}{A_m},$$

$$\frac{M\varrho}{r^{b+2}}\,\frac{A_{m+b+1}-A_{m+b+2}}{A_m},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{M\varrho}{r^{b+c}}\,\frac{A_{m+b+c-1}-A_{m+b+c}}{A_m}.$$

Durch Addition und Division durch M erhält man die durchschnittliche an ein Individuum erfolgte Auszahlung und damit die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &S+\frac{\sigma}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+a}}{r^a}\right) \\ &=\frac{\varrho}{A_m\,r^b}\left[\left\{\frac{A_{m+b}}{r}+\frac{A_{m+b+1}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+b+c-1}}{r^c}\right\}\right. \\ &\left.-\left\{\frac{A_{m+b+1}}{r}+\frac{A_{m+b+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+b+c}}{r^c}\right\}\right], \end{aligned}\right\}\ \text{(B)}$$

welche übrigens, wenn man die Zahlen der Verstorbenen zu Hilfe nimmt, auch in der Form

$$S+\frac{\sigma}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}}{r^2}+\cdots+\frac{A_{m+a}}{r^a}\right)$$

$$=\frac{\varrho}{A_m\,r^b}\left(\frac{B_{m+b+1}}{r}+\frac{B_{m+b+2}}{r^2}+\cdots+\frac{B_{m+b+c}}{r^c}\right)$$

geschrieben werden kann.

Zur Bequemlichkeit der Rechnung kann entweder nur von einer Tafel der reducirten Zahlen der Lebenden oder ausserdem auch von einer ähnlich construirten Tafel der reducirten Zahlen der Verstorbenen Gebrauch gemacht werden, welch' letztere in der Zahlenreihe

$$\frac{B_1}{r}=b_1,\ \frac{B_2}{r^2}=b_2\cdots,\ \frac{B_m}{r^m}=b_m,\ \cdots$$

besteht; setzt man dann zur Abkürzung

$$\sum_i^{\omega}\frac{B_i}{r^i}=\sum_i^{\omega}b_i=N_i,$$

so hat man entweder

$$S + \sigma \frac{L_{m+1} - L_{m+a+1}}{a_m}$$

$$= \varrho \frac{L_{m+b} - L_{m+b+c} - r(L_{m+b+1} - L_{m+b+c+1})}{r\, a_m},$$

oder im andern Falle

$$S + \sigma \frac{L_{m+1} - L_{m+a+1}}{a_m} = \varrho \frac{N_{m+b+1} - N_{m+b+c+1}}{a_m}.$$

Anmerkung. Die abgeleiteten Formeln setzen voraus, dass die Auszahlung der Versicherungssumme nicht unmittelbar nach erfolgtem Tode, sondern erst am Ende des betreffenden Jahres erfolgt.

Besondere Fälle.

Erster Fall. Soll die Versicherungssumme ϱ auf lebenslänglichem Beitragsfuss erworben und ausbezahlt werden, wann auch der Versicherte stirbt, so setze man

$$S = \sigma, \quad a = \omega, \quad b = 0, \quad c = \omega,$$

und gelangt zu der Formel

$$\sigma = \varrho \frac{\left[\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \cdots\right] - \left[\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots\right]}{A_m + \frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots}$$

$$= \varrho \frac{L_m - r\, L_{m+1}}{r\, L_m} = \varrho \frac{N_{m+1}}{L_m}.$$

Zweiter Fall. Soll die Versicherungssumme auf Capitalsfuss erworben und ausbezahlt werden, wann auch der Versicherte sterben mag, so hat man

$$\sigma = 0, \quad b = 0, \quad c = \omega$$

zu nehmen und erhält

$$S = \frac{\varrho}{A_m} \left[\left(\frac{A_m}{r} + \frac{A_{m+1}}{r^2} + \cdots\right) - \left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots\right)\right]$$

$$= \varrho \frac{L_m - r\, L_{m+1}}{r\, a_m} = \varrho \frac{N_{m+1}}{a_m}.$$

Auch für andere specielle Fälle lassen sich die entsprechenden Formeln leicht ableiten.

212. **Problem III.** *Es ist die Frage nach der Summe* S *welche eine Person* A *im Alter von* m *Jahren erlegen muss damit, indem sie durch* a *Jahre einen Beitrag* σ *einzahlt, die Anstalt einer andern* n *Jahre alten durch* A *bezeichnete Person* B *nach dem Tode von* A *ein Capital* ϱ *zusichert, unter der Bedingung, dass der Tod nicht vor Ende des* b^{ten}, *vom Zeitpunkte des Vertrags an gezählten Jahres erfolgt. Ueberdies wird angenommen, dass die Auszahlung der Versicherungssumme erst am Ende des Todesjahres vollstreckt wird.*

Lösung. I. *Einnahmen.* Die Wahrscheinlichkeit, dass die Personen A und B am Ende des ersten Jahres noch leben, ist $\frac{A_{m+1}}{A_m} \cdot \frac{A_{n+1}}{A_n}$; der mathematische und discontirte Werth der von diesem Zeitpunkte herrührenden Einnahme ist demnach

$$\frac{\sigma}{r} \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{A_m A_n};$$

ebenso ergibt sich der discontirte, für eine Person gerechnete Durchschnittswerth der Einnahme vom Ende des 2., . . . a^{ten} Jahres mit

$$\frac{\sigma}{r^2} \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{A_m A_n}, \quad \ldots \quad \frac{\sigma}{r^a} \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{A_m A_n};$$

die vollständige Einnahme ist demnach

$$X = S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{r^2} + \cdots + \frac{A_{m+a} A_{n+a}}{r^a}\right]$$

würden die Beiträge dagegen jedesmal zu Beginn der ersten a Jahre eingezahlt werden, der erste also gleichzeitig mit dem Capital S, so würden sich die Einnahmen mit

$$X' = S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left[A_m A_n + \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{r} + \cdots + \frac{A_{m+a-1} A_{n+a-1}}{r^{a-1}}\right]$$

herausstellen.

II. *Ausgaben.* 1) Die Anstalt zahlt nichts, wenn A vor Ende des b^{ten} Jahres stirbt.

2) War die Anzahl der Paare, mit welchen die Anstalt unter den Bedingungen des Problems Verträge abschloss,

gleich M, so existiren ihrer am Ende des b^{ten} Jahres noch

$$M_1 = M \frac{A_{m+b} A_{n+b}}{A_m A_n};$$

demnach ist

$$M_1 \frac{A_{n+b+1}}{A_{n+b}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}} \right\}$$

die Zahl der Personen B, welche am Schlusse des $\overline{b+1}^{ten}$ Jahres leben, nachdem die ihnen entsprechenden Personen A im Laufe dieses Jahres gestorben sind. Der discontirte Werth der Ausgabe ist also

$$\frac{M_1 \varrho}{r^{b+1}} \frac{A_{n+b+1}}{A_{n+b}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+1}}{A_{m+b}} \right\}.$$

3) Am Schlusse des $\overline{b+1}^{ten}$ Jahres sind noch

$$M_2 = M \frac{A_{m+b+1} A_{n+b+1}}{A_m A_n}$$

verbundene Paare vorhanden, und zu Ende des $\overline{b+2}^{ten}$ Jahres leben

$$M_2 \frac{A_{n+b+2}}{A_{n+b+1}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}} \right\}$$

Personen B, denen im Laufe dieses Jahres die Personen A starben. Der discontirte Werth der an sie geleisteten Ausgabe ist

$$\frac{M_2 \varrho}{r^{b+2}} \frac{A_{n+b+2}}{A_{n+b+1}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+2}}{A_{m+b+1}} \right\}.$$

4) Setzt man

$$M_3 = M \frac{A_{m+b+2} A_{n+b+2}}{A_m A_n},$$

so findet sich der discontirte Werth der am Schluss des $\overline{b+3}^{ten}$ Jahres zu leistenden Zahlung mit

$$\frac{M_3 \varrho}{r^{b+3}} \frac{A_{n+b+3}}{A_{n+b+2}} \left\{ 1 - \frac{A_{m+b+3}}{A_{m+b+2}} \right\}, \text{ u. s. w.}$$

Addirt man die einzelnen Ausgaben, substituirt für M_1, M_2, M_3, $\cdots$ die gefundenen Werthe und dividirt nachher durch M, so ergibt sich der Durchschnittsbetrag der auf eine Person entfallenden Ausgabe

$$Y = \frac{\varrho}{r^b A_m A_n}$$

$$\times\left[\frac{A_{m+b}A_{n+b+1} - A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r} + \frac{A_{m+b+1}A_{n+b+2} - A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2} + \cdot\right.$$

$$= \frac{\varrho}{r^b A_m A_n}\left[\frac{A_{n+b+1}B_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{n+b+2}B_{m+b+2}}{r^2} + \frac{A_{n+b+3}B_{m+b+3}}{r^3} + \cdots\right.$$

Je nach den Bedingungen des Vertrages hat man X oder X' gleich Y zu zetzen; für den letzteren Fall erhält man die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} S + \frac{\sigma}{A_m A_n}\left[A_m A_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \cdots + \frac{A_{m+a-1}A_{n+a-1}}{r^{a-1}}\right] \\ = \frac{\varrho}{r^b A_m A_n}\left[\frac{A_{m+b}A_{n+b+1} - A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r}\right. \\ \left. + \frac{A_{m+b+1}A_{n+b+2} - A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2} + \cdots\right] \\ = \frac{\varrho}{r^b A_m A_n}\left[\frac{A_{n+b+1}B_{m+b+1}}{r} + \frac{A_{n+b+2}B_{m+b+2}}{r^2} + \cdots\right] \end{aligned}\right\}\cdots$$

Von besonderen Fällen heben wir hervor:

1) $a = \omega, \quad b = 0;$

2) $S = 0, \quad b = 0, \quad a = \omega;$

3) $\sigma = 0, \quad b = 0.$

Der zweite Fall entspricht einer auf Beitragsfuss erworbenen Versicherungssumme, wenn die Einzahlung lebenslänglich und die Auszahlung von Seite der Anstalt ohne Rücksicht auf den Zeitpunkt des Todes der Person A erfolgt; aus der Gleichung $X' = Y$ ergibt sich

$$\sigma = \varrho\,\frac{\frac{A_{n+1}B_{m+1}}{r} + \frac{A_{n+2}B_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{n+3}B_{m+3}}{r^3} + \cdots}{A_m A_n + \frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r} + \frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2} + \cdots}.$$

Im dritten Falle wird die Versicherung durch ein Capital begründet und erlangt ebenfalls sofort nach Abschluss ihre Giltigkeit; man findet

$$S = \frac{\varrho}{A_m A_n}\left[\frac{A_{n+1}B_{m+1}}{r} + \frac{A_{n+2}B_{m+2}}{r^2} + \cdots\right].$$

213. **Problem IV.** *Es ist die Frage nach dem Capital S, welches zwei Ehegatten, m und n Jahre alt, bei einer Anstalt erlegen müssten, damit, indem sie jährlich die Prämie σ einzahlen, die Anstalt dem Ueberlebenden nach dem Tode eines der Ehegatten ein Capital ϱ zusichere.*

Lösung. I. Die *Einnahmen* sind dieselben wie im vorigen Problem.

II. Die *Ausgaben.* Angenommen, die Anstalt habe mit M Ehepaaren der bezeichneten Kategorie Verträge abgeschlossen; man hat dann folgende Anzahlen der

verbundenen Paare:

Am Ende des 1. Jahres $M_1 = M \frac{A_{m+1} A_{n+1}}{A_m A_n}$

„ 2. „ $M_2 = M \frac{A_{m+2} A_{n+2}}{A_m A_n}$

„ 3. „ $M_3 = M \frac{A_{m+3} A_{n+3}}{A_m A_n}$

. . . .

Witwer oder Witwen:

$$M \left[\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1 - \frac{A_{n+1}}{A_n}\right) + \frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1 - \frac{A_{m+1}}{A_m}\right)\right] = M\ (1);$$

$$M_1 \left[\frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\left(1 - \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\right) + \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}}\left(1 - \frac{A_{m+2}}{A_{m+1}}\right)\right] = M_1\ (2);$$

$$M_2 \left[\frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\left(1 - \frac{A_{n+3}}{A_{n+2}}\right) + \frac{A_{n+3}}{A_{n+2}}\left(1 - \frac{A_{m+3}}{A_{m+2}}\right)\right] = M_2\ (3);$$

. . . .

die auf den Zeitpunkt des Abschlusses der Versicherung reducirte Ausgabe ist sonach

$$\frac{\varrho M}{r}(1) + \frac{\varrho M_1}{r^2}(2) + \frac{\varrho M_2}{r^3}(3) + \cdots;$$

durch Einsetzung der Werthe für M_1, M_2, · · · und darauffolgende Division durch M ergibt sich die auf ein Ehepaar im Durchschnitt entfallende Ausgabe; man hat sonach die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}
&S+\frac{\sigma}{A_m A_n}\left[A_m A_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\cdots\right]\\
&=\frac{\varrho}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+1}A_n+A_m A_{n+1}-2A_{m+1}A_{n+1}}{r}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{A_{m+2}A_{n+1}+A_{m+1}A_{n+2}-2A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\cdots\right]\\
&=\frac{\varrho}{A_m A_n}\left[\frac{A_{m+1}B_{n+1}+A_{n+1}B_{m+1}}{r}+\frac{A_{m+2}B_{n+2}+A_{n+2}B_{m+2}}{r^2}+\cdots\right].
\end{aligned}\right\}(D)$$

214. **Problem V.** *Es ist die Frage nach dem Capital S, welches zwei Ehegatten A und B, m und n Jahre alt, bei einer Anstalt erlegen müssen, damit, indem sie bis zum Tode des einen die jährliche Prämie σ einzahlen, die Anstalt dem andern eine Leibrente ϱ zusichere.*

Lösung. I. Die *Einnahmen* sind dieselben wie vorhin.

II. *Ausgaben.* Wird unter M die Zahl der Paare der erwähnten Kategorie verstanden, mit welchen die Anstalt unter den Bedingungen des Problems Verträge abschliesst, so hat man für die Berechnung der Ausgaben folgende Zusammenstellnng:

	Zahl der überlebenden Witwer:	*Zahl der überlebenden Witwen:*
Am Ende des 1. Jahres	$M\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$,	$M\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+1}}{A_m}\right)$,
„ 2. „	$M\frac{A_{m+2}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+2}}{A_n}\right)$,	$M\frac{A_{n+2}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_m}\right)$,
. . .	. . . .	. . . .

Da nun jedem Ueberlebenden die Rente ϱ ausbezahlt wird, so ergeben sich die auf den Zeitpunkt des Vertragsabschlusses reducirten Ausgaben wie folgt:

1. Jahr . . . . $\frac{M\varrho}{r}\left\{\frac{A_{m+1}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)+\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+1}}{A_m}\right)\right\}$,

2. „ . . . . $\frac{M\varrho}{r^2}\left\{\frac{A_{m+2}}{A_m}\left(1-\frac{A_{n+2}}{A_n}\right)+\frac{A_{n+2}}{A_n}\left(1-\frac{A_{m+2}}{A_m}\right)\right\}$,

. . . .

Durch Addition und Division durch M ergibt sich die durchschnittlich auf ein Ehepaar entfallende Ausgabe und mit dieser die jetzt geltende Gleichung

$$\left.\begin{aligned}S+\frac{\sigma}{A_m A_n}\left\{A_m A_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\cdots\right\}\\=\frac{\varrho}{A_m A_n}\left\{\frac{A_{m+1}A_n+A_{n+1}A_m-2A_{m+1}A_{n+1}}{r}\right.\\\left.+\frac{A_{m+2}A_n+A_{n+2}A_m-2A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\cdots\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\text{(E)}$$

215. **Problem VI.** *Es ist die Frage nach dem Capital S, welches zwei Personen A und B im Alter von m und n Jahren bei einer Anstalt erlegen müssen, damit, indem sie jährlich eine Prämie σ einzahlen, die Anstalt der Verbindung (A, B) eine Rente ρ zusichere, welche mit dem Tode einer der Personen aufhören soll.*

Lösung. I. Die *Einnahmen* bleiben dieselben.

II. *Ausgaben.* Nachdem von einer sehr grossen Anzahl M von Personen

am Ende des 1. Jahres noch $M\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{A_m A_n}$,

„ „ 2. „ $M\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{A_m A_n}$,

. . . .

Paare existiren, so ergibt sich der durchschnittliche discontirte Werth der auf eine Verbindung (A, B) entfallenden Ausgabe, indem man diese Anzahlen beziehungsweise mit $\frac{\varrho}{r}, \frac{\varrho}{r^2}, \ldots$ multiplicirt und die Summe der Producte durch M dividirt. Auf diese Weise ergibt sich die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}S+\frac{\sigma}{A_m A_n}\left\{A_m A_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+1}A_{n+2}}{r^2}+\cdots\right\}\\=\frac{\varrho}{A_m A_n}\left\{\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\frac{A_{m+2}A_{n+2}}{r^2}+\cdots\right\}\end{aligned}\right\}\text{(F)}$$

216. **Problem VII.** *Es ist die Frage nach der Summe S, welche zwei Gesellschafter A und B im Alter von m und n Jahren bei einer Anstalt erlegen müssen, damit, indem sie jährlich die Prämie σ einzahlen, die Gesellschaft ihnen eine Leibrente ρ zusichere.*

Lösung. I. Die *Einnahmen* bleiben dieselben wie in den vorigen Fällen.

a	v	p	paa	pav	λ	$pa\lambda$	$p\lambda\lambda$
0·1608	4·63	2	0·0516	1·1890	+ 2·28	+ 0·73	10·39
·2521	10·08	3	·1911	7·6326	+ 0·77	+ 0·59	1·77
·2540	10·25	1	·0645	2·6035	+ 0·67	+ 0·17	0·4
·2867	14·00	1	·0820	4·0138	1·68	0·48	2·
·3113	14·50	2	·2372	9·9848	+ 0·30	+ 0·21	0·
·3839	17·50	1	·1472	6·7183	1·00	0·38	1
·4215	17·83	3	·5106	22·7064	+ 0·41	+ 0·53	[illegible]
·4859	20·67	3	·7080	30·1305	+ 0·21	+ 0·31	
·4585	21·00	2	·4202	19·2570	1.29	— 1·19	
·5547	23·58	3	·9231	39·2394	+ 0·26	+ 0·43	
·5317	24·50	1	·2827	13·0267	1·65	0·88	
			3·6482	156·8020		+ 2·97	
						2·93	

$$1.\quad x = \frac{[pav]}{[paa]} = \frac{156{\cdot}8020}{3{\cdot}6482} = 42{\cdot}98^{ccm}$$

$$2.\quad m = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-1}} = \sqrt{\frac{23{\cdot}5169}{10}} = 1{\cdot}53^{ccm};\quad r = \varrho$$

$$3.\quad m_x = \frac{m}{\sqrt{[paa]}} = \frac{1{\cdot}53}{\sqrt{3{\cdot}6482}} = 0{\cdot}80^{ccm};\quad r_x =$$

Diese Werthe bedürfen der Reduction
barometerstand von 760^{mm} und die Gasten
erhält so

$$x' = 42{\cdot}98\;\frac{761{\cdot}77}{760{\cdot}00}\cdot\frac{1}{1+0{\cdot}00366}$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$r_{x'} = 0{\cdot}^{ccm}$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$S = 4{\cdot}$$

können also die Angaben d
am Versuchsorte in chem
Bezieht man den
Werth für T auf Web
1·0189 Knallgas pr

$$+\cdots\Big\}$$

$$\frac{\ldots_{b+2}A_{n+b+2}}{r^{b+2}}+\cdots\Big\}\ (1)$$

Anrechnung der Verwal-
Paare, mit welchen Ver-
nach t Jahren

och verbundenen Paare,

der n-jährigen Individuen,

it ihnen verbunden gewesenen
n sind; die Anstalt wird also

$$\left(1-\frac{A_{m+t}}{A_m}\right)=M\frac{A_{n+t}}{A_n}$$

rechnen, deren discontirter Werth

$$\frac{A_{n+t}}{A_n}$$

Werthe $1, 2, \cdots$ bei, summirt die
cke und dividirt sodann durch M, so
ungskosten für eine Person

$$\frac{A_{n+1}}{r}+\frac{A_{n+2}}{r^2}+\cdots\Big)\ \ldots\ldots\ (2)$$

Summe (1) + (2) gleichgesetzt, ergibt

$$A_n+\frac{A_{m+1}A_{n+1}}{r}+\ldots+\cdots\Big)$$

$$\frac{\varrho}{A_n r^b}\left(\frac{A_{n+b+1}}{r}+\ldots\right)$$

$$\left(\frac{A_{m+b+1}A_{n+b+1}}{r}+\ldots+\cdots\right)\qquad (H)$$

$$\left(\frac{A_{n+1}}{r}+\ldots\right)$$

$$\ldots\frac{A_{m+b+2}A_{n+b+2}}{r^2}+\cdots\Big)\Big\}$$

218. **Problem IX.** *Mehreren Personen, welche beziehungsweise m, $m + a_1$, $m + a_1 + a_2, \cdots$ Jahre alt sind, eine Leibrente ϱ zu sichern, welche so lange zur Auszahlung gelangt, bis die letzte der Personen gestorben ist. Es soll das dieser Rente äquivalente gegenwärtige Capital ermittelt werden.*

Lösung. 1) Die Wahrscheinlichkeit für die erste Person, nach x Jahren noch zu leben, ist $\frac{A_{m+x}}{A_m}$, und die Wahrscheinlichkeit, vor Erreichung dieses Alters zu sterben, $1 - \frac{A_{m+x}}{A_m}$.

2) Für die zweite Person sind die analogen Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt durch $\frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}$, beziehungsweise $1 - \frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}$, u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach x Jahren keine der Personen mehr am Leben ist, hat zum Ausdruck

$$P_x = \left(1 - \frac{A_{m+x}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{A_{m+a_1+x}}{A_{m+a_1}}\right)\left(1 - \frac{A_{m+a_1+a_2+x}}{A_{m+a_1+a_2}}\right)\cdots,$$

demnach ist $u_x = 1 - P_x$ die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Individuen am Ende den x^{ten}, vom Zeitpunkte der Begründung der Rente an gezählten Jahres lebt, dass also die Rente zur Auszahlung gelangt, und damit ergibt sich auch sofort die Gleichung

$$S = \varrho \sum_1 \frac{u_x}{r^x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{K})$$

Die Summirung ist soweit zu führen, bis $u_x = 0$ wird.

219. Der Untersuchung über die Grösse des Vortheils, welcher einer Versicherungsanstalt daraus erwächst, dass sie mit einer grossen Anzahl von Personen Verträge abschliesst und von jeder derselben einen gewissen Zuschlag auf die Nettoeinzahlung abfordert, schicken wir das folgende allgemeine Problem voraus.

Problem X. *Eine Urne enthält Kugeln verschiedener Far-*

ben (1), (2), · · ·. Eine Person A zieht aus derselben eine Kugel und erhält (oder zahlt) den Betrag $v_1, v_2, \cdots$, jenachdem die gezogene Kugel von der Farbe (1), (2), · · · war; werden nun t solcher Ziehungen ausgeführt und die gezogene Kugel jedesmal in die Urne zurückgelegt, so handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit U_σ, dass der mathematische Werth der aus diesen Ziehungen für A resultirenden Einnahme (oder Ausgabe) $\sigma = t\mu + l$ ist.

Lösung. Sind $p_1, p_2, \cdots$ die auf das Ziehen einer Kugel von der Farbe (1), (2) · · · bezüglichen Wahrscheinlichkeiten, so sind die den einzelnen Ziehungen entsprechenden mathematischen Erwartungen $p_1 v_1, p_2 v_2, \cdots$

Die generirende Function der verlangten Wahrscheinlichkeit ist

$$X = [p_1 u^{v_1} + p_2 u^{v_2} + \cdots]^t = \Sigma U_\sigma u^\sigma,$$

wobei

$$p_1 + p_2 + \cdots = 1.$$

Setzt man $u = e^{\varpi\sqrt{-1}}$, so wird weiter

$$X = [p_1 e^{\varpi v_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2\sqrt{-1}} + \cdots]^t = \Sigma\, U_\sigma e^{\varpi\sigma\sqrt{-1}};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{\varpi\sigma\sqrt{-1}}\, d\varpi$ und integrirt nachher innerhalb der Grenzen $\pm\pi$, so ergibt sich nach bekanntem Vorgange

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\varpi\sigma\sqrt{-1}}\, X d\varpi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi e^{-l\varpi\sqrt{-1}} \left\{e^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}\left(p_1 e^{\varpi v_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2\sqrt{-1}} + \cdots\right)\right\}^t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi\, e^{-l\varpi\sqrt{-1}}\, A,$$

wenn man

$$A = \left\{e^{-\mu\varpi\sqrt{-1}}\left(p_1 e^{\varpi v_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2\sqrt{-1}} + \cdots\right)\right\}^t$$

setzt, woraus wieder weiter folgt:

$$l \cdot A = -t\mu\varpi\sqrt{-1} + tl\cdot\left[p_1 e^{\varpi v_1\sqrt{-1}} + p_2 e^{\varpi v_2\sqrt{-1}} + \cdots\right]$$

$$= -t\mu\varpi\sqrt{-1}$$

$$+tl\cdot\left[p_1\left(1+\varpi v_1\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 v_1^2}{2} - \cdots\right) + p_2\left(1+\varpi v_2\sqrt{-1} - \frac{\varpi^2 v_2^2}{2} - \cdots\right) + \cdots\right]$$

$$= -t\mu\varpi\sqrt{-1}$$

$$+tl\cdot\left[p_1 + p_2 + \cdots + (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)\varpi\sqrt{-1} - (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots)\frac{\varpi^2}{2} - \cdots\right]$$

$$= -t\mu\varpi\sqrt{-1}$$

$$+tl\cdot\left[1 + (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)\varpi\sqrt{-1} - (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots)\frac{\varpi^2}{2} - \cdots\right].$$

Entwickelt man den Logarithmus der rechten Seite in eine Reihe, so wird

$$l \cdot A = t\varpi\sqrt{-1}\,(p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots - \mu)$$

$$- \frac{\varpi^2 t}{2}\left[p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots - (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)^2\right].$$

Die Glieder mit $\varpi^3 \cdots$ können vernachlässigt werden, da t sehr gross vorausgesetzt und der obige Ausdruck zum negativen Exponenten von e wird. — Der imaginäre Bestandtheil von $l \cdot A$ verschwindet, sobald man

$$\mu = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots$$

setzt; bedient man sich ferner der Abkürzung

$$2k^2 = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots - (p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots)^2,$$

so wird

$$l \cdot A = -\varpi^2 tk^2$$

und hiermit

$$A = e^{-tk^2\varpi^2},$$

daher

$$U_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi\, e^{-\left[tk^2\varpi^2 + l\varpi\sqrt{-1}\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi\, e^{-tk^2\left[\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{l^2}{4tk^2}}\int_{-\infty}^{\infty} d\varpi\, e^{-tk^2\left[\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right]^2}.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\tau = k\sqrt{t}\left(\varpi + \frac{l\sqrt{-1}}{2tk^2}\right), \quad d\varpi = \frac{d\tau}{k\sqrt{t}}$$

erhält man endlich

$$U_\sigma = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-\tau^2} = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} \quad . \quad . \quad (a)$$

220. **Problem XI.** *Die Wahrscheinlichkeit P zu suchen, dass die Einnahme (oder Ausgabe) von A zwischen die Grenzen $t\mu \pm l$ fällt.*

Lösung. Zu diesem Behufe hat man die Summe der Werte U_σ für alle zwischen $+ l$ und $- l$ gelegenen Werthe von l zu bilden, mit andern Worten, den Ausdruck für U_σ in (a) nach Multiplication mit dl innerhalb der Grenzen $\pm l$ zu integriren; dadurch ergibt sich

$$P = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl = \frac{1}{k\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{l} e^{-\frac{l^2}{4tk^2}} dl$$

als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass die Einnahme (oder Ausgabe) σ zwischen den Grenzen

$$\mu t \pm l \quad \text{oder} \quad t\,(p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots) \pm l$$

enthalten ist. Setzt man

$$\frac{1}{2k\sqrt{t}} = r', \; l = 2kr'\sqrt{t}, \; dl = 2k\sqrt{t}\cdot dr',$$

so wird

$$\sigma = \mu t + l = \mu\, t + 2kr'\sqrt{t},$$

und es ist dann

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{r'} e^{-r'^2} dr'$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Einnahme (oder Ausgabe) von A zwischen die Grenzen

$$\mu t \pm l \quad \text{oder} \quad t\,(p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots) \pm 2kr'\sqrt{t}$$

fällt.

221. Problem XII. *Eine Versicherungsanstalt schliesst mit t Personen im Alter von m Jahren Verträge ab, indem sie ihnen gegen Zahlung des Capitals S + b Leibrenten ϱ zusichert, derart, dass*

$$S = \frac{\varrho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots\right).$$

Es soll die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, dass der Vortheil, welcher der Anstalt aus diesem Geschäfte erwächst, zwischen gegebenen Grenzen enthalten ist.

Lösung. Es handelt sich hier darum, die Wahrscheinlichkeit für gewisse Grenzen der mathematischen Ausgaben zu ermitteln, welche die Anstalt an die t Versicherten zu leisten haben wird; die Lösung dieser Frage ist in den beiden vorhergehenden Problemen enthalten.

Es sind nämlich

$$v_1 = 0,$$

$$v_2 = \frac{\varrho}{r},$$

$$v_3 = \frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{r^2},$$

$$v_4 = \frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{r^2} + \frac{\varrho}{r^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

die auf ihren gegenwärtigen Werth discontirten Ausgaben, welche der Anstalt für einen Versicherten erwachsen, jenachdem derselbe im Laufe des 1., 2., 3., 4., ... vom Vertragsdatum an gezählten Jahres stirbt, und

$$p_1 = \frac{B_{m+1}}{A_m},$$

$$p_2 = \frac{B_{m+2}}{A_m},$$

$$p_3 = \frac{B_{m+3}}{A_m},$$

$$p_4 = \frac{B_{m+4}}{A_m},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse. Demnach ist

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots = \frac{B_{m+2}}{A_m}\frac{\varrho}{r} + \frac{B_{m+3}}{A_m}\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{r^2}\right) + \frac{B_{m+4}}{A_m}\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{r^2} + \frac{\varrho}{r^3}\right) + \cdots$$

$$= \frac{B_{m+2} + B_{m+3} + \cdots}{A_m}\frac{\varrho}{r} + \frac{B_{m+3} + B_{m+4} + \cdots}{A_m}\frac{\varrho}{r^2}$$

$$+ \frac{B_{m+4} + B_{m+5} + \cdots}{A_m}\frac{\varrho}{r^3} + \cdots$$

$$= \frac{\varrho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \frac{A_{m+3}}{r^3} + \cdots\right)$$

$$= S,$$

folglich

$$2k^2 = \frac{B_{m+2}}{A_m}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 + \frac{B_{m+3}}{A_m}\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{r^2}\right)^2$$

$$+ \frac{B_{m+4}}{A_m}\left(\frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho}{r^2} + \frac{\varrho}{r^3}\right)^2 + \cdots - S^2,$$

und es stellt

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{r'} e^{-r'^2}\,dr'$$

die Wahrscheinlichkeit vor, dass der mathematische Werth der von der Anstalt an die t Versicherten zu leistenden Ausgabe zwischen die Grenzen

$$tS \pm 2kr'\sqrt{t}$$

fällt.

Nun aber hat die Anstalt durch die t Verträge eine Einnahme

$$t(S + b) = tS + tb$$

erzielt; bringt man hiervon die Grenzen der Ausgabe in Abzug, so ergeben sich die *Grenzen des Gewinnes*, nämlich

$$tb \mp 2kr'\sqrt{t},$$

welche mit derselben Wahrscheinlichkeit P zu erwarten sind.

Ist demnach die Anzahl der abgeschlossenen Verträge sehr gross, so ist mit einer der Gewissheit nahen Wahrscheinlichkeit ein sehr grosser Gewinn zu gewärtigen, welcher sich der Grenze tb nähert.

222. **Problem XIII.** *Zwei Personen A und B, welche im selben Alter, von m Jahren, stehen und gleich vermögend sind,*

wollen jede durch ein Capital S eine Leibrente erwerben; sie können dies unabhängig von einander thun oder aber die Capitalien zusammenlegen und mit der Summe 2S eine Leibrente begründen derart, dass selbe nach dem Tode der einen Person auf die andere übergeht; welcher Ausweg ist vom Standpunkte der moralischen Hoffnung der vortheilhaftere?

Lösung. I. *Erste Art der Capitalsanlegung.*

Das Vermögen der Personen als Einheit angenommen, sei ϱ der Betrag der Rente in dem Falle, dass jede derselben für sich eine Rente begründet.

Nach Nr. 64 ist der moralische Werth einer Erhöhung des ursprünglichen Vermögens v auf den Betrag V, also einer Vermehrung desselben um $V - v = s$, ausgedrückt durch

$$m\,l \cdot \frac{V}{v} = m\,l \cdot \frac{v + s}{v} = m\,l \cdot \left(1 + \frac{s}{v}\right),$$

demnach der moralische Werth der Rente ϱ, diese als gewiss betrachtet,

$$ml \cdot (1 + \varrho);$$

nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rente von der betreffenden Person (A oder B) nach x Jahren wirklich bezogen werden wird,

$$\frac{A_{m+x}}{A_m} = y_x,$$

demnach der moralische Werth der ungewissen, nach x Jahren fälligen Rente

$$my_x l \,.\, (1 + \varrho);$$

bildet man die analogen Ausdrücke für das 1., 2., ... Jahr und summirt dieselben, so ergibt sich der moralische Gesammtwerth der Rente für A sowohl als B mit

$$T = ml \,.\, (1 + \varrho) \,.\, \Sigma y_x \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

II. *Zweite Art der Capitalsanlegung.*

Im Falle der vereinigten Capitalsanlage sei ϱ' die entsprechende Rente.

1) So lange beide Personen leben, bezieht jede die Hälfte davon, also $\frac{\varrho'}{2}$, und da die Wahrscheinlichkeit, dass nach x Jahren beide leben, y_x^2 ist, so ist der moralische Werth der nach x Jahren für eine Person fälligen Rente

$$m y_x^2 l \cdot \left(1 + \frac{\varrho'}{2}\right),$$

der Gesammtwerth

$$m l \cdot \left(1 + \frac{\varrho'}{2}\right) \cdot \Sigma y_x^2.$$

2) Lebt nach x Jahren die Person A allein, — und die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $y_x(1 - y_x) = y_x - y_x^2$, — so bezieht sie die ganze Rente ϱ'; der moralische Werth dieser Erwartung ist

$$m(y_x - y_x^2)\, l \cdot (1 + \varrho'),$$

und, bezogen auf alle Jahre,

$$m l \cdot (1 + \varrho') \cdot (\Sigma y_x - \Sigma y_x^2).$$

Die gesammte Erwartung ist diesmal also für jede der beiden Personen ausgedrückt durch

$$T' = m l \cdot \left(1 + \frac{\varrho'}{2}\right) \cdot \Sigma y_x^2 + m l \cdot (1 + \varrho') \cdot (\Sigma y_x - \Sigma y_x^2). \quad \text{(II)}$$

Jenachdem nun $T \gtrless T'$, ist die erste oder die zweite Art vortheilhafter.

Zum Zwecke dieser Vergleichung ist es erforderlich, ϱ' als Function von ϱ darzustellen, und dies gelingt mit Hilfe der beiden Gleichungen:

$$S = \frac{\varrho}{A_m}\left(\frac{A_{m+1}}{r} + \frac{A_{m+2}}{r^2} + \cdots\right) = \varrho\, \Sigma \frac{y_x}{r^x}, \quad . \; . \; (1')$$

$$2S = \frac{\varrho'}{A_m A_m}\left(\frac{2 A_m A_{m+1} - A_{m+1}^2}{r} + \frac{2 A_m A_{m+2} - A_{m+2}^2}{r^2} + \cdots\right)$$

$$= \varrho'\, \Sigma \frac{2 y_x - y_x^2}{r^x}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2')$$

aus welchen sich

$$\varrho' = 2\varrho \frac{\sum \frac{y_x}{r^x}}{\sum \frac{2 y_x - y_x^2}{r^x}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3')$$

ergibt.

Um die Vergleichung zu erleichtern, nehmen wir an, ϱ und ϱ' seien sehr kleine echte Brüche. Nun ist

$$T' > T,$$

wenn

$$l\cdot(1+\tfrac{\varrho'}{2})\cdot\Sigma y_x{}^2+l\cdot(1+\varrho')\cdot(\Sigma y_x-\Sigma y_x{}^2)>l\cdot(1+\varrho)\cdot\Sigma y_x;$$

entwickelt man die Logarithmen und bleibt auf Grund der oben gemachten Voraussetzung bei der ersten Potenz von ϱ und ϱ' stehen, so ergibt sich

$$\frac{\varrho'}{2}\,\Sigma y_x{}^2+\varrho'\,(\Sigma y_x-\Sigma y_x{}^2)>\varrho\Sigma y_x,$$

und ersetzt man hier ϱ' durch seinen Werth aus (3′), so folgt nach entsprechender Abkürzung

$$(2\Sigma y_x-\Sigma y_x{}^2)\,\frac{\sum\frac{y_x}{r^x}}{\sum\frac{2y_x-y_x{}^2}{r^x}}>\Sigma y_x,$$

oder

$$(2\Sigma y_x-\Sigma y_x{}^2)\sum\frac{y_x}{r^x}>\left(2\sum\frac{y_x}{r^x}-\sum\frac{y_x{}^2}{r^x}\right)\Sigma y_x,$$

oder

$$\frac{2\Sigma y_x}{\Sigma y_x}-\frac{\Sigma y_x{}^2}{\Sigma y_x}>\frac{2\sum\frac{y_x}{r^x}}{\sum\frac{y_x}{r^x}}-\frac{\sum\frac{y_x{}^2}{r^x}}{\sum\frac{y_x}{r^x}},$$

oder

$$2-\frac{\Sigma y_x{}^2}{\Sigma y_x}>2-\frac{\sum\frac{y_x{}^2}{r^x}}{\sum\frac{y_x}{r^x}},$$

oder endlich

$$\frac{\sum\frac{y_x{}^2}{r^x}}{\sum\frac{y_x}{r^x}}>\frac{\Sigma y_x{}^2}{\Sigma y_x},$$

welche Ungleichheit thatsächlich besteht, weil $r>1$ ist. Mithin ist die zweite Art der Capitalsanlegung für beide Personen moralisch vortheilhafter.

XI. Capitel.

Von der Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen und Urtheile.

I. Wahrscheinlichkeit der Zeugenaussagen.

223. Wir stellen uns hier die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ein durch Zeugen ausgesagtes Ereigniss stattgefunden hat und unterscheiden dabei die folgenden Fälle.

1) Das Ereigniss wird durch einen einzigen Zeugen ausgesagt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht für dasselbe unter der Voraussetzung a) dass es gewöhnlicher, b) dass es ungewöhnlicher Natur ist?

2) Das Ereigniss wird durch mehrere Zeugen ausgesagt; a) gleichzeitig, b) durch allmählige Ueberlieferung.

Um die Rechnung auf Probleme dieser Art anwenden zu können, wird es erforderlich sein, in jedem Zeugen die Verstandes- und die Willensperson zu unterscheiden. Erstere erkennt die Wahrheit oder irrt, letztere sagt dem Erkenntniss der ersteren gemäss aus oder nicht. In Folge dessen hat man vier verschiedene Wahrscheinlichkeitswerthe zu unterscheiden, von denen zwei und ebenso die zwei anderen einander entgegengesetzt sind.

Nimmt man nämlich an, dass der Zeuge unter n Fällen, wo er zu einer Aussage über eine wahrgenommene Thatsache veranlasst wird, m mal die Wahrheit erkennt, also $n - m$ mal irrt, andererseits m' mal in Uebereinstimmung mit seiner Erkenntniss, also $n - m'$ mal gegen seine Ueberzeugung aussagt, so ist

$r = \frac{m}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass er nicht irrt,

$1 - r = \frac{n-m}{n}$ „ dass er irrt;

$p = \frac{m'}{n}$ „ dass er nicht betrügt,

$1 - p = \frac{n-m'}{n}$ „ dass er betrügt.

In Bezug auf eine Aussage dieses Zeugen können dann vier verschiedene Fälle eintreten, deren Wahrscheinlichkeiten durch die Glieder des Productes

$$[r + (1 - r)]\,[p + (1 - p)] = 1$$

ausgedrückt sind. So bedeutet beispielsweise das Glied rp die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge weder geirrt noch betrogen, jenes $r(1 - p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass er zwar nicht geirrt, aber betrogen hat.

1. Das Ereigniss wird durch einen einzigen Zeugen ausgesagt.

a) *Das bezeugte Ereigniss ist gewöhnlicher Natur.*

224. **Erstes Problem.** *Aus einer Urne, welche n Nummern enthält, wird einmal gezogen; ein Augenzeuge sagt aus, es sei Nummer i gezogen worden; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies wahr sei?*

Lösung. Es können die folgenden vier Voraussetzungen gemacht werden:

1) Der Zeuge betrügt nicht und irrt auch nicht;

2) er betrügt nicht, irrt aber;

3) er betrügt und irrt nicht;

4) er betrügt und irrt.

Nach dem Satze von Bayes ist die geforderte Wahrscheinlichkeit P gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, welche aus den der Wahrheit der Zeugenaussage günstigen Annahmen gefolgert werden, dividirt durch die Summe der aus allen Annahmen gefolgerten Wahrscheinlichkeiten.

Wahrscheinlichkeit nach der ersten Annahme.

Dieselbe setzt sich zusammen:

1. Aus der Wahrscheinlichkeit p, dass der Zeuge nicht betrügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit r, dass der Zeuge nicht irrt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ für das Ziehen von Nummer i.

Die nach dieser Annahme gerechnete Wahrscheinlichkeit ist daher

$$\Pi_1 = \frac{p\,r}{n}.$$

Diese erste Annahme ist der Wahrheit der Zeugenaussage günstig.

Wahrscheinlichkeit nach der zweiten Annahme.

Diese besteht

1. aus der Wahrscheinlichkeit p, dass der Zeuge nicht betrügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1 - r$, dass der Zeuge irrt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$, dass Nummer i nicht gezogen wurde;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$, dass der Zeuge, indem er irrt, die gezogene Nummer für i hält. Die aus der zweiten Hypothese gefolgerte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\Pi_2 = p(1 - r)\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{p(1-r)}{n}.$$

Diese zweite Annahme ist der Wahrheit der Zeugenaussage nicht günstig.

Wahrscheinlichkeit nach der dritten Annahme.

Diese setzt sich aus dem Zusammentreffen folgender Wahrscheinlichkeiten zusammen:

1. Aus der Wahrscheinlichkeit $1-p$, dass der Zeuge betrügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit r, dass er nicht irrt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$, dass Nummer i nicht gezogen wurde;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$, dass der Zeuge, indem er betrügt, unter den $n - 1$ nicht gezogenen Nummern gerade Nummer i gewählt hat.

Demnach führt diese Annahme zu der Wahrscheinlichkeit

$$\Pi_3 = \frac{(1-p)r}{n}.$$

Dieselbe ist der Wahrheit der Zeugenaussage nicht günstig.

Wahrscheinlichkeit nach der vierten Annahme.

Bei dieser Annahme sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Nummer i ist gezogen worden; es sei Π_4 die diesem Falle nach der vierten Hypothese zukommende Wahrscheinlichkeit, so besteht dieselbe

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1-p$, dass der Zeuge betrügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1-r$, dass er irrt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$, dass Nummer i gezogen wurde;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$, dass der Zeuge gerade die Nummer i wählt; indem er irrt, hält er die gezogene Kugel für eine andere als i, und indem er betrügen will, wählt er unter den $n-1$ Nummern, die er nicht gezogen glaubt, gerade i. Folglich ist

$$\Pi_4 = \frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}.$$

Dieser Fall ist der Wahrheit der Zeugenaussage günstig.

Zweiter Fall. Nummer i ist nicht gezogen worden; es sei Π_5 die für diesen Fall aus der vierten Annahme gerechnete Wahrscheinlichkeit, so setzt sich dieselbe zusammen:

1. Aus der Wahrscheinlichkeit $1-p$, dass der Zeuge betrügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1-r$, dass er irrt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$, dass Nummer i nicht gezogen wurde;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$, dass der Zeuge gerade Nummer i wählt unter den $n-1$ Nummern, von welchen er glaubt, sie seien nicht gezogen worden. Daher hat man

$$\Pi_5 = \frac{(1-p)(1-r)}{n}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist der Wahrheit der Zeugenaussage nicht günstig.

Durch Anwendung von Bayes' Theorem findet sich

$$P = \frac{\Pi_1 + \Pi_4}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5}$$

$$= \frac{\frac{pr}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}}{\frac{pr}{n} + \frac{p(1-r)}{n} + \frac{(1-p)r}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)} + \frac{(1-p)(1-r)}{n}}$$

$$= \frac{pr + \frac{(1-p)(1-r)}{n-1}}{1 + \frac{(1-p)(1-r)}{n-1}}.$$

Wäre der Zeuge von Irrthum frei, so hätte man $r = 1$ und damit $P = p$; würde er niemals unwahr aussagen, so wäre $p = 1$ und $P = r$.

Für ein sehr hohes n ist näherungsweise $P = pr$.

b) *Das bezeugte Ereigniss ist aussergewöhnlicher Natur.*

225. **Zweites Problem.** *Eine Urne enthält neben $n - 1$ schwarzen Kugeln eine weisse; es wird eine Kugel gezogen und der Zeuge sagt aus, dieselbe sei weiss. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit dieser Aussage?*

Lösung. Ueber die Art und Weise, wie die Aussage des Zeugen zu Stande gekommen ist, können wie im vorigen Problem vier verschiedene Annahmen getroffen werden.

Erste Annahme. Der Zeuge betrügt nicht und irrt nicht. Die hiernach gerechnete Wahrscheinlichkeit Π_1 ist das Product

1. aus der Wahrscheinlichkeit p, dass der Zeuge nicht betrügt;
2. aus der Wahrscheinlichkeit r, dass er nicht irrt;
3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ für das Ziehen einer weissen Kugel, also

$$\Pi_1 = \frac{pr}{n}.$$

Zweite Annahme. Der Zeuge betrügt nicht, aber er irrt. Die auf Grund dieser Hypothese gefolgerte Wahrscheinlichkeit Π_2 besteht

1. aus der Wahrscheinlichkeit p, dass der Zeuge nicht betrügt;
2. aus der Wahrscheinlichkeit $1 - r$, dass er irrt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$, dass eine schwarze Kugel zum Vorschein kam; mithin ist

$$\Pi_2 = \frac{p(1-r)(n-1)}{n}.$$

Dritte Annahme. Des Zeuge betrügt, und irrt nicht. Die dieser Annahme entsprechende Wahrscheinlichkeit Π_3 setzt sich zusammen

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1-p$, dass der Zeuge betrügt;
2. aus der Wahrscheinlichkeit r, dass er nicht irrt;
3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel; es ist also

$$\Pi_3 = \frac{(1-p)r(n-1)}{n}.$$

Vierte Annahme. Der Zeuge betrügt und irrt; es wurde nämlich eine weisse Kugel gezogen, der Zeuge hält sie, indem er irrt, für schwarz, und indem er betrügen will, gibt er vor, sie sei weiss. Nach dieser Annahme setzt sich also die Wahrscheinlichkeit Π_4 zusammen

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1-p$, dass der Zeuge betrügt;
2. aus der Wahrscheinlichkeit $1-r$, dass er irrt;
3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ für das Ziehen einer weissen Kugel; folglich ist

$$\Pi_4 = \frac{(1-p)(1-r)}{n}.$$

Da nun die erste und die vierte Annahme der Wahrheit der Zeugenaussage günstig sind, so ist dem Satze von Bayes zufolge

$$P = \frac{\Pi_1 + \Pi_4}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4}$$

$$= \frac{\frac{pr}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n}}{\frac{pr}{n} + \frac{p(1-r)(n-1)}{n} + \frac{(1-p)r(n-1)}{n} + \frac{(1-p)(1-r)}{n}}.$$

Der Ausdruck $pr + (1-p)(1-r) = q$ bedeutet offenbar die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeuge eine wahre That-

sache aussagt, sei es, indem er weder betrügt noch irrt, sei es, dass er beides thut; es kann daher P einfacher in der Form

$$P = \frac{q}{q + (1 - q)(n - 1)}$$

geschrieben werden.

Ist n sehr gross, so wird die Aussage des Zeugen sehr unwahrscheinlich, ausser wenn q der Einheit sehr nahe kommt; so wäre beispielsweise für $p = r = \frac{9}{10}$, $n = 1000$,

$$P = 0{\cdot}0045,$$

so dass man 9955 gegen 45 oder 1991 gegen 9 wetten könnte, die von dem Zeugen behauptete Thatsache sei nicht wahr. In diesem Falle ist aber das Ziehen einer weissen Kugel ein ungewöhnliches Ereigniss, und man sieht also, dass dieser Umstand die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit der Zeugenaussage im Allgemeinen herabmindert.

226. **Drittes Problem.** *Eine Urne enthält eine grosse Anzahl n weisser, eine andere Urne dieselbe Anzahl schwarzer Kugeln; aus einer der Urnen wird eine Kugel gezogen, hierauf in die andere gelegt und schliesslich aus dieser letzteren eine Kugel gehoben. Ein Zeuge der ersten Ziehung versichert, es sei eine weisse Kugel gezogen worden; ein Zeuge der zweiten Ziehung macht die gleiche Versicherung. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass thatsächlich in beiden Ziehungen eine weisse Kugel gehoben wurde?*

Lösung. Es bedeute q die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Zeuge die Wahrheit aussagt, so dass mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$q = pr + (1 - p)(1 - r);$$

q' sei die analoge Grösse für den zweiten Zeugen.

Ueber das Zustandekommen der beiden Aussagen können vier verschiedene Hypothesen aufgestellt werden.

Erste Annahme. Beide Zeugen sagen wahr aus. Die nach dieser Annahme gerechnete Wahrscheinlichkeit Π_1 ist das Product

1. aus der Wahrscheinlichkeit q, dass der erste Zeuge wahr aussagt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit q', dass der zweite Zeuge wahr aussagt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dass in der ersten Ziehung eine weisse Kugel gezogen wurde; denn die gezogene Kugel kann ebensowohl aus der ersten wie aus der zweiten Urne hervorgegangen sein;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ für das Ziehen einer weissen Kugel aus der zweiten Urne; denn diese enthält, nachdem die erstgezogene Kugel in sie hineingelegt worden, neben n schwarzen eine weisse Kugel. Folglich ist

$$\Pi_1 = \frac{qq'}{2(n+1)}.$$

Zweite Annahme. Der erste Zeuge sagt wahr, der zweite unwahr aus. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit besteht

1. aus der Wahrscheinlichkeit q, dass der erste Zeuge wahr aussagt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1-q'$, dass der zweite Zeuge wahr aussagt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dass die erste Kugel weiss war;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{n+1}$, dass aus der zweiten Urne eine schwarze Kugel zum Vorschein kam. Es ist daher

$$\Pi_2 = \frac{q(1-q')\,n}{2(n+1)}.$$

Dritte Annahme. Der erste Zeuge sagt unwahr, der zweite sagt wahr aus. Die aus dieser Annahme gefolgerte Wahrscheinlichkeit der Aussagen setzt sich zusammen

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1-q$, dass der erste Zeuge unwahr aussagt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit q', dass der zweite Zeuge wahr aussagt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dass die erste Kugel schwarz war;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{n+1}$, dass die zweite Kugel eine weisse war. Demnach hat man

$$\Pi_3 = \frac{(1-q)q'n}{2(n+1)}.$$

Vierte Annahme. Keiner der beiden Zeugen sagt wahr aus. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist das Product

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1-q$, dass der erste Zeuge unwahr aussagt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1-q'$, dass der zweite Zeuge unwahr aussagt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, dass die erste Kngel schwarz war;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$, dass auch die zweite Kugel schwarz war; es ist also

$$\Pi_4 = \frac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}.$$

Nachdem nur die erste Annahme allein der Wahrheit der Zeugenaussagen günstig ist, so hat man

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4}$$

$$= \frac{\frac{qq'}{2(n+1)}}{\frac{qq'}{2(n+1)} + \frac{q(1-q')n}{2(n+1)} + \frac{(1-q)q'n}{2(n+1)} + \frac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}}$$

$$= \frac{qq'}{qq' + n\left\{q(1-q') + q'(1-q)\right\} + (1-q)(1-q')}.$$

Man erkennt, dass diese Wahrscheinlichkeit sehr klein ausfällt, wenn n sehr gross wird, oder dass die Wahrscheinlichkeit des aus der Uebereinstimmung der beiden Zeugenaussagen hervorgehenden Thatbestandes sich sehr vermindert, wenn letzterer aussergewöhnlicher Natur ist.

Für $q = q' = \frac{1}{2}$ verwandelt sich P in $\frac{1}{2n+2}$, d. i. in die apriorische Wahrscheinlichkeit des bezeugten Ereignisses, wie dies nothwendig sein muss.

2. Das Ereigniss wird durch mehrere Zeugen ausgesagt.

a) *Die Aussage erfolgt gleichzeitig.*

227. **Viertes Problem.** *Eine Urne enthält n Nummern; eine davon wurde gezogen, und zwei Zeugen sagen aus, es sei Nummer i. Es ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereigniss wirklich eingetroffen ist.*

Lösung. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, dass die beiden Zeugen niemals irren; p und p' seien die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten, dass sie nicht betrügen. Es gibt dann nur zwei verschiedene Voraussetzungen, nämlich entweder betrügt keiner oder es betrügen beide.

Erste Annahme. Beide Zeugen sagen die Wahrheit aus. Die auf Grund dieser Annahme gerechnete Wahrscheinlichkeit besteht

1. aus der Wahrscheinlichkeit p, dass der erste Zeuge wahr spricht;

2. aus der Wahrscheinlichkeit p', dass der zweite Zeuge wahr spricht;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$, dass Nummer i gezogen wurde; mithin ist

$$\Pi_1 = \frac{p\,p'}{n}.$$

Zweite Annahme. Beide Zeugen lügen. Die dieser Annahme entsprechende Wahrscheinlichkeit Π_2 besteht

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1 - p$, dass der erste Zeuge lügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1 - p'$, dass der zweite Zeuge lügt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-1}{n}$, dass Nummer i nicht gezogen wurde;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{(n-1)^2}$, dass beide Zeugen dieselbe Nummer i unter den $n - 1$ nicht gezogenen Nummern wählen. Es ist demnach

$$\Pi_2 = (1-p)(1-p')\frac{n-1}{n}\frac{1}{(n-1)^2} = \frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)}.$$

Da die erste Annahme allein der Wahrheit der Zeugenaussagen günstig ist, so folgt

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2} = \frac{pp'}{pp' + \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{(1-p)(1-p')}{(n-1)pp'}};$$

die Gegenwahrscheinlichkeit ist

$$1 - P = \frac{1}{1 + \frac{(n-1)pp'}{(1-p)(1-p')}}.$$

Für grosse Werthe von n steht P der Einheit sehr nahe; in diesem Falle ist es also sehr wahrscheinlich, dass Nummer i gezogen wurde. Die Ursache hiervon liegt darin, dass in dem Falle, als die Zeugen gleichzeitig unwahr aussagen, es schwer zu erwarten stünde, sie werden beide dieselbe Nummer wählen; die Möglichkeit einer Verständigung der Zeugen ist ausgeschlossen.

Ist $n = 2$, so hat das Ziehen der Nummer i die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass dies stattgefunden hat, wenn zwei Zeugen es versichern, lautet

$$P = \frac{pp'}{pp' + (1-p)(1-p')}.$$

Diese Formel drückt die Wahrscheinlichkeit eines durch zwei Zeugen behaupteten Ereignisses aus, dessen Eintreffen und Nichteintreffen a priori gleich wahrscheinlich ist. Sind beide Zeugen gleich glaubwürdig, so hat man $p = p'$ zu setzen, und der obige Ausdruck übergeht in

$$P = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}.$$

Soll in diesem Falle durch die Zeugenaussagen eine grössere Wahrscheinlichkeit für das Ereigniss herbeigeführt werden, als sie ihm a priori zukommt, so muss

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2} > \frac{1}{2}$$

oder

$$p > \frac{1}{2}$$

werden; die Wahrscheinlichkeit, dass jeder der beiden Zeugen

wahr aussagt, muss also $\frac{1}{2}$ übersteigen oder grösser sein als die Gegenwahrscheinlichkeit.

Allgemein: Behaupten s gleich glaubwürdige Zeugen das Stattfinden eines Ereignisses, dessen Eintreffen und Nichteintreffen a priori gleich wahrscheinlich ist, so ist nach erfolgter Zeugenaussage die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses

$$P = \frac{p^s}{p^s + (1-p)^s}.$$

228. **Fünftes Problem.** *Eine Urne enthält n Nummern; der erste Zeuge behauptet, es sei Nummer i, der zweite Zeuge versichert, es sei Nummer i' gezogen worden; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich Nummer i erschienen ist?*

Lösung. Wie vorhin sei $r = r' = 1$ und p die Wahrscheinlichkeit, dass der erste, p' jene, dass der zweite Zeuge wahr aussagt.

Ueber das Zustandekommen der beiden Zeugenaussagen können diesmal drei Annahmen gemacht werden.

Erste Annahme. Der erste Zeuge sagt wahr aus, der zweite lügt. Die dieser Annahme entsprechende Wahrscheinlichkeit besteht

1. aus der Wahrscheinlichkeit p, dass der erste Zeuge wahr aussagt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1-p'$, dass der zweite Zeuge lügt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$, dass Nummer i zum Vorschein kam;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$, dass der zweite Zeuge gerade Nummer i' unter den $n-1$ von i verschiedenen Nummern gewählt hat. Mithin ist

$$\Pi_1 = \frac{p(1-p')}{n(n-1)}.$$

Zweite Annahme. Der erste Zeuge lügt, der zweite sagt wahr aus. Die Wahrscheinlichkeit dieser Combination setzt sich zusammen

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1-p$, dass der erste Zeuge lügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit p', dass der zweite Zeuge wahr aussagt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$, dass Nummer i' gezogen wurde;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$, dass der erste Zeuge, indem er lügt, gerade Nummer i wählt. Demnach ist

$$\Pi_2 = \frac{(1-p)p'}{n(n-1)}.$$

Dritte Annahme. Beide Zeugen lügen. Die nach dieser Hypothese gerechnete Wahrscheinlichkeit ist das Product

1. aus der Wahrscheinlichkeit $1-p$, dass der erste,
2. aus der Wahrscheinlichkeit $1-p'$, dass der zweite Zeuge lügt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-2}{n}$, dass weder i noch i' gezogen wurde;

4. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{(n-1)^2}$, dass der erste Zeuge i und der zweite i' wählt. Es ist also

$$\Pi_3 = \frac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}.$$

Nachdem die erste Annahme allein dem Stattfinden des fraglichen Ereignisses günstig ist, so ist dessen Wahrscheinlichkeit nach erfolgter Zeugenaussage

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

$$= \frac{\frac{p(1-p')}{n(n-1)}}{\frac{p(1-p')}{n(n-1)} + \frac{(1-p)p'}{n(n-1)} + \frac{(n-2)(1-p)(1-p')}{n(n-1)^2}}$$

$$= \frac{p(1-p')(n-1)}{p+p'-2+n(1-pp')}.$$

Für $n = 2$ ist jede der bezeugten Thatsachen eben so wahrscheinlich wie das Gegentheil; ist überdies $p = p' = \frac{1}{2}$, so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, also gleich der apriorischen Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses;

in der That heben sich dann die beiden Zeugenaussagen gegenseitig auf.

229. **Sechstes Problem.** *Von $m + n$ gleich glaubwürdigen Zeugen sagen m das Eintreffen des Ereignisses E, n das Eintreffen seines Gegensatzes F aus; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von E nach erfolgter Zeugenanhörung, wenn E und F a priori gleich wahrscheinlich sind?*

Lösung. Ueber das Zustandekommen dieser Combination von Zeugenaussagen können nur zwei Annahmen getroffen werden.

Erste Annahme. Die m ersten Zeugen sagen wahr aus, die n andern lügen; in diesem Falle ist das Ereigniss E eingetroffen, die entsprechende Wahrscheinlichkeit ergibt sich mit

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} p^m (1-p)^n.$$

Zweite Annahme. Die m ersten Zeugen lügen, die n andern sagen wahr aus; in diesem Falle ist das Ereigniss F eingetroffen und die entsprechende Wahrscheinlichkeit lautet

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} (1-p)^m p^n.$$

Nachdem nur die erste Annahme dem Eintreffen von E günstig ist, so hat man

$$P = \frac{\Pi_1}{\Pi_1 + \Pi_2} = \frac{p^m (1-p)^n}{p^m (1-p)^n + p^n (1-p)^m}.$$

Ist $m > n$ und zwar $m = n + s$, so verwandelt sich der obige Ausdruck in

$$P = \frac{p^{n+s} (1-p)^n}{p^{n+s} (1-p)^n + p^n (1-p)^{n+s}} = \frac{p^s}{p^s + (1-p)^s};$$

es ist also gerade so, als hätten $s = m - n$ Zeugen der vorausgesetzten Beschaffenheit einstimmig das Eintreffen von E ausgesagt. Die Wahrscheinlichkeit P wächst mit s, wenn $p > 1 - p$ oder $p > \frac{1}{2}$; im andern Falle nimmt sie mit dem Zunehmen von s ab.

b) *Die Zeugenaussagen erfolgen successive durch Ueberlieferung.*

230. **Siebentes Problem.** *Ein bei der Ziehung anwesender Zeuge sagt aus, gesehen zu haben, dass aus einer n Nummern*

enthaltenden Urne Nummer i gezogen wurde; dasselbe Ereigniss wird durch Ueberlieferung von r — 1 weiteren Zeugen bestätigt; es ist die Wahrscheinlichkeit zu suchen, dass Nummer i wirklich gezogen wurde.

Lösung. Nachdem das Ereigniss durch $r - 1$ Zeugen successive bezeugt worden, heisse die Wahrscheinlichkeit, dass es wirklich stattgefunden hat, y_{r-1}; durch Hinzutreten eines neuen r^{ten} Zeugen verwandelt sie sich in y_r.

Die Aussage des r^{ten} Zeugen kann in zweifacher Weise zu Stande kommen: a) indem er wahr aussagt, b) indem er lügt; y_r ist demnach die Summe zweier Wahrscheinlichkeiten P und Q.

Die Wahrscheinlichkeit P setzt sich zusammen:

1. Aus der Wahrscheinlichkeit p_r, dass der Zeuge wahr aussagt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit y_{r-1}, welches das wirkliche Stattfinden des Ereignisses nach der $\overline{r-1}^{\text{ten}}$ Zeugenaussage besitzt. Demnach ist

$$P = p_r\, y_{r-1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit Q besteht:

1. Aus der Wahrscheinlichkeit $1 - p_r$, dass der Zeuge lügt;

2. aus der Wahrscheinlichkeit $1 - y_{r-1}$, welche dem Nichtstattfinden des Ereignisses nach der $\overline{r-1}^{\text{ten}}$ Zeugenaussage zukommt;

3. aus der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$, dass der Zeuge, indem er lügt, gerade Nummer i wählt. Folglich ist

$$Q = \frac{(1-p_r)(1-y_{r-1})}{n-1},$$

daher

$$y_r = P + Q = p_r\, y_{r-1} + \frac{(1-p_r)(1-y_{r-1})}{n-1}.$$

Zum Zwecke der Integration dieser Gleichung bringen wir selbe auf die Form

$$y_r - \frac{1}{n} = \frac{np_r - 1}{n-1}\left(y_{r-1} - \frac{1}{n}\right);$$

nimmt man nun hier der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \cdots r$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$y_1 - \frac{1}{n} = \frac{np_1 - 1}{n-1}\left(y_0 - \frac{1}{n}\right),$$

$$y_2 - \frac{1}{n} = \frac{np_2 - 1}{n-1}\left(y_1 - \frac{1}{n}\right),$$

$$y_3 - \frac{1}{n} = \frac{np_3 - 1}{n-1}\left(y_2 - \frac{1}{n}\right),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$y_r - \frac{1}{n} = \frac{np_r - 1}{n-1}\left(y_{r-1} - \frac{1}{n}\right),$$

aus deren Multiplication nach entsprechender Abkürzung

$$y_r - \frac{1}{n} = \left(y_0 - \frac{1}{n}\right)\frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)\cdots(np_r - 1)}{(n-1)^r}$$

folgt. Noch handelt es sich um die Werthermittelung des Symbols y_0; dieselbe gelingt durch die Bemerkung, dass nach erfolgter Aussage eines Zeugen (Nr. 224) die Wahrscheinlichkeit des Stattfindens gleich kommt der Wahrscheinlichkeit, dass dieser Zeuge wahr aussagt; mithin ist $y_1 = p_1$; dies führt zu der Gleichung

$$p_1 - \frac{1}{n} = \frac{np_1 - 1}{n-1}\left(y_0 - \frac{1}{n}\right),$$

aus welcher sich $y_0 = 1$ ergibt. Man hat daher schliesslich

$$y_r = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,\frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)\cdots(np_r - 1)}{(n-1)^r}.$$

Mit ins Unbegrenzte wachsendem n nähert sich y_r der Grenze

$$y_r = p_1 p_2 \cdots p_r.$$

Ist das Eintreffen des bezeugten Ereignisses eben so wahrscheinlich wie sein Nichteintreffen, also $n = 2$, so wird

$$y_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p_1 - 1)\cdots(2p_r - 1).$$

Aus dem allgemeinen Ausdrucke für y_r geht hervor, dass in dem Masse, als die Reihe der Zeugnisse wächst, die aus denselben resultirende Wahrscheinlichkeit beständig der Grenze $\frac{1}{n}$, d. i. der apriorischen Wahrscheinlichkeit des bezeugten Ereignisses zustrebt; das Glied

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{(np_1 - 1)\cdots(np_r - 1)}{(n-1)^r}$$

drückt also die Vergrösserung aus, welche letztgenannte Wahrscheinlichkeit durch die Reihe von Ueberlieferungen erfährt.

Man ersieht hieraus, dass die Wahrscheinlichkeit des wirklichen Stattfindens einer durch Tradition überkommenen Erscheinung in dem Masse geringer wird, als die Kette von Ueberlieferungen sich erweitert. So wäre beispielsweise für $n = 20$ und $p_1 = p_2 = \cdots = \frac{9}{10}$

$$y_{10} = \frac{1}{20} + \frac{19}{20}\left(\frac{17}{19}\right)^{10} = 0{\cdot}05 + 0{\cdot}3124,$$

$$y_{20} = \frac{1}{20} + \frac{19}{20}\left(\frac{17}{19}\right)^{20} = 0{\cdot}05 + 0{\cdot}1028;$$

$$y_{40} = \frac{1}{20} + \frac{19}{20}\left(\frac{17}{19}\right)^{40} = 0{\cdot}05 + 0{\cdot}0111.$$

II. Wahrscheinlichkeit der Urtheilssprüche.

231. **Erstes Problem.** *Welches ist die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit eines Urtheils, welches zwischen zwei entgegengesetzten, an sich gleich zulässigen Meinungen mit Stimmeneinhelligkeit von r Richtern (Geschwornen) entscheidet, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass jeder dieser Richter nicht irrt, gleich kommt p?*

Lösung. Offenbar ist dieser Fall vergleichbar mit der einstimmigen Aussage von r gleich glaubwürdigen Zeugen in Bezug auf ein Ereigniss, dessen Eintreffen eben so wahrscheinlich ist wie das Nichteintreffen; die aus einem solchen Zeugnisse hervorgehende Wahrscheinlichkeit des thatsächlichen Stattfindens des bezeugten Ereignisses übergeht in diesem Falle in die Wahrscheinlichkeit, dass das von den r Richtern gefällte Urtheil richtig ist; letztere Wahrscheinlichkeit ist daher (Nr. 227)

$$P = \frac{p^r}{p^r + (1-p)^r} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

Was nun den Werth von p betrifft, so schlägt Laplace dessen Bestimmung aus dem Verhältnisse der durch Stimmeneinheit gefällten Urtheile zur Anzahl aller bei dem betreffenden Gerichtshofe in Verhandlung gezogenen Fälle vor. Ist nämlich letztere Anzahl, welche mit n bezeichnet werden soll, sehr gross, die Zahl der einstimmig gefällten Urtheile i, so kann mit grosser Annäherung

$$p^r + (1-p)^r = \frac{i}{n} \dots\dots\dots\dots ($$

gesetzt werden; denn einstimmige Urtheile können in zw facher Weise zu Stande kommen: 1) Indem keiner der Richter irrt; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist p^r; 2) inde alle r Richter irren; die entsprechende Wahrscheinlichkeit i $(1-p)^r$; demnach ist die Wahrscheinlichkeit eines ei stimmigen Urtheils überhaupt

$$p^r + (1-p)^r,$$

woraus die Berechtigung der Gleichung (2) erhellt, dur deren Auflösung ein Werth für p gefunden wird. Besteht d Gerichtshof beispielsweise aus drei Richtern, so hat man d Gleichung

$$3p^2 - 3p + 1 = \frac{i}{n},$$

aus welcher

$$p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4i-n}{12n}}$$

gefunden wird; es wurde nur das Zeichen + beibehalte weil es natürlich ist anzunehmen, dass kein Richter leicht irrt, als er nicht irrt. Wäre gerade die Hälfte der Urthei durch Stimmeneinhelligkeit gefällt, so hätte man weg $i = \frac{n}{2} \cdots p = 0{\cdot}789$.

Unter Zugrundelegung der Beziehung (2) ergibt sich d Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit eines neuen einsti migen Urtheils, wenn man den Werth

$$p^r = \frac{i}{n} - (1-p)^r$$

aus (2) in die Formel (1) einsetzt; man erhält so

$$P = 1 - \frac{n}{i}(1-p)^r.$$

Hieraus ersieht man, dass P um so grösser ausfällt, grösser r und je beträchtlicher die Werthe $\frac{i}{n}$ und p sin letzteres hängt offenbar von der Aufklärung der Richter a Es liegt daher ein grosser Vortheil in der Errichtung vo Appellationsgerichten, welche aus einer grossen Anzahl au geklärter Richter zusammengesetzt werden.

232. **Zweites Problem.** *Ein vor einem $p+q$ gliedrigen Gerichtshofe (Geschwornengerichte) stehender Angeklagter wird von p Richtern des ihm zur Last gelegten Verbrechens schuldig, von q Richtern nichtschuldig gesprochen. Wie gross ist die auf Grund dieses Verdictes gefolgerte Wahrscheinlichkeit der Unschuld des Angeklagten?*

Von der Grösse dieser Wahrscheinlichkeit hängt es offenbar ab, ob der Angeklagte verurtheilt oder freigesprochen werden soll. Nur wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Angeklagte das ihm in der Anklage zur Last gelegte Verbrechen wirklich begangen hat, so bedeutend ist, dass die der Gesellschaft aus der Lossprechung drohende Gefahr grösser erscheint als der Irrthum des Gerichtshofes, fordern die allgemeinen Interessen die Verurtheilung. Ist a dieses nöthige Mass der Wahrscheinlichkeit, so nehmen wir an, dass jeder der Geschwornen, welcher schuldig spricht, nur deshalb so entscheidet, weil die Wahrscheinlichkeit, welche er sich auf Grund der Verhandlung und vermöge seiner Erfahrungen von der Schuld des Angeklagten gebildet hat, mindestens gleich kommt a.

Bezeichnet x die Wahrscheinlichkeit, dass der Richter nicht irrt, so trifft Laplace bezüglich dieser Grösse die Annahme, dass ihr Werth zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ bis 1 in unendlich kleinen gleichen und *a priori* gleich wahrscheinlichen Intervallen sich bewegt, indem er voraussetzt, dass bei keinem Richter die Wahrscheinlichkeit des Irrens grösser gedacht werden kann als jene des Nichtirrens. Die Aufgabe läuft nun darauf hinaus, die Wahrscheinlichkeit Q eines ungewissen Ereignisses F auf Grund einer gemachten Beobachtung E abzuleiten; und zwar ist F die Schuld des Angeklagten oder die Richtigkeit des Urtheils, wenn er verurtheilt wird, E die Schuldigsprechung durch p und die Nichtschuldigsprechung durch q Richter; bezeichnet man für einen gewissen Werth von x die Wahrscheinlichkeit von F mit z, jene von E mit y, so wird

$$Q = \frac{\int yz\,dx}{\int y\,dx}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

beide Integrale innerhalb der Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1 genommen, innerhalb welcher die Ursache x sich ändern kann. Die im Problem geforderte Wahrscheinlichkeit der Nichtschuld des Angeklagten, oder des Irrthums, wenn er verurtheilt wurde, ist dann

$$P = 1 - Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Das beobachtete Ereigniss E kann in zweifacher Weise zu Stande kommen: entweder indem die p schuldigsprechenden Zeugen nicht irren, — die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist $x^p (1 - x)^q$; oder indem sie irren, — die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist $(1 - x)^p x^q$; demnach ist

$$y = x^p (1 - x)^q + (1 - x)^p x^q.$$

Die Verurtheilung des Angeklagten kann erfolgen: 1) wenn die schuldigsprechenden Zeugen nicht irren; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $x^p (1 - x)^q$ und das Urtheil ist in diesem Falle ein gerechtes; 2) wenn die schuldigsprechenden Zeugen irren; die Wahrscheinlichkeit dafür ist $(1 - x)^p x^q$ und das Urtheil ist in diesem Falle ein verfehltes. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass, indem der Angeklagte verurtheilt wird, das Urtheil ein richtiges ist, also die Wahrscheinlichkeit von F, gleich

$$z = \frac{x^p (1 - x)^q}{x^p (1 - x)^q + (1 - x)^p x^q}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe von y und z in die Formel (1) findet sich

$$Q = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^p (1 - x)^q \, dx}{\int_{\frac{1}{2}}^{1} [x^p (1 - x)^q + (1 - x)^p x^q] \, dx}.$$

Führt man in dem zweiten der Integrale, in welche der Nenner zerfällt, die Substitution $x = 1 - y$ durch, so wird, da es auf den Namen der Variablen nicht ankommt,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} [x^p (1 - x)^q + (1 - x)^p x^q] \, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^p (1 - x)^q \, dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} y^p (1 - y)^q \, dy$$

$$= \int_{0}^{1} x^p (1 - x)^q \, dx;$$

daher hat man

$$Q = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^p (1-x)^q \, dx}{\int_{0}^{1} x^p (1-x)^q \, dx};$$

dagegen ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, die der Nichtschuld des Angeklagten oder des Irrthums, wenn er verurtheilt wird, nach Formel (2)

$$P = 1 - Q = 1 - \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^p (1-x)^q \, dx}{\int_{0}^{1} x^p (1-x)^q \, dx}$$

$$= \frac{\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q \, dx}{\int_{0}^{1} x^p (1-x)^q \, dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nimmt man in dem Zählerintegral $y = 2x$, so wird

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q \, dx = \frac{1}{2^{p+q+1}} \int_0^1 y^p \, [1 + (1-y)]^q \, dy$$

$$= \frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{ \int_0^1 y^p dy + q \int_0^1 y^p (1-y) dy + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \int_0^1 y^p (1-y)^2 dy \right.$$

$$\left. + \cdots + \int_0^1 y^p (1-y)^q \, dy \right\}$$

$$= \frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{ \frac{1}{p+1} + q \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2)}{\Gamma(p+3)} + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(3)}{\Gamma(p+4)} + \cdots + \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{ \frac{1}{p+1} + \frac{q}{(p+1)(p+2)} + \frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{q \cdots 2 \cdot 1}{(p+1)(p+2) \cdots (p+q+1)} \right\};$$

ferner ist

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{1 \cdot 2 \cdots q}{(p+1)(p+2) \cdots (p+q+1)}.$$

Mithin ergibt sich schliesslich

$$P = \frac{1}{2^{p+q+1}} \left\{ 1 + \frac{p+q+1}{1} + \frac{(p+q+1)(p+q)}{1 \cdot 2} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(p+q+1) \cdots (p+2)}{1 \cdot 2 \cdots q} \right\}$$
$$= \frac{1}{2^{p+q+1}} \sum_{0}^{q}{}'_{i} \binom{p+q+1}{i} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Würde zur Verurtheilung Einstimmigkeit der Geschwornen gefordert werden, so hätte man $q = 0$, und die Wahrscheinlichkeit des Irrthums im Urtheile wäre sodann

$$P = \frac{1}{2^{p+1}}, \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

wobei nunmehr p die Zahl aller Richter oder Geschwornen bedeutet.

In dem gewöhnlichen Falle, wo $p + q = 12$ ist, erhält man für die aufeinanderfolgenden Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5 von q:

$$P = \frac{1}{8192}, \frac{14}{8192}, \frac{92}{8192}, \frac{378}{8192}, \frac{1093}{8192}, \frac{2380}{8192}.$$

als Wahrscheinlichkeiten des Irrthums in der Verurtheilung durch 12 Geschworne

bei	12	Stimmen	gegen	0	oder	12	Stimmen	Majorität,
„	11	„	„	1	„	10	„	„
„	10	„	„	2	„	8	„	„
„	9	„	„	3	„	6	„	„
„	8	„	„	4	„	4	„	„
„	7	„	„	5	„	2	„	„

Im letzten Falle, bei der einfachen Majorität von zwei Stimmen, ist diese Wahrscheinlichkeit nahe $\frac{2}{7}$, so dass es sehr wahrscheinlich wäre, dass von einer sehr grossen Anzahl bei dieser Majorität Verurtheilter $\frac{2}{7}$ unschuldig getroffen werden.

Bei einem zahlreichen Gerichtshofe würde demnach die Majorität von zwei Stimmen anzeigen, dass der Fall, um den es sich handelt, nahezu zweifelhaft ist; die Verurtheilung des Angeklagten würde in einem solchen Falle den Grundsätzen der Humanität zuwiderlaufen.

Stimmeneinhelligkeit würde allerdings der Richtigkeit des Urtheils eine grosse Wahrscheinlichkeit verleihen; wollte man sie aber fordern, so würden viele Schuldige ungestraft ausgehen. Man muss daher entweder, wenn man Stimmeneinheit fordern will, die Zahl der Richter einschränken, oder aber die zur Verurtheilung nöthige Majorität vergrössern, wenn der Gerichtshof zahlreicher ist.

Die folgende kleine Tafel dient zur Rechtfertigung dieser Grundsätze, die übrigens der gesunde Verstand selbst eingibt:

$p+q$	p	q	$\frac{p}{q}$	P
4	3	1	3·000	0·187
6	4	2	2·000	0·227
8	5	3	1·667	0·254
10	6	4	1·500	0·274
12	7	5	1·400	0·291
14	8	6	1·333	0·303
16	9	7	1·286	0·314
18	10	8	1·250	0·324
20	11	9	1·222	0·332

Die Majorität beträgt hier durchwegs zwei Stimmen, das Verhältniss der schuldigsprechenden zu den freisprechenden Stimmen nähert sich beständig der Einheit; die Wahrscheinlichkeit eines in der Verurtheilung zu fürchtenden Irrthums wächst in dem Masse, als die Gesammtzahl der Geschwornen zunimmt. Daraus geht also hervor, dass man, um das Wachsen der erwähnten Wahrscheinlichkeit zu verhindern, mit dem Zunehmen der Geschwornenzahl die zur Verurtheilung nothwendige Majorität vergrössern muss. Dieser Grundsatz ist in der folgenden kleinen Tafel durchgeführt.

$p+q$	p	q	$\frac{p}{q}$	P
3	2	1	2·0	0·313
6	4	2	2·0	0·227
10	7	3	2·3	0·113
18	14	4	3·5	0·009

Hier wächst die Majorität mit der Zahl der Geschwornen, die Wahrscheinlichkeit des zu fürchtenden Irrthums vermindert sich.

Das folgende Täfelchen endlich bezieht sich auf Einstimmigkeit der Geschwornen.

$p+q$	P
3	0·0625
4	0·0312 . . .
6	0·0078 . . .
8	0·0019 . . .
10	0·0004 . . .
12	0·0001 . . .
18	0·0000 . . .

Die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des Urtheils wird also in diesem Falle um so beträchtlicher, je zahlreicher der Gerichtshof.

III. Von den Entscheidungen durch Stimmenmehrheit.

233. Der Werth und die Sicherheit einer auf Grund von Stimmenmehrheit getroffenen Entscheidung hängt zunächst vom Stimmenverhältniss der Majorität und Minorität und in zweiter Reihe von der Intelligenz und den moralischen Grundsätzen der Stimmenden ab.

Mit Unrecht wird häufig auf die erste Bedingung nicht genügende Rücksicht genommen, da man nicht selten durch eine einzige Stimme der Majorität entscheidet; in einem solchen Falle besteht, wenn $2n+1$ die Anzahl der Stimmenden ist, die Majorität aus $n+1$, die Minorität aus n Stimmen, und da bei einigermassen beträchtlichem n das Verhältniss $\frac{n+1}{2n+1}$ nahe $\frac{1}{2}$ ist, so ist unter übrigens gleichen Umständen die Wahrscheinlichkeit, dass die Meinung der Majorität auf Wahrheit beruhe, nur wenig über $\frac{1}{2}$, während sie bei Stimmeneinheit dem Werthe 1 nahe käme. Zwischen diesen beiden extremen Fällen ist es nur das Verhältniss der Majorität zur Minorität, welches über den Grad der Wahrscheinlichkeit des Abstimmungsergebnisses zu entscheiden hat.

In den meisten Versammlungen und bei Gerichtshöfen wird eine minimale Stimmenmehrheit festgesetzt, welche, soll die Entscheidung Giltigkeit erlangen, erreicht seïn muss. In einem solchen Falle ist es für die Sicherheit der Entscheidungen erforderlich, dass die Zahl der Votanten nur wenig beträchtlich sei, wie dies aus der folgenden Tafel hervorgeht.

Gesammtzahl der Stimmen.	Majorität	Minorität.	Verhältniss.
4	3	1	1 : 3
6	4	2	1 : 2
8	5	3	1 : 1·67
10	6	4	1 : 1·50
26	14	12	1 : 1·17
50	26	24	1 : 1·08
100	51	49	1 : 1·04

Der Unterschied zwischen der Majorität und Minorität ist in dieser Tafel durchwegs mit 2 angenommen, und man sieht, dass in dem Masse, als die Zahl der Stimmenden wächst, das Verhältniss der Mehrheit zur Minderheit dem Werthe 1 zustrebt, womit aber auch die getroffene Entscheidung an Sicherheit einbüsst.

Da nun andererseits eine kleine Versammlung geringere Garantie bietet als eine zahlreiche, so wird man der Feststellung der minimalen Majorität nicht ein constantes arithmetisches, sondern ein constantes geometrisches Verhältniss zu Grunde legen müssen; unter solchen Umständen fallen die Entscheidungen um so sicherer aus, je zahlreicher die Versammlung, wie dies durch die folgende Tafel dargethan wird, in welcher das Verhältniss der Minorität zur Majorität beständig 1 : 3 ist.

Gesammtzahl der Stimmen	Majorität	Minorität	Unterschied	Verhältniss
4	3	1	2	1 : 3
12	9	3	6	„
24	18	6	12	„
164	123	41	82	„

Mit dem Unterschied zwischen Mehrheit und Minderheit wächst auch die Sicherheit der Entscheidung.

Aus dem Vorstehenden folgt:

1) Es ist nicht angezeigt, in berathschlagenden Versammlungen durch einfache Stimmenmehrheit zu entscheiden.

2) Bei der Feststellung einer minimalen für die Giltigkeit der Entscheidungen nöthigen Majorität ist es rathsam, nicht ein bestimmtes arithmetisches, sondern ein geometrisches Verhältniss zwischen den Stimmenzahlen der Majorität und Minorität zu fixiren.

Was die Intelligenz und Moralität der Stimmenden anlangt, so dürfte es schwer fallen, diese der Rechnung zuzuführen.

Anhang.

I.

Fehlertheorie nach Laplace.

Vorbemerkung. Ein wesentlicher Punkt der Fehlertheorie von Laplace liegt darin, dass dieselbe das Fehlergesetz vorläufig unbestimmt lässt und nur der einzigen Forderung unterwirft, es mögen numerisch gleiche dem Zeichen nach entgegengesetzte Fehler gleich wahrscheinlich sein. Den Entwickelungen liegt aber noch die weitere Voraussetzung einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen zu Grunde, und Laplace weist nach, dass unter dieser Voraussetzung unabhängig von der übrigen Natur des Fehlergesetzes die Methode der kleinsten Quadrate die vortheilhaftesten Werthe der Unbekannten liefert. Insofern käme dieser Theorie ein hoher Grad von Allgemeinheit zu, wenn die in Fällen der Praxis nur selten zutreffende Annahme einer sehr grossen Zahl von Beobachtungen nicht gemacht werden müsste.

1. Directe Beobachtungen einer Unbekannten.

Problem I (a). *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate einer sehr grossen Anzahl s von Beobachtungen gleichkommt $\omega = l + \mu s$, vorausgesetzt, dass positive und negative Fehler von gleichem numerischen Werthe gleich wahrscheinlich sind.*

Lösung. Der numerische Werth der Fehlergrenze sei a, so ist $2a$ das gesammte Fehlerintervall; dasselbe denken wir uns in unendlich kleine gleiche Intervalle vom Betrage da getheilt und haben dann die Reihe der möglichen Fehler

$$-a,\ -a+da,\ \cdots -x,\ \cdots -da,\ 0,\ da,\ \cdots x,\ \cdots a-da,\ a,$$

deren Wahrscheinlichkeiten mit

$$\varphi(-a),\ \varphi(-a+da),\ \cdots \varphi(-x),\ \cdots \varphi(-da),\ \varphi(0)$$
$$\varphi(da),\ \cdots \varphi(x),\ \cdots \varphi(a-da),\ \varphi(a)$$

bezeichnet werden mögen; diese Symbole wären sämmtlich mit da zu multipliciren; doch wollen wir diesen Factor, ihn als Einheit der Fehler betrachtend, unterdrücken. Demgemäss wird beispielsweise die Summe der eben angeschriebenen Functionswerthe durch $\int\limits_{-a}^{a}\varphi(x)dx$ zu ersetzen sein u. s. w.

In der Entwickelung der Function

$$X=\{\varphi(-a)t^{(-a)^2}+\cdots+\varphi(-x)t^{(-x)^2}+\cdots+\varphi(-da)t^{(-da)^2}$$
$$+\varphi(0)+\varphi(da)t^{da^2}+\cdots+\varphi(x)t^{x^2}+\cdots+\varphi(a)t^{a^2}\}^s$$
$$=\Sigma P_\omega t^\omega$$

stellt nun P_ω die geforderte Wahrscheinlichkeit vor, sobald $\omega = l+\mu s$ gesetzt wird. Um zunächst einen allgemeinen Ausdruck für letztere zu erhalten, führen wir die neue Variable θ mit Hilfe der Gleichung $t=e^{\theta\sqrt{-1}}$ ein, wodurch

$$X=\{\varphi(-a)e^{a^2\theta\sqrt{-1}}+\cdots+\varphi(-x)e^{x^2\theta\sqrt{-1}}+\cdots$$
$$+\varphi(-da)e^{da^2\theta\sqrt{-1}}+\varphi(0)+\varphi(da)e^{da^2\theta\sqrt{-1}}+\cdots$$
$$+\varphi(x)e^{x^2\theta\sqrt{-1}}+\cdots+\varphi(a)e^{a^2\theta\sqrt{-1}}\}^s=\Sigma P_\omega e^{\omega\theta\sqrt{-1}}$$

erhalten wird. Multiplicirt man diese Gleichung mit $d\theta\, e^{-\omega\theta\sqrt{-1}}$, so ergibt sich nach erfolgter Integration innerhalb $\pm\pi$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}X d\theta\, e^{-\omega\theta\sqrt{-1}} = 2\pi P_\omega,$$

woraus weiter

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}X d\theta\, e^{-\omega\theta\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\, e^{-l\theta\sqrt{-1}}\{e^{-\mu\theta\sqrt{-1}}[\varphi(0)+2\varphi(da)e^{da^2\theta\sqrt{-1}}+\cdots$$

$$+2\varphi(x)e^{x^2\theta\sqrt{-1}}+\cdots+2\varphi(a)e^{a^2\theta\sqrt{-1}}]\}^s=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta e^{-l\theta\sqrt{-1}}A$$

abgeleitet wird.

Die weitere Behandlung dieser Formel erfordert die Entwicklung von A; es ist

$$l\cdot A = -s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\Big\{\varphi(0) + 2\varphi(da)\Big[1 + da^2\theta\sqrt{-1} - \frac{da^4\theta^2}{2} - \cdots\Big] + \cdots$$

$$+ 2\varphi(x)\Big[1 + x^2\theta\sqrt{-1} - \frac{x^4\theta^2}{2} - \cdots\Big] + \cdots$$

$$+ 2\varphi(a)\Big[1 + a^2\theta\sqrt{-1} - \frac{a^4\theta^2}{2} - \cdots\Big]\Big\}$$

$$= -s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\Big\{\varphi(0) + 2\varphi(da) + \cdots + 2\varphi(x) + \cdots + 2\varphi(a)$$

$$+ 2\theta\sqrt{-1}\Big[da^2\varphi(da) + \cdots + x^2\varphi(x) + \cdots + a^2\varphi(a)\Big]$$

$$-\theta^2\Big[da^4\varphi(da) + \cdots + x^4\varphi(x) + \cdots + a^4\varphi(a)\Big] + \cdots\Big\}$$

$$= -s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\Big\{-\varphi(0) + 2\int_0^a\varphi(x)\,dx + 2\theta\sqrt{-1}\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx$$

$$-\theta^2\int_0^a x^4\varphi(x)\,dx - \cdots\Big\}.$$

Für

$$\frac{x}{a} = x', \quad \varphi(x) = \varphi(ax') = \psi(x')$$

und mit den Abkürzungen

$$2\int_0^1\psi(x')dx' = k,$$

$$\int_0^1 x'\psi(x')dx' = k',$$

$$\int_0^1 x'^2\psi(x')dx' = k'',$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

wird

$$2\int_0^a\varphi(x)\,dx = ak,$$

$$\int_0^a x\,\varphi(x)\,dx = a^2k',$$

$$\int_0^a x^2\varphi(x)\,dx = a^3k'',$$

$$\cdots\cdots\cdots;$$

der obige Ausdruck schreibt sich daher, wenn man das un-

endlich kleine $\varphi(0)$ neben der endlichen Summe der übrigen Glieder vernachlässigt, wie folgt:

$$l\cdot A = - s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\left\{ak + 2\theta\sqrt{-1}\,a^3k'' - \theta^2a^5k^{IV} - \cdots\right\}$$

$$= - s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\left[ak\left\{1 + \frac{2k''}{k}a^2\theta\sqrt{-1} - \frac{k^{IV}}{k}a^4\theta^2 - \cdots\right\}\right].$$

Nun ist aber

$$ak = 2\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_{-a}^a \varphi(x)\,dx = 1,$$

mithin hat man weiter

$$l\cdot A = - s\mu\theta\sqrt{-1} + \frac{2k''}{k}sa^2\theta\sqrt{-1} - \frac{k^{IV}}{k}sa^4\theta^2 + \frac{4k''^2}{2k^2}sa^4\theta^2 - \cdots$$

$$= \left[\frac{2k''}{k}a^2 - \mu\right]s\theta\sqrt{-1} - \frac{kk^{IV} - 2k''^2}{k^2}sa^4\theta^2;$$

wählt man insbesondere für μ den Werth

$$\mu = \frac{2k''}{k}a^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

so wird

$$l\cdot A = - \frac{kk^{IV} - 2k''^2}{k^2}sa^4\theta^2$$

und

$$A = e^{-\frac{kk^{IV} - 2k''^2}{k^2}sa^4\theta^2}.$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in die Formel für P_ω erhält man

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-l\theta\sqrt{1} - \frac{kk^{IV} - 2k''^2}{k^2}sa^4\theta^2};$$

wird darin

$$\frac{k}{\sqrt{kk^{IV} - k''^2}} = \beta,$$

sodann

$$\frac{a^2\theta\sqrt{s}}{\beta} = t, \quad \theta = \frac{\beta}{a^2\sqrt{s}}t, \quad d\theta = \frac{\beta}{a^2\sqrt{s}}dt$$

gesetzt, wobei die Integrationsgrenzen in $\pm\frac{a^2\pi\sqrt{s}}{\beta}$ übergehen und daher im Hinblick auf den sehr gross vorausgesetzten Werth von s bis $\pm\infty$ ausgedehnt werden können, so ergibt sich weiter

$$P_\omega = \frac{\beta}{2a^2\pi\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\left[t+\frac{\beta l\sqrt{-1}}{2a^2\sqrt{s}}\right]^2-\frac{\beta^2 l^2}{4a^4 s}}$$

$$= \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4a^4 s}}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

oder

$$P_\omega = \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}, \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

wenn

$$\frac{l}{a^2\sqrt{s}} = r, \quad l = a^2 r\sqrt{s}$$

genommen wird. Der erste dieser Ausdrücke, (2), ist mit dl, der zweite also, (2'), mit $a^2 dr\sqrt{s}$ zu multipliciren.

P_ω stellt nun die Wahrscheinlichkeit vor, dass die Summe der Fehlerquadrate von s Beobachtungen den Werth

$$\omega = l + \mu s = l + \frac{2k''}{k} sa^2$$

$$= a^2 r\sqrt{s} + \frac{2k''}{k} sa^2$$

erlangt oder um $l = a^2 r\sqrt{s}$ von ihrem wahrscheinlichsten Betrage $\mu s = \frac{2k''}{k} sa^2$ abweicht; dass letzteres der wahrscheinlichste Werth der Fehlerquadratsumme ist, folgt daraus, dass P_ω für $l = 0$ oder $r = 0$ sein Maximum erreicht.

In dem Ausdrucke $\frac{2k''}{k} sa^2$ bedeutet sa^2 die grösstmögliche Summe der Fehlerquadrate, welche eintreten würde, wenn jede Beobachtung mit einem der Fehlergrenze gleichen Fehler behaftet wäre; $\frac{2k''}{k}$ hängt von der Natur des Fehlergesetzes ab. Im äussersten Falle, d. i. bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit, ist

$$k'' = \int_0^1 x'^2 c\,dx' = \frac{c}{3},$$

$$k = 2\int_0^1 c\,dx' \quad = 2c;$$

mithin ist dann $\frac{2k''}{k} sa^2 = \frac{1}{3} sa^2$; im Allgemeinen bleibt daher

die Summe der zweiten Fehlerpotenzen *unter* diesem Betrage. Wäre beispielsweise das Fehlergesetz durch

$$\psi(x') = c(1 - x'^2)$$

repräsentirt, so hätte man

$$k'' = c\int_0^1 x'^2(1 - x'^2)dx' = \frac{2c}{15},$$

$$k = 2c\int_0^1 (1 - x'^2)\,dx' = \frac{4c}{3},$$

und $\frac{2k''}{k}sa^2 = \frac{1}{5}sa^2 < \frac{1}{3}sa^2$.

Auch die Bedeutung von $\mu = \frac{2k''}{k}a^2$ wird sofort klar; es ist das Quadrat jenes Fehlers, welcher, wäre er allen Beobachtungen gemeinsam, dieselbe wahrscheinlichste Fehlerquadratsumme herbeiführen würde, wie die verschiedenen den einzelnen Beobachtungen wirklich anhaftenden Fehler. Dem Obigen zufolge bleibt μ im Allgemeinen unter $\frac{1}{3}a^2$.

Problem 1 (b). *Es ist die Wahrscheinlichkeit P zu suchen, dass die Summe der Fehlerquadrate einer sehr grossen Anzahl s von Beobachtungen zwischen die Grenzen*

$$\mu s \pm l = \frac{2k''}{k}sa^2 \pm l$$

zu liegen kommt.

Lösung. Zu diesem Ende hat man den Ausdruck (2) oder jenen (2'), nachdem man mit dl, beziehungsweise mit $a^2dr\sqrt{s}$ multiplicirt hat, innerhalb der Grenzen $\pm l$ oder der zugehörigen Grenzen $\pm r$ zu integriren. Auf solche Weise erhält man

$$P = \frac{\beta}{2a^2\sqrt{\pi s}}\int_{-l}^{l} dl\, e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4a^4 s}} = \frac{\beta}{a^2\sqrt{\pi s}}\int_0^l dl\, e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4a^4 s}}$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^r dr\, e^{-\frac{\beta^2 r^2}{4}}$$

als Wahrscheinlichkeit einer zwischen die Grenzen

$$\frac{2k''}{k} sa^2 \pm l = \frac{2k''}{k} sa^2 \pm a^2 r \sqrt{s}$$

fallenden Fehlerquadratsumme.

Mit der weiteren Abkürzung

$$\frac{\beta^2 r^2}{4} = t^2, \quad \frac{\beta r}{2} = t$$

wird endlich

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehlerquadratsumme zwischen den Grenzen

$$\frac{2k''}{k} sa^2 \pm \frac{2ta^2\sqrt{s}}{\beta}$$

eingeschlossen bleibt. Derselbe Werth P gibt aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der Mittelwerth der Fehlerquadrate oder die durch s dividirte Summe derselben zwischen

$$\frac{2k''}{k} a^2 \pm \frac{2ta^2}{\beta\sqrt{s}}$$

enthalten ist.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_s$ die Fehler der s Beobachtungen, so kann man, sofern s eine sehr grosse Zahl ist, mit grosser Wahrscheinlichkeit die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{2k''}{k} sa^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_s^2 = \sum_1^s \varepsilon_i^2$$

voraussetzen und gelangt so zu einer Bestimmung des vom Fehlergesetz abhängigen Factors $\frac{2k''}{k} a^2$; es wird nämlich

$$\frac{2k''}{k} a^2 = \frac{\sum_1^s \varepsilon_i^2}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Problem II (a). *Das Intervall zwischen den Fehlergrenzen einer jeden Beobachtung betrage $2a$; man verlangt die Wahrscheinlichkeit P_l, dass die algebraische Summe der Fehler einer sehr grossen Anzahl s von Beobachtungen l betrage, vorausgesetzt, dass das Fehlergesetz der Forderung $\varphi(-x) = \varphi(x)$ Genüge leistet.*

Lösung. Bei der im Problem I (a) gedachten Theilung des gesammten Fehlerintervalls sind wieder

$$-a, -a+da, \cdots -x, \cdots -da, 0, da, \cdots x, \cdots a-da, a$$

die möglichen Fehler; ihre Wahrscheinlichkeiten sollen wie dort kurz

$$\varphi(-a),\ \varphi(-a+da),\ \cdots\ \varphi(-x),\ \cdots\ \varphi(-da),\ \varphi(0),$$
$$\varphi(da),\ \cdots\ \varphi(x),\ \cdots\ \varphi(a-da),\ \varphi(a)$$

genannt werden. In der Entwicklung der Function

$$X = \{\varphi(-a)t^{-a} + \cdots + \varphi(-x)t^{-x} + \cdots + \varphi(-da)t^{-da} + \varphi(0)$$
$$+ \varphi(da)t^{da} + \cdots + \varphi(x)t^{x} + \cdots + \varphi(a)t^{a}\}^{s}$$
$$= \Sigma P_l t^l$$

bedeutet dann P_l die verlangte Wahrscheinlichkeit. Um einen Ausdruck für dieselbe zu erhalten, setzen wir $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$, — dadurch wird

$$X = \{\varphi(-a)e^{-a\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(-x)e^{-x\theta\sqrt{-1}} + \cdots$$
$$+ \varphi(-da)e^{-da\theta\sqrt{-1}} + \varphi(0) + \varphi(da)e^{da\theta\sqrt{-1}} + \cdots$$
$$+ \varphi(x)e^{x\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(a)e^{a\theta\sqrt{-1}}\}^{s}$$
$$= P_l e^{l\theta\sqrt{-1}};$$

multipliciren diese Gleichung mit $d\theta e^{-l\theta\sqrt{-1}}$, integriren hierauf zwischen den Grenzen $\pm\pi$ und erhalten

$$P_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X d\theta e^{-l\theta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-l\theta\sqrt{-1}}\ \{\varphi(0) + \varphi(da)[e^{da\theta\sqrt{-1}} + e^{-da\theta\sqrt{-1}}] + \cdots$$
$$+ \varphi(x)\ [e^{x\theta\sqrt{-1}} + e^{-x\theta\sqrt{-1}}] + \cdots$$
$$+ \varphi(a)\ [e^{a\theta\sqrt{-1}} + e^{-a\theta\sqrt{-1}}]\ \}^{s}.$$

Die eingeklammerte Function unter dem Integral heisse für den Augenblick N; wird ferner an Stelle von $e^{-l\theta\sqrt{-1}}$ der Ausdruck $\cos(l\theta) + \sqrt{-1}\sin(l\theta)$ gesetzt, so ist weiter

$$P_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos(l\theta)\, N^s - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \sin(l\theta)\, N^s$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \cos(l\theta)\, N^s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta \cos(l\theta) \Big\{\varphi(0) + 2\varphi(da)\cos(da\cdot\theta) + \cdots$$

$$+ 2\varphi(x)\cos(x\theta) + \cdots + 2\varphi(a)\cos(a\theta)\Big\}^s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta \cos(l\theta) \Big\{-\varphi(0) + 2\int_{0}^{a}\varphi(x)\, dx \cos(x\theta)\Big\}^s \,..\, (1)$$

Nun hat man aber, wenn man bis zur zweiten Potenz von θ fortschreitet,

$$2\varphi(x)\cos(x\theta) = 2\varphi(x)\Big\{1 - \frac{x^2\theta^2}{2} + \cdots\Big\}$$

$$= 2\varphi(x) - \theta^2 x^2 \varphi(x),$$

daher

$$2\int_{0}^{a}\varphi(x)\, dx \cos(x\theta) = 2\int_{0}^{a}\varphi(x)\, dx - \theta^2\int_{0}^{a} x^2\varphi(x)\, dx$$

$$= ak - a^3\theta^2 k'';$$

durch Einführung dieses Ausdruckes in (1) bei gleichzeitiger Unterdrückung des unendlich kleinen $\varphi(0)$ neben der übrigen endlichen Grösse gelangt man zu dem Ausdrucke

$$P_l = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta \cos(l\theta) \Big\{ak - a^3\theta^2 k''\Big\}^s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta \cos(l\theta) \Big\{ak\big(1 - \frac{k''}{k}a^2\theta^2\big)\Big\}^s$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta \cos(l\theta) \Big\{1 - \frac{k''}{k}a^2\theta^2\Big\}^s.$$

Zum Zwecke weiterer Umformung desselben setzen wir

$$\left\{1-\frac{k''}{k}a^2\theta^2\right\}^s=e^{-t^2},$$

woraus zunächst

$$sl\cdot\left(1-\frac{k''}{k}a^2\theta^2\right)=-t^2$$

erhalten wird; beschränkt man sich bei der Entwickelun des linksstehenden Logarithmen in eine Reihe abermals au die zweite Potenz von θ, so folgt

$$\frac{k''}{k}sa^2\theta^2=t^2,$$

woraus sich dann

$$\theta=\frac{t}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}},\qquad d\theta=\frac{dt}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}}$$

ergibt; die Grenzen des Integrals verwandeln sich bei Ein führung dieser neuen Variablen in 0 und $a\pi\sqrt{\frac{k''s}{k}}$; letzter kann also mit Rücksicht auf das sehr rasche Abnehmen de integrirten Function und den sehr gross vorausgesetzte Werth von s bis ∞ ausgedehnt werden, so dass dann

$$P_l=\frac{1}{a\pi}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\int_0^\infty dt\,e^{-t^2}\cos\left(\frac{lt}{a}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\right)$$

ist; da nun allgemein

$$\int_0^\infty dt\,e^{-t^2}\cos(mt)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{4}m^2},$$

so hat man schliesslich

$$P_l=\frac{1}{a\pi}\sqrt{\frac{k}{k''s}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{kl^2}{4a^2k''s}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{k}{k''s}}}{2a\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{kl^2}{4a^2k''s}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

oder

$$P_l=\frac{\sqrt{\frac{k}{k''s}}}{2a\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{kr^2}{4k''}},\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2')$$

wobei

$$\frac{l}{a\sqrt{s}} = r$$

genommen wurde. Der Ausdruck (2) ist mit dl, jener (2′) mit dem entsprechenden Differential, nämlich $a\,dr\sqrt{s}$ zu multipliciren.

Nachdem P_l am grössten wird für $l = 0$, so ist die Nulle der wahrscheinlichste Werth der algebraischen Summe der Fehler einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen.

Problem II (b). *Es ist die Wahrscheinlichkeit P einer zwischen $\pm l$ gelegenen algebraischen Fehlersumme bei s Beobachtungen zu suchen.*

Lösung. Will man mit der Variablen r die Rechnung aufnehmen, so multiplicire man (2′) mit $a\,dr\sqrt{s}$ und integrire hierauf innerhalb jener Grenzen von r, welche $\pm l$ entsprechen. Dadurch ergibt sich

$$P = \sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\int\limits_{-r}^{r} dr\, e^{-\frac{kr^2}{4k''}} = 2\sqrt{\frac{k}{4k''\pi}}\int\limits_{0}^{r} dr\, e^{-\frac{kr^2}{4k''}}.$$

Wird zur grösseren Vereinfachung

$$\frac{kr^2}{4k''} = t^2, \quad dr = \sqrt{\frac{4k''}{k}}\,dt$$

gesetzt und die der oberen Grenze r entsprechende Grenze von t bestimmt, so hat man schliesslich in

$$P = \sqrt{\frac{k}{k''\pi}}\int\limits_{0}^{r} dr\, e^{-\frac{kr^2}{4k''}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{t} dt\, e^{-t^2} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass die algebraische Fehlersumme von s Beobachtungen — s sehr gross vorausgesetzt — zwischen den Grenzen

$$\pm l = \pm ar\sqrt{s} = \pm 2at\sqrt{\frac{k''s}{k}} \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

enthalten ist, oder auch für die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel der Fehler zwischen

$$\pm \frac{l}{s} = \pm \frac{ar}{\sqrt{s}} = \pm 2at\sqrt{\frac{k''}{ks}}$$

eingeschlossen bleibt.

Anmerkung I. Nachdem der Formel (α) des Problems I (b) zufolge

$$\frac{k''}{k} a^2 = \frac{\sum_1^s \varepsilon_i^2}{2s},$$

also

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \sqrt{\frac{\sum_1^s \varepsilon_i^2}{2s}}$$

ist, so kann

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

auch als Wahrscheinlichkeit dafür angesehen werden, dass das arithmetische Mittel der Fehler von s Beobachtungen, die Fehler mit den ihnen eigenthümlichen Vorzeichen genommen, zwischen die Grenzen

$$\pm 2at\sqrt{\frac{k'}{ks}} = \pm \frac{t}{s}\sqrt{2\sum_1^s \varepsilon_i^2}$$

falle.

Anmerkung II. Ist x der wahre Werth einer Unbekannten, zu deren Bestimmung s Beobachtungen angestellt wurden, und sind $w_1, w_2, \cdots w_s$ die Beobachtungsresultate, so ergeben sich für die wahren Fehler die Werthe

$$x - w_1 = \varepsilon_1,$$
$$x - w_2 = \varepsilon_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x - w_s = \varepsilon_s.$$

Setzt man das arithmetische Mittel der Beobachtungsresultate

$$\frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_s}{s} = m,$$

so liefert die Summirung obiger Gleichungen und nachherige Division durch s die Beziehung

$$x - m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_s}{s},$$

deren rechte Seite bei einem sehr hohen Werthe von s dem wahren Fehlerdurchschnitt sehr nahe kommen wird; mithin ist

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit, dass $x - m$ zwischen die Grenzen

$$\pm \frac{t}{s} \sqrt{2 \sum_1^s \varepsilon_i^2}$$

fallen werde, oder dass

$$x = m \pm \frac{t}{s} \sqrt{2 \sum_1^s \varepsilon_i^2}.$$

Nun hat sich im Problem II (a) als wahrscheinlichster Werth von l, also auch von t, das mit l durch die Relation $t = \frac{l}{2a} \sqrt{\frac{k}{k'' s}}$ zusammenhängt, die Null ergeben; mithin ist der wahrscheinlichste Werth von x der Werth m oder das arithmetische Mittel der Beobachtungsresultate, derselbe Werth also, welcher für x aus der Beziehung

$$\sum_1^s \varepsilon_i^2 = \sum_1^s (x - w_i)^2 = \text{min.},$$

d. h. nach dem Princip der kleinsten Quadratsummen gefunden würde.

Uebrigens führen die obigen Gleichungen zu folgenden Schlüssen:

1) Bleibt t, also auch P constant, so ziehen sich die Grenzen von x in dem Masse zusammen, als die Anzahl s der Beobachtungen zunimmt.

2) Sollen bei wachsendem s die Grenzen $m \pm \frac{t}{s} \sqrt{2 \sum_1^s \varepsilon_i^2}$ constant bleiben, so muss auch t gleichmässig mit s zunehmen; dann aber nähert sich P beständig der Einheit.

Anmerkung III. Die Formeln (3) und (3′) können dazu dienen, um zu untersuchen, ob eine Erscheinung einer constanten Ursache zuzuschreiben ist. Im Falle nämlich constante Fehlerquellen oder constante Ursachen ausgeschlossen waren, kann man mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \sqrt{\frac{k}{\pi k''}} \int_0^r e^{-\frac{k r^2}{4 k''}} dr$$

erwarten, dass die Summe der Fehler von s Beobachtungen zwischen die Grenzen $\pm a r \sqrt{s}$ fallen, dem absoluten Werthe

nach also den Betrag $ar\sqrt{s}$ nicht überschreiten werde. Ist daher bei einem der Einheit nahen Werthe von P die algebraische Fehlersumme gleich oder gar beträchtlich grösser als $ar\sqrt{s}$, so erscheint es sehr wahrscheinlich, dass an der Erscheinung constante Ursachen mitgewirkt haben, deren Erforschung dann die nächste Aufgabe sein wird.

Bei einer derartigen Rechnung wird man dem Quotienten $\frac{k}{k'}$, den grösstmöglichen Werth unterlegen müssen, jenen Werth nämlich, welcher sich aus der Annahme constanter Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt; dem Problem I (a) zufolge ist in diesem Falle $\frac{k}{k'} = 6$.

Beispiel. In den Tropenländern haben Beobachtungen einen täglichen Gang des Barometerstandes ergeben, welcher auch in unseren Klimaten bei richtig und in grosser Zahl angestellten Beobachtungen merklich wird. Sein Verlauf besteht im Allgemeinen darin, dass der Barometerstand gegen 9 Uhr Vormittags höher ist als gegen 4 Uhr Nachmittags; von letzterer Stunde angefangen steigt er bis gegen 11 Uhr Nachts, dann fällt er bis gegen 4 Uhr Morgens, um von da an wieder dem um die neunte Vormittagsstunde eintretenden Maximum entgegenzugehen.

Es soll untersucht werden, ob diese Variation einer constanten Ursache entspringt.

Zu diesem Zwecke sei s Tage hindurch der Barometerstand gegen 9 Uhr Morgens und gegen 4 Uhr Nachmittags abgelesen worden; die Beobachtungen denken wir uns jedoch nur an solchen Tagen vorgenommen, wo die Schwankung zwischen den genannten zwei Zeitpunkten nicht über 4^{mm} hinausgegangen ist, um dem bedeutenden Einflusse störender Ursachen aus dem Wege zu gehen. Nun möge die Summe der am Morgen gemachten Ablesungen jene der anderen um den Betrag q übertreffen, so deutet diese Differenz auf eine constante Ursache hin, welche ein Steigen des Barometers gegen 9 Uhr früh und ein Sinken desselben gegen 4 Uhr Nachmittags anstrebt.

Angenommen, eine solche Ursache bestünde nicht, die Differenz q sei vielmehr eine Folge der Wirkung zufälliger

Ursachen und der Beobachtungsfehler. Alsdann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied der beobachteten Summen unter dem positiven Betrage q bleibt, nach Formel (2) ausgedrückt durch

$$P = \sqrt{\frac{k}{4k''\pi}} \int e^{-\frac{kr^2}{4k''}} dr,$$

das Integral zwischen den äussersten zulässigen Grenzen von r genommen; diese ergeben sich auf Grund der Relation

$$l = ar\sqrt{s}$$

aus den Grenzen von l, welche wieder, da der beobachtete Unterschied unter dem positiven Betrage q bleiben soll, offenbar $-\infty$ und $+q$ sind, lauten demnach $r = -\infty$ und $r = \frac{q}{a\sqrt{s}}$. a bedeutet die grösste Abweichung, welche zwischen den beobachteten Barometerständen stattfinden kann, und beträgt der Anordnung der Beobachtungen gemäss 4^{mm}. Wären die Ablesungen an 400 Tagen vorgenommen worden, und nimmt man für die tägliche Variation den Betrag von 1^{mm} an, wie dies etwa den von Ramond angestellten Beobachtungen entspricht, so wäre $q = 400^{mm}$. Führt man die Rechnung mit den Werthen

$$a = 4^{mm}, \quad q = 400^{mm}, \quad s = 400, \quad \frac{k}{k''} = 6$$

durch, so ergibt sich zunächst für die obere Grenze der Betrag

$$r = \frac{400}{4\sqrt{400}} = 5;$$

setzt man

$$\frac{kr^2}{4k''} = t^2, \quad dr = \sqrt{\frac{4k''}{k}}\, dt,$$

so verwandelt sich die obere Grenze der neuen Variablen in $t = \sqrt{\frac{6 \times 25}{4}} = \sqrt{37 \cdot 5}$, und es wird

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{37\cdot 5}} dt e^{-t^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{37\cdot 5}}^{\infty} dt e^{-t^2},$$

wofür mit Benützung der in Nr. 52 vorgeführten Entwickelung dieses Integrals mit zureichender Annäherung

$$P = 1 - \frac{e^{-37 \cdot 5}}{2\sqrt{37 \cdot 5\pi}}$$

geschrieben werden kann. Bei diesem der Einheit äusserst naheliegenden Werthe von P muss also angenommen werden, dass der beobachtete Unterschied zwischen den Summen der Morgens und Abends abgelesenen Barometerstände, wenn er aus keiner constanten Ursache herrührte, unter 400^{mm} bleiben würde; nachdem aber letzterer Betrag erreicht wird, so ist das Vorhandensein einer constanten Ursache mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen.

Problem III (a). *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Summe der bei einer sehr grossen Anzahl s von Beobachtungen begangenen Fehler, wenn man vom Vorzeichen der letzteren absieht, gleichkommt* $\omega = l + \mu s$.

Lösung. Im Problem II (a) wurde für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlersumme ω (dort l) der Ausdruck

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X e^{-\omega\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$$

gefunden, wobei

$$X = \left\{\varphi(-a)e^{-a\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(-x)e^{-x\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(0) + \cdots \right.$$
$$\left. + \varphi(x)e^{x\theta\sqrt{-1}} + \cdots + \varphi(a)e^{a\theta\sqrt{-1}}\right\}^s;$$

diese Formel gilt jedoch unter der Voraussetzung, dass die Fehler mit den ihnen zukommenden Vorzeichen in Rechnung gebracht werden; will man jedoch vom Vorzeichen absehen, sämmtliche Fehler also als positiv in Rechnung ziehen, so bedarf es nur einer Aenderung des Vorzeichens bei den negativen Fehlern, um obige Formel auf den gegenwärtigen Fall anwendbar zu machen. Unter Beachtung, dass $\varphi(-x) = \varphi(x)$, erhält man

$$X = \left\{\varphi(0) + 2\varphi(da)e^{da\theta\sqrt{-1}} + \cdots + 2\varphi(x)e^{x\theta\sqrt{-1}} + \cdots \right.$$
$$\left. + 2\varphi(a)e^{a\theta\sqrt{-1}}\right\}^s.$$

Führt man diesen Ausdruck in die Formel für P_ω ein und setzt gleichzeitig rechter Hand $\omega = l + \mu s$, so wird

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-\iota\theta\sqrt{-1}}\left\{e^{-\mu\theta\sqrt{-1}}\left[\varphi(0) + 2\varphi(da)\, e^{da\theta\sqrt{-1}} + \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\varphi(a)\, e^{a\theta\sqrt{-1}}\right]\right\}^s$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-\iota\theta\sqrt{-1}} A.$$

Nimmt man den natürlichen Logarithmus von A und entwickelt die in diesem Ausdrucke auftretenden Exponentiellen in Reihen, so wird zunächst:

$$l\cdot A = -s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\left[\varphi(0) + 2\varphi(da)\left\{1 + da\theta\sqrt{-1} - \frac{da^2}{2}\theta^2 - \cdots\right\} + \cdots\right.$$

$$+ 2\varphi(x)\left\{1 + x\theta\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2}\theta^2 - \cdots\right\} + \cdots$$

$$\left. + 2\varphi(a)\left\{1 + a\theta\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2}\theta^2 - \cdots\right\}\right]$$

$$= -s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\left[-\varphi(0) + 2\int_0^a \varphi(x)\,dx + 2\theta\sqrt{-1}\int_0^a x\varphi(x)\,dx\right.$$

$$\left. - \theta^2\int_0^a x^2\varphi(x)dx - \cdots\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Werden mit den Integralen die bekannten Transformationen ausgeführt, so ergibt sich unter Anwendung der früheren Abkürzungen

$$l\cdot A = -s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\left[ak + 2\theta\sqrt{-1}\,a^2k' - \theta^2 a^3 k'' - \cdots\right]$$

$$= -s\mu\theta\sqrt{-1} + sl\cdot\left[1 + \frac{2k'}{k}a\theta\sqrt{-1} - \frac{k''}{k}a^2\theta^2 - \cdots\right],$$

und entwickelt man den rechtstehenden Logarithmen nach Potenzen von θ, bei der zweiten stehen bleibend, so wird weiter

$$l\cdot A = -s\mu\theta\sqrt{-1} + \frac{2k'}{k}sa\theta\sqrt{-1} - \frac{k''}{k}sa^2\theta^2 + \frac{2k'^2}{k^2}sa^2\theta^2$$

$$= \left(\frac{2k'}{k}a - \mu\right)s\theta\sqrt{-1} - \frac{kk'' - 2k'^2}{k^2}sa^2\theta^2.$$

Für

$$\mu = \frac{2k'}{k}a$$

hat man

$$l \cdot A = -\frac{kk'' - 2k'^2}{k^2} s a^2 \theta^2$$

und daraus

$$A = e^{-\frac{kk'' - 2k'^2}{k^2} s a^2 \theta^2},$$

so dass nunmehr

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-l\theta\sqrt{-1} - \frac{kk'' - 2k'^2}{k^2} s a^2 \theta^2} d\theta.$$

Wird

$$\frac{k}{\sqrt{kk'' - 2k'^2}} = \beta',$$

sodann

$$\frac{a\theta\sqrt{s}}{\beta'} = t, \quad \theta = \frac{\beta'}{a\sqrt{s}} t, \quad d\theta = \frac{\beta'}{a\sqrt{s}} dt$$

gesetzt, wodurch die Grenzen $+\pi$ und $-\pi$ in $\frac{a\pi\sqrt{s}}{\beta'}$ und $-\frac{a\pi\sqrt{s}}{\beta'}$ übergehen, so erhält man

$$P_\omega = \frac{\beta'}{2a\pi\sqrt{s}} \int_{-\frac{a\pi\sqrt{s}}{\beta'}}^{\frac{a\pi\sqrt{s}}{\beta'}} dt\, e^{-\left[t + \frac{\beta' l\sqrt{-1}}{2a\sqrt{s}}\right]^2 - \frac{\beta'^2 l^2}{4a^2 s}}$$

$$= \frac{\beta'}{2a\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta'^2 l^2}{4a^2 s}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wenn die Integrationsgrenzen bis $\pm \infty$ ausgedehnt werden, was bei der Natur der Function unter dem Integralzeichen und dem sehr gross vorausgesetzten Werthe von s ohne Weiteres gestattet ist.

Für

$$\frac{l}{a\sqrt{s}} = r, \quad l = ar\sqrt{s}$$

lautet obige Formel

$$P_\omega = \frac{\beta'}{2a\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta'^2 r^2}{4}}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

der Ausdruck für P_ω muss mit dl, beziehungsweise $a\sqrt{s}\,dr$ multiplicirt werden, soll er die Wahrscheinlichkeit einer zwischen

$$\omega = l + \mu s = l + \frac{2k'}{k} sa$$

$$= ar\sqrt{s} + \frac{2k'}{k} sa$$

und dem unendlich benachbarten Werth $l + dl + \mu s$ liegenden absoluten Fehlersumme vorstellen.

Nachdem P_ω für $l = 0$ oder $r = 0$ sein Maximum erreicht, so ist der wahrscheinlichste Werth von ω

$$\mu s = \frac{2k'}{k} sa,$$

daher der wahrscheinlichste Werth von μ

$$\mu = \frac{2k'}{k} a = 2a^2k' = 2\int_0^a x\varphi(x)dx.$$

Das Product sa ist offenbar der grösstmögliche Werth der Fehlersumme, welcher eintreten würde, wenn jeder Beobachtung ein der Grenze a gleicher Fehler zukäme; der Factor $\frac{2k'}{k}$ hängt von der Natur des Fehlergesetzes ab. Nimmt man den äussersten Fall an, dass die Wahrscheinlichkeiten aller zwischen 0 und a gelegenen Fehler gleich gross sind, so ergibt sich

$$k' = \int_0^1 x' c dx' = \frac{c}{2},$$

$$k = 2\int_0^1 c dx' = 2c,$$

daher $\frac{2k'}{k} = \frac{1}{2}$ und $\mu s = \frac{1}{2} sa$, also gleich der halben grössten Fehlersumme; in jedem andern Falle, wo die Fehlerwahrscheinlichkeit mit der Fehlergrösse abnimmt, fällt $\frac{2k'}{k}$ kleiner als $\frac{1}{2}$ und daher μs kleiner als $\frac{1}{2} sa$ aus.

In dem Ausdrucke

$$\mu s = \frac{2k'}{k} as$$

bedeutet offenbar $\mu = \frac{2k'}{k} a$ jenen Fehler, welcher allen Beobachtungen anhaftend dieselbe wahrscheinlichste Fehlersumme herbeiführen würde, wie sie durch die verschiedenen Fehler hervorgebracht wird. Dem Obigen zufolge ist dieser Betrag bei constanter Fehlerwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} a$, sonst kleiner. So folgt beispielsweise unter Zugrundelegung des Fehlergesetzes $\psi(x') = c(1 - x'^2)$:

$$k' = c\int_0^1 x'(1 - x'^2)\,dx' = \frac{c}{4},$$

$$k = 2c\int_0^1 (1 - x'^2)\,dx' = \frac{4c}{3},$$

daher $\mu = \frac{3}{8} a < \frac{1}{2} a$.

Problem III (b). *Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Summe der numerischen Fehlerwerthe einer sehr grossen Anzahl s von Beobachtungen zwischen den Grenzen*

$$\frac{2k'}{k} sa \pm ar\sqrt{s}$$

enthalten ist.

Lösung. Die geforderte Wahrscheinlichkeit P ergibt sich durch Integration des Ausdruckes

$$\frac{\beta'}{2a\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{\beta'^2 r^2}{4}} \cdot a\sqrt{s}\,dr$$

innerhalb der Grenzen $\pm r$; daher ist

$$P = \frac{\beta'}{2\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{r} e^{-\frac{\beta'^2 r^2}{4}} dr$$

$$= \frac{\beta'}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-\frac{\beta'^2 r^2}{4}} dr;$$

setzt man

$$\frac{\beta' r}{2} = t, \quad dr = \frac{2}{\beta'} dt,$$

so wird

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit einer zwischen die Grenzen

$$\frac{2k'}{k} as \pm \frac{2at\sqrt{s}}{\beta'}$$

fallenden Summe der absoluten Fehlerwerthe, oder auch der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass der numerische Werth des Fehlerdurchschnitts oder der vorhin mit μ bezeichnete Werth zwischen

$$\frac{2k'}{k} a \pm \frac{2at}{\beta'\sqrt{s}}$$

enthalten ist; letztere Grenzen ziehen sich mit dem Wachsen von s bei constantem t und P immer enger zusammen und nähern sich beständig dem Betrage $\frac{2k'}{k}$ a.

2. Beobachtungen einer Function von einer Unbekannten.

Die der directen Beobachtung zugängliche Grösse w sei eine Function des Arguments X, dessen Werth bis auf einen sehr kleinen Bruch genau bekannt ist; zur Ermittelung dieser Correction sind s Beobachtungen angestellt worden, deren Resultate $w_1, w_2, \cdots w_s$ sein mögen.

Bezeichnet X_0 den Näherungswerth von X, ξ dessen unbekannte Correction, ε_i den Fehler, welcher der Beobachtung w_i anhaftet, so ist

$$w_i + \varepsilon_i = f_i(X_0 + \xi);$$

entwickelt man die rechtsstehende Function nach Potenzen von ξ und bleibt bei der ersten stehen, so wird bis auf den entsprechenden Kleinheitsgrad genau

$$w_i + \varepsilon_i = f_i(X_0) + f_i'(X_0)\,\xi,$$

woraus

$$\varepsilon_i = a_i \xi - n_i, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wenn $f_i'(X_0) = a_i$ und $w_i - f_i(X_0) = n_i$ gesetzt wird. Zu einer ähnlichen Gleichung führt jede der Beobachtungen.

Zur Erzielung eines Werthes für ξ könnte $\Sigma_1^s \varepsilon_i = 0$ genommen werden; der hieraus resultirende Werth wäre

$$\xi = \frac{\Sigma_1^s n_i}{\Sigma_1^s a_i}.$$

Statt dessen kann aber auch irgend eine andere lineare Function der Fehler ε der Nulle gleichgesetzt und auf Grund dieser Bedingung ξ ermittelt werden. Wir multipliciren zu diesem Ende Gleichung (1) mit einer ganzen, vorläufig unbestimmten Zahl h_i und bilden hierauf die Summe aller auf die Werthe $i = 1, 2, \cdots s$ bezüglichen Gleichungen; die auf solche Weise erhaltene Function der Fehler lautet

$$E = \Sigma_1^s h_i \varepsilon_i = \xi \Sigma_1^s a_i h_i - \Sigma_1^s h_i n_i \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wird nun $E = 0$ genommen, so folgt für ξ der Werth

$$\xi = \frac{\Sigma_1^s h_i n_i}{\Sigma_1^s h_i a_i} = m; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

bezeichnet u den Fehler dieser Bestimmung, so dass

$$\xi = \frac{\Sigma_1^s h_i n_i}{\Sigma_1^s h_i a_i} + u = m + u,$$

so liefert die Einführung dieses Werthes in Gleichung (2) die Beziehung

$$E = (m + u)\, \Sigma_1^s h_i a_i - \Sigma_1^s h_i n_i = u\, \Sigma_1^s h_i a_i \quad \ldots \quad (4)$$

Es soll nun die Wahrscheinlichkeit des Fehlers u unter Voraussetzung einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen ermittelt werden.

Problem I. *Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass der Werth der Function E gleich ist l.*

Lösung. Die Grenzen, innerhalb welcher der Fehler jeder einzelnen Beobachtung liegen kann, seien $\pm a$; ferner bedeute $\varphi(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit eines in dem unendlich kleinen Intervall x bis $x + dx$ gelegenen Fehlers. Vor Allem wird es sich um die generirende Function Y der verlangten Wahrscheinlichkeit handeln. Ertheilt man in der Summe

$$\varphi(-a)t^{-h_i a} + \cdots + \varphi(-da)t^{-h_i da} + \varphi(0) + \varphi(da)t^{h_i da}$$
$$+ \cdots + \varphi(a)t^{h_i a} = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx\,t^{h_i x} \;\ldots\ldots\; (5)$$

dem Zeiger i alle Werthe von 1 bis s und bildet hierauf das Product aller so entstandenen Ausdrücke, geordnet nach Potenzen von t, so stellt offenbar der Coefficient irgend eines Gliedes die Wahrscheinlichkeit vor, dass die Summe der Werthe $h_1 x$, $h_2 x \cdots h_s x$ oder die Function E den durch den Exponenten von t angedeuteten Werth erlangt; mithin ist

$$Y = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx\,t^{h_1 x} \times \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx\,t^{h_2 x} \times \cdots \times \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx\,t^{h_s x}$$
$$= \Sigma P_l t^l,$$

und P_l bedeutet die Wahrscheinlichkeit von $E = l$.

Nimmt man, was bei der Unabhängigkeit der Coefficienten P von t erlaubt ist, $t = e^{\varpi\sqrt{-1}}$, so ergibt sich

$$P_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y e^{-l\varpi\sqrt{-1}}\,d\varpi.$$

Nun ist aber mit Beachtung, dass $\varphi(-x) = \varphi(x)$ vorausgesetzt wird,

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx\,e^{h_i x\varpi\sqrt{-1}} = \int_{-a}^{0} \varphi(x)\,dx\,e^{h_i x\varpi\sqrt{-1}} + \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\,e^{h_i x\varpi\sqrt{-1}}$$
$$= \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\,e^{-h_i x\varpi\sqrt{-1}} + \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\,e^{h_i x\varpi\sqrt{-1}}$$
$$= \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\,\left\{e^{-h_i x\varpi\sqrt{-1}} + e^{h_i x\varpi\sqrt{-1}}\right\}$$
$$= 2\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\cos(h_i x\varpi),$$

daher

$$Y = 2\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\cos(h_1 x\varpi) \cdot 2\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\cos(h_2 x\varpi) \cdots$$
$$\times\, 2\int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\cos(h_s x\varpi).$$

Zum Zwecke der weiteren Entwickelung dieser Functio[n] setzen wir

$$x = ax', \quad \varphi(x) = \varphi(ax') = \psi(x'),$$

ferner, wie dies schon früher geschehen,

$$\int_0^1 x'^i \psi(x')\,dx' = k^{(i)},$$

so dass

$$\int_0^a x^i \varphi(x)\,dx = a^{i+1}\int_0^1 x'^i \psi(x')\,dx' = a^{i+1} k^{(i)}$$

wird, und beachten, dass insbesondere

$$2\int_0^a \varphi(x)\,dx = 2a\int_0^1 \psi(x')\,dx' = ak = 1$$

ist; wird hiervon bei der Entwickelung der Integrale, al[s] deren Product Y erscheint, Gebrauch gemacht, so ergibt sic[h] nach und nach

$$\int_0^a \varphi(x) dx \cos(h_i x\varpi) = \int_0^a \varphi(x) dx \left\{1 - \frac{(h_i x \varpi)^2}{2} + \frac{(h_i x\varpi)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\right\}$$

$$= \int_0^a \varphi(x)\,dx - \frac{h_i^2\varpi^2}{2}\int_0^a x^2 \varphi(x)\,dx + \frac{h_i^4\varpi^4}{24}\int_0^a x^4 \varphi(x)\,dx - \cdots$$

$$= \tfrac{1}{2}\,ak - \frac{h_i^2\varpi^2}{2}\,a^3 k'' + \frac{h_i^4\varpi^4}{24}\,a^5 k^{IV} - \cdots,$$

$$2\int_0^a \varphi(x) dx \cos(h_i x\varpi) = ak\left\{1 - h_i^2\varpi^2\,\frac{a^2 k''}{k} + \frac{h_i^4\varpi^4}{12}\,\frac{a^4 k^{IV}}{k} - \cdots\right\}$$

$$= 1 - \frac{k''}{k}\,h_i^2 a^2\varpi^2 + \frac{k^{IV}}{12k}\,h_i^4 a^4\varpi^4 - \cdots,$$

$$l\cdot\left[2\int_0^a \varphi(x)\,dx\,\cos(h_i x\varpi)\right] = -\frac{k''}{k}\,h_i^2 a^2\varpi^2 + \frac{k^{IV}}{12k}\,h_i^4 a^4\,\varpi^4$$

$$- \frac{k''^2}{2k^2}\,h_i^4 a^4\varpi^4 - \cdots$$

$$= -\frac{k''}{k}\,h_i^2 a^2\varpi^2 + \frac{k k^{IV} - 6k''^2}{12k^2}\,h_i^4 a^4\varpi^4 - \cdots$$

Mithin ist

$$l \cdot Y = \Sigma_1^s l \cdot \left[2\int_0^a \varphi(x)\, dx \cos(h_i x \varpi)\right]$$

$$= -\frac{k''}{k} a^2 \varpi^2 \Sigma h_i^2 + \frac{kk^{IV} - 6k''^2}{12k^2} a^4 \varpi^4 \Sigma h_i^4 - \cdots,$$

woraus durch Uebergang zu den Zahlen

$$Y = e^{-\frac{k''}{k} a^2 \varpi^2 \Sigma h_i^2} \cdot e^{\frac{kk^{IV} - 6k''^2}{12k^2} a^4 \varpi^4 \Sigma h_i^4}$$

$$= e^{-\frac{k''}{k} a^2 \varpi^2 \Sigma h_i^2} \left\{1 + \frac{kk^{IV} - 6k''^2}{12k^2} a^4 \varpi^4 \Sigma h_i^4 - \cdots\right\}$$

erhalten wird, so dass nunmehr

$$P_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varpi\, e^{-l\varpi\sqrt{-1} - \frac{k''}{k} a^2 \varpi^2 \Sigma h_i^2} \left\{1 + \frac{kk^{IV} - 6k''^2}{12k^2} a^4 \varpi^4 \Sigma h_i^4 - \cdots\right\},$$

oder, wenn man $t = \varpi a\sqrt{s}$ setzt,

$$P_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi a\sqrt{s}}^{\pi a\sqrt{s}} \frac{dt}{a\sqrt{s}} e^{-\left[\frac{k''}{k}\frac{\Sigma h_i^2}{s} t^2 + \frac{l\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} t\right]} \left\{1 + \frac{kk^{IV} - 6k''^2}{12k^2} \frac{\Sigma h_i^4}{s^2} t^4 - \cdots\right\}.$$

Die Summen Σh_i^2, Σh_i^4, $\cdots$ sind offenbar von der Grössenordnung s, daher der Quotient $\frac{\Sigma h_i^4}{s^2}$ von der Ordnung $\frac{1}{s}$, welche, nachdem s als sehr gross vorausgesetzt wird, bereits vernachlässigt werden soll. Nachdem ferner der Exponent von e für die Integrationsgrenzen sehr gross, die Function unter dem Integralzeichen also sehr klein ausfällt, so kann man die Grenzen bis $\pm \infty$ ausdehnen und erhält

$$P_l = \frac{1}{2\pi a\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\left[\frac{k''}{k}\frac{\Sigma h_i^2}{s} t^2 + \frac{l\sqrt{-1}}{a\sqrt{s}} t\right]}$$

$$= \frac{1}{2\pi a\sqrt{s}} e^{-\frac{kl^2}{4a^2 k'' \Sigma h_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\frac{k'' \Sigma h_i^2}{ks}\left[t + \frac{l\sqrt{-1}}{2a}\frac{k}{k''}\frac{\sqrt{s}}{\Sigma h_i^2}\right]^2}.$$

Indem noch zur Kürze

$$\sqrt{\frac{k'' \Sigma h_i^2}{ks}} \left[t + \frac{lk\sqrt{s} \cdot \sqrt{-1}}{2ak'' \Sigma h_i^2} \right] = v$$

gesetzt wird, ergibt sich, da das Integral den Werth $\sqrt{\pi}$ annimmt,

$$P_l = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k} \Sigma h_i^2}} e^{-\frac{kl^2}{4a^2 k'' \Sigma h_i^2}} dl \quad \ldots\ldots \text{(a)}$$

als Wahrscheinlichkeit, dass die Summe $E = \Sigma h_i \varepsilon_i$ zwischen die Grenzen l und $l + dl$ fällt.

Dem Maximum von P_l entspricht der Werth $l = 0$.

Problem II. *Es ist die Wahrscheinlichkeit P zu suchen, dass der Werth von E zwischen* $\pm l$ *enthalten ist.*

Lösung. Durch Integration obiger Formel innerhalb der Grenzen $\pm l$ folgt unmittelbar

$$P = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k} \Sigma h_i^2}} \int_{-l}^{l} dl\, e^{-\frac{kl^2}{4a^2 k'' \Sigma h_i^2}};$$

setzt man $l = ar\sqrt{s}$, so ergibt sich weiter

$$P = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{k''}{k} \Sigma h_i^2}} \int_{0}^{r} dr\, e^{-\frac{kr^2 s}{4k'' \Sigma h_i^2}} \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

als Wahrscheinlichkeit eines zwischen den Grenzen $\pm ar\sqrt{s}$ gelegenen Werthes von E.

Problem III. *Es ist die Wahrscheinlichkeit* P'_u *eines Fehlers u in der Bestimmung*

$$\xi = \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i} = m$$

und in zweiter Reihe die Wahrscheinlichkeit P′ zu rechnen, dass der Fehler dieser Bestimmung von ξ *zwischen den Grenzen* $\pm u$ *enthalten ist.*

Lösung. Durch Formel (a) ist die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, dass

$$E = l$$

ist, oder, wenn man die Relation (4) beachtet, dass

$$l = u \Sigma h_i a_i; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

mithin drückt Formel (a) auch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers

$$u = \frac{l}{\Sigma h_i a_i}$$

in der Bestimmung $\xi = m$ aus. Führt man in der eben citirten Formel die Substitution (α) durch, so hat man auch

$$P'_u = \frac{\Sigma h_i a_i}{2a\sqrt{\frac{k''}{k}\pi \Sigma h_i^2}} e^{-\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4a^2 k'' \Sigma h_i^2} u^2} du \quad \ldots . \text{(c)}$$

als Wahrscheinlichkeit eines zwischen u und $u + du$ liegenden Fehlers in $\xi = m$.

Ebenso ist die zweite Frage im Vorigen bereits gelöst; durch die Formel (b) ist nämlich die Wahrscheinlichkeit der Grenzen

$$\pm ar\sqrt{s}$$

von E gegeben, mithin, wenn man wieder Gleichung (4) beachtet, auch die Wahrscheinlichkeit der Grenzen

$$\pm \frac{ar\sqrt{s}}{\Sigma h_i a_i}$$

von u. Die verlangte Wahrscheinlichkeit P' ergibt sich demnach entweder aus der Formel (b), wenn man darin die Substitution

$$u = \frac{ar\sqrt{s}}{\Sigma h_i a_i}, \quad r = \frac{u \Sigma h_i a_i}{a\sqrt{s}}$$

durchführt, oder direct, wenn man Formel (c) innerhalb der Grenzen $\pm u$ integrirt; mithin hat man

$$P' = \frac{\Sigma h_i a_i}{a\sqrt{\frac{k''}{k}\pi \Sigma h_i^2}} \int_0^u du e^{-\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4a^2 k'' \Sigma h_i^2} u^2} \quad \ldots . . \text{(d)}$$

für die Wahrscheinlichkeit eines zwischen $\pm u$ liegenden Fehlers in der Bestimmung $\xi = m$.

Setzt man zum Zwecke weiterer Vereinfachung

$$\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4a^2 k'' \Sigma h_i^2} u^2 = t^2,$$

woraus

$$u = \frac{2a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}\,t$$

und $t = 0$ für $u = 0$ gefolgert wird, so ergibt sich

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t dt e^{-t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{d}')$$

als Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler von $\xi = \frac{\Sigma h_i n_i}{\Sigma h_i a_i}$ zwischen die Grenzen

$$\pm \frac{2a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}\,t = \pm u$$

fällt.

Die nähere Betrachtung der gewonnenen Formeln führt zu folgenden Schlüssen:

1) Bleibt t, also auch P' constant, so zieht sich das Intervall $\pm u$ um so enger zusammen, je kleiner

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

wird.

2) Wächst t und damit auch P', so muss, soll das Intervall sich nicht ändern, der Ausdruck

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}$$

in demselben Verhältnisse abnehmen, als t zunimmt.

Während also das Fehlerintervall dasselbe bleibt, wird die Wahrscheinlichkeit P', dass u innerhalb derselben enthalten ist, um so grösser, je kleiner

$$\frac{a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i};$$

das vortheilhafteste System der Factoren h_i ist demnach dasjenige, welches der Forderung

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}}\,\frac{\sqrt{\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i} = \text{min.} \qquad \text{(f)}$$

Genüge leistet.

Zu dem gleichen Resultate gelangt man aber auch, indem man die Forderung nach dem kleinsten mittleren Fehler (in Laplace's Sinne) aufstellt. Der Ausdruck für den numerischen Werth dieses Fehlers ist

$$\Theta = \int_0^\infty u\varphi(u)\,du;$$

ersetzt man hierin $\varphi(u)\,du$ durch seinen in Gleichung (c) gegebenen Werth

$$\varphi(u)\,du = -\frac{\Sigma h_i a_i}{2a\sqrt{\frac{k''}{k}\pi\Sigma h_i^2}}\,e^{-\frac{k(\Sigma h_i a_i)^2}{4k''a^2\Sigma h_i^2}u^2}\,du$$

und nimmt für den Augenblick

$$H = \frac{\Sigma h_i a_i}{2a\sqrt{\frac{k''}{k}\Sigma h_i^2}},$$

so wird

$$\Theta = \frac{H}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u e^{-H^2u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2H\sqrt{\pi}}\int_\infty^0 e^{-H^2u^2}\,d(-H^2u^2)$$

$$= \frac{1}{2H\sqrt{\pi}},$$

und nach Restitution des Werthes für H

$$\Theta = a\sqrt{\frac{k''}{k\pi}}\,\frac{\sqrt{\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}.$$

Will man also das Coefficientensystem so wählen, dass Θ ein Minimum werde, so führt dies zu der nämlichen Bedingung, wie sie oben in (f) gefunden worden.

Nachdem der Factor $a\sqrt{\frac{k''}{k}}$ in (f) lediglich von der Natur des Fehlergesetzes abhängt, mithin für alle Systeme

der Coefficienten h derselbe bleibt, so ist nur der andere,

$$\frac{\sqrt{\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i},$$

zu einem Minimum zu machen und dies erfordert bei der Unabhängigkeit der einzelnen h von einander, dass allgemein

$$\frac{\partial \frac{\sqrt{\Sigma h_i^2}}{\Sigma h_i a_i}}{\partial h_i} = 0$$

werde; durch Ausführung dieser Operation ergibt sich für h_i der Werth

$$h_i = \frac{\Sigma h_i^2}{\Sigma h_i a_i} a_i = \mu a_i,$$

wenn man den von i unabhängigen, daher constanten Factor $\frac{\Sigma h_i^2}{\Sigma h_i a_i}$ gleich μ setzt. Aus der Form von h_i ist nun sogleich zu erkennen, dass durch entsprechende Wahl von μ — da es hier nur auf Verhältnisse ankommt — für h_1, h_2, ... immer ganze Zahlen erzielt werden können.

Dem gefundenen Coefficientensystem entspricht als vortheilhaftester Werth der gesuchten Correction

$$\xi = \frac{\Sigma \mu a_i n_i}{\Sigma \mu a_i^2} = \frac{\Sigma a_i n_i}{\Sigma a_i^2} = m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

und der mittlere Fehler dieser Bestimmung ist

$$\Theta = a \sqrt{\frac{k''}{k\pi}} \frac{\sqrt{\Sigma \mu^2 a_i^2}}{\Sigma \mu a_i^2} = \frac{a \sqrt{\frac{k''}{k\pi}}}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}.$$

Das Resultat (g) ist dasselbe, welches die Methode der kleinsten Quadrate liefert, d. h. welches sich aus der Bedingung

$$\Sigma \varepsilon_i^2 = \Sigma (a_i \xi - n_i)^2 = \text{min.}$$

ergibt; denn setzt man, in Ausführung dieser Bedingung, den nach ξ genommenen Differentialquotienten der Nulle gleich, so ergibt sich

$$\Sigma a_i (a_i \xi - n_i) = 0,$$
$$\xi \, \Sigma a_i^2 - \Sigma a_i n_i = 0,$$
$$\xi = \frac{\Sigma a_i n_i}{\Sigma a_i^2} = m$$

wie oben.

Führt man in dem Gleichungssystem, welches aus der Gleichung (1) fliesst, wenn man darin der Reihe nach $i = 1, 2, \cdots s$ nimmt, an Stelle von ξ den eben gefundenen Werth m ein, so ergeben sich an Stelle der wahren die von dem vortheilhaftesten Werthe der Unbekannten zurückgelassenen Fehler

$$\lambda_1 = a_1 m - n_1, \quad \lambda_2 = a_2 m - n_2, \cdots \lambda_s = a_s m - n_s;$$

doch kann man, da s sehr gross vorausgesetzt wird, für $\Sigma \varepsilon_i^2$ die Summe $\Sigma \lambda_i^2$ setzen. Im Problem I (a) wurde nun für den wahrscheinlichsten Werth der Fehlerquadratsumme der Ausdruck $\frac{2k''}{k} sa^2$ gefunden; identificirt man denselben, was wieder mit Rücksicht auf den hohen Werth von s erlaubt sein wird, mit $\Sigma \lambda_i^2$, so folgt

$$a\sqrt{\frac{k''}{k}} = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sqrt{\Sigma \lambda_i^2};$$

Formel (d'):

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

drückt mithin die Wahrscheinlichkeit aus, dass

$$\xi = m \pm \frac{2at\sqrt{\frac{k''}{k}}}{\sqrt{\Sigma a_i^2}}$$

$$= m \pm \frac{t}{\sqrt{s \Sigma a_i^2}} \sqrt{2 \Sigma \lambda_i^2}:$$

Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit für die Fehlergrenze

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2s\pi}} \sqrt{\frac{\Sigma \lambda_i^2}{\Sigma a_i^2}}$$

oder für

$$\xi = m \pm \Theta = m \pm \frac{1}{\sqrt{2s\pi}} \sqrt{\frac{\Sigma \lambda_i^2}{\Sigma a_i^2}},$$

nachdem in diesem Falle aus der Gleichung

$$\Theta = u \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{2s\pi}} \sqrt{\frac{\Sigma \lambda_i^2}{\Sigma a_i^2}} = \frac{2}{\sqrt{2s}} \sqrt{\frac{\Sigma \lambda_i^2}{\Sigma a_i^2}}\, t$$

für t der besondere Werth

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0{\cdot}28209$$

folgt,

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}} dt e^{-t^2} = 0{\cdot}31005.$$

Zusatz. Um auf directe Beobachtungen einer Unbekannten als einen speciellen Fall des hier behandelten allgemeineren Falles zu übergehen, braucht nur

$$f(X) = X = \xi$$

gesetzt zu werden; es ist sodann $X_0 = 0$, $f_i'(X_0) = a_i = 1$, $f_i(X_0) = X_0 = 0$, folglich $n_i = w_i$; ferner wird $\Sigma a_i^2 = s$; demzufolge ist der vortheilhafteste Werth der Unbekannten

$$\xi = \frac{\Sigma a_i n_i}{\Sigma a_i^2} = \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_s}{s} = m,$$

und es stellt

$$P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit vor, dass der wahre Werth der Unbekannten zwischen die Grenzen

$$\xi = \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_s}{s} \pm \frac{t}{s} \sqrt{2 \Sigma \lambda_i^2}$$

$$= \frac{\Sigma w_i}{s} \pm \frac{t}{s} \sqrt{2 \Sigma (m - w_i)^2}$$

zu liegen kommt.

Anmerkung. Nachdem

$$\Sigma \lambda_i^2 = \Sigma (a_i m - n_i)^2 = \Sigma \left(a_i \frac{\Sigma a_i n_i}{\Sigma a_i^2} - n_i\right)^2$$

$$= \Sigma \left\{ \frac{a_i \Sigma a_i n_i - n_i \Sigma a_i^2}{\Sigma a_i^2} \right\}^2$$

$$= \frac{\Sigma a_i^2 \Sigma n_i^2 - (\Sigma a_i n_i)^2}{\Sigma a_i^2},$$

so drückt $P' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt e^{-t^2}$ auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass

$$\xi = m \pm \frac{t}{\sqrt{s}} \frac{\sqrt{2\{\Sigma a_i^2 \Sigma n_i^2 - (\Sigma a_i n_i)^2\}}}{\Sigma a_i^2}$$

die Grenzen sind, zwischen welchen der wahre Werth der Unbekannten enthalten ist.

II.

Fehlertheorie nach Bienaymé*).

Vorbemerkung. Die Fehlertheorie Bienaymé's ist als eine Ergänzung der Theorien von Gauss und Laplace anzusehen. Die beiden genannten Geometer haben nämlich für den Fall der Bestimmung mehrerer Unbekannten, aus vermittelnden Beobachtungen nur Regeln angegeben, nach welchen man die Fehlergrenzen jeder einzelnen Unbekannten, für sich betrachtet, und deren Wahrscheinlichkeit zu berechnen im Stande ist.

Hierin erblickt nun Bienaymé einen wesentlichen Mangel. Nach einem der Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nämlich die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens einer Anzahl unabhängiger Ereignisse gleich dem Producte ihrer einfachen Wahrscheinlichkeiten, so zwar, dass die Wahrscheinlichkeit der Coëxistenz mehrerer Ereignisse geringer ist als die eines jeden einzelnen für sich betrachtet, und um so kleiner, je zahlreicher die einfachen Ereignisse sind.

In gleicher Weise verhält es sich mit den Fehlern der unabhängigen Unbekannten bei vermittelnden Beobachtungen: die Wahrscheinlichkeit, dass sie insgesammt beständig innerhalb bestimmter Grenzen bleiben, kann nur das Product der Wahrscheinlichkeiten sein, dass der Fehler jeder einzelnen innerhalb der ihm eigenthümlichen Grenzen verbleibt; mithin muss die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser

*) J. Liouville's „Journal des Mathématiques pures et appliquées", Band XVII., 1852, pag. 33 u. ff.

innerhalb gegebener Grenzen liegenden Fehler beträchtlich geringer sein als die eines jeden einzelnen, wenn man ihn für sich, ohne Rücksicht auf die übrigen, betrachtet.

Bedenkt man, dass mit dem Erweitern der Fehlergrenzen die Wahrscheinlichkeit derselben wächst, und umgekehrt, so wird, wenn man dem Zusammentreffen der Fehlergrenzen sämmtlicher Unbekannten dieselbe Wahrscheinlichkeit wird verleihen wollen, wie sie bei der einzelnen Unbekannten, ohne Rücksicht auf die übrigen, verlangt wurde, eine ganz beträchtliche Ausdehnung der den einzelnen Unbekannten zukommenden Fehlergrenzen nothwendig werden; wird man hingegen bei den Fehlergrenzen bleiben wollen, die man für die einzelne Unbekannte einmal angenommen hat, so wird sich für die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens nur ein geringer Betrag ergeben.

Es führt daher zu Täuschungen über den Grad der Wahrscheinlichkeit, wenn man jede Unbekannte eines Systems so behandelt, als ob sie für sich bestände, statt die Unbekannten, die in der Wirklichkeit doch nicht getrennt werden können, in ihrer Zusammengehörigkeit zu betrachten. Die der letzteren Auffassung geltenden Formeln abzuleiten, ist nun Aufgabe der folgenden Entwickelungen.

Der Fall einer Unbekannten würde eigentlich dem Wesen nach nicht hieher gehören; doch soll auch auf diesen der Betrachtungsgang Bienaymé's angewendet werden; das hier erzielte Resultat wird selbstverständlich mit dem anderer Geometer übereinstimmen.

Noch mag erwähnt werden, dass sich Bienaymé in den übrigen Stücken an die Theorie von Laplace anlehnt.

1. Vermittelnde Beobachtungen einer Unbekannten.

Es sei X die Unbekannte, $f(X)$ die durch eine sehr grosse Anzahl n von Beobachtungen gegebene Function derselben; die Beobachtungsresultate mögen mit $o_1, o_2, \cdots o_n$ bezeichnet werden. Wir setzen ferner voraus, dass ein sehr genäherter Werth von X — er heisse X_0 — bekannt ist, um dessen sehr kleine Correction x es sich handelt.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ die Beobachtungsfehler, so führt beispielsweise die Beobachtungs o_h zu der Gleichung

$$o_h + \varepsilon_h = f_h(X_0 + x) = a_h x + \alpha_h,$$

jede andere zu einer ähnlichen Gleichung; bei der rechter Hand vorgenommenen Entwickelung der Function wurden Glieder mit höheren Potenzen von x vernachlässigt. Setzt man

$$o_h - \alpha_h = n_h, \quad n_h + \varepsilon_h = \omega_h,$$

so übergeht obige Gleichung in

$$\omega_h = a_h x. \qquad (1)$$

Werden nun die Gleichungen des Systems (1) mit vorläufig unbestimmt gelassenen Coefficienten k_h multiplicirt und sodann addirt, so ergibt sich die neue, alle Beobachtungen umfassende Gleichung

$$S\omega_h k_h = x\, S a_h k_h;$$

durch die Annahme

$$S a_h k_h = 1$$

erhält man für x den Ausdruck

$$x = S\omega_h k_h = S(n_h + \varepsilon_h)k_h$$
$$= S n_h k_h + S\varepsilon_h k_h;$$

würde nun für x der Werth

$$x' = S n_h k_h$$

genommen werden, so hätte dies, wie man augenblicklich erkennt, einen Fehler

$$r = S\varepsilon_h k_h$$

zur Folge. Will man dagegen die Coefficienten k_h der Bedingung $S a_h k_h = 1$ nicht anpassen, dann wird

$$x = \frac{S\omega_h k_h}{S a_h k_h},$$

$$x' = \frac{S n_h k_h}{S a_h k_h},$$

$$r = \frac{S\varepsilon_h k_h}{S a_h k_h}.$$

Wie später gezeigt werden wird, ist $k_h = a_h$ das vortheilhafteste System der Factoren, dasjenige zugleich, welches dem Princip der kleinsten Quadratsummen entspringt; für dasselbe ergibt sich

$$x = \frac{S\omega_h a_h}{S a_h^2},$$

$$x' = \frac{S n_h a_h}{S a_h^2},$$

$$r = \frac{S \varepsilon_h a_h}{S a_h^2}.$$

Problem I. *Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers r zu berechnen.*

Lösung. Bezeichnet $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$, so bedeutet offenbar in der Entwickelung des Productes

$$P = \int \varphi(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 k_1 \alpha \sqrt{-1}} \int \varphi(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 e^{\varepsilon_2 k_2 \alpha \sqrt{-1}} \ldots \int \varphi(\varepsilon_n) d\varepsilon_n e^{\varepsilon_n k_n \alpha \sqrt{-1}}$$

$$= \Sigma U e^{u\alpha\sqrt{-1}},$$

in welchem die sämmtlichen Integrale zwischen den äussersten Grenzen der ε zu nehmen sind, der Coefficient U die Wahrscheinlichkeit, dass

$$S\varepsilon_h k_h = r = u$$

ist, also die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in der Bestimmung $x' = S n_h k_h$ den besonderen Werth u annimmt. Ersetzt man in Folge dessen U durch die Charakteristik $\Psi(u) du$ und verwandelt gleichzeitig das Summenzeichen in ein Integralzeichen, versehen mit jenen Grenzen, innerhalb welcher sich $S\varepsilon_h k_h$ bewegen kann, so nimmt obige Gleichung folgende Gestalt an:

$$P = \int \Psi(u) du e^{u\alpha\sqrt{-1}}.$$

Durch Multiplication mit $e^{-r\alpha\sqrt{-1}} d\alpha$ und darauffolgende Integration zwischen $\pm\infty$ wird*)

*) Siehe Note V. am Ende des Buches.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P d\alpha\, e^{-r\alpha\sqrt{-1}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-r\alpha\sqrt{-1}} \int \Psi(u) du\, e^{u\alpha\sqrt{-1}} = 2\pi\, \Psi(r),$$

woraus dann

$$\Psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P d\alpha\, e^{-r\alpha\sqrt{-1}}$$

folgt; $\Psi(r)dr$ bedeutet nun die Wahrscheinlichkeit eines zwischen r und $r + dr$ belegenen Fehlers in x'.

Nach Unterdrückung der Indices bei den ε, welche oben ohnehin nur zur grösseren Klarheit geführt wurden, schreibt sich jetzt

$$\Psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-r\alpha\sqrt{-1}} \prod_{1}^{n}{}_h \left\{ \int \varphi(\varepsilon) d\varepsilon\, e^{\varepsilon k_h \alpha \sqrt{-1}} \right\},$$

das Integral unter dem Zeichen Π zwischen den äussersten Fehlergrenzen genommen, die wir im Folgenden nicht besonders hervorheben werden.

Allgemein ist

$$\int \varphi(\varepsilon) d\varepsilon\, e^{\varepsilon k_h \alpha \sqrt{-1}} = \int \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon k_h \alpha \sqrt{-1} - \varepsilon^2 \frac{k_h^2 \alpha^2}{2} \right.$$

$$\left. - \varepsilon^3 \frac{k_h^3 \alpha^3}{6} \sqrt{-1} + \varepsilon^4 \frac{k_h^4 \alpha^4}{24} - \cdots \right\}$$

$$= 1 + \mu_1 \alpha k_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2}{2} \alpha^2 k_h^2 - \frac{\mu_3}{6} \alpha^3 k_h^3 \sqrt{-1} + \frac{\mu_4}{24} \alpha^4 k_h^4 - \cdots$$

$$= 1 + z = e^{\tau},$$

wenn

$$\int \varepsilon^{\beta} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \mu_{\beta}$$

gesetzt und beachtet wird, dass

$$\int \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \mu_0 = 1$$

ist; ferner ergibt sich für die neu eingeführte Grösse τ, wenn man bei der vierten Potenz von α stehen bleibt, der Ausdruck

$$r = l\cdot(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$= \mu_1 \alpha k_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2}{2}\alpha^2 k_h^2 - \frac{\mu_3}{6}\alpha^3 k_h^3 \sqrt{-1} + \frac{\mu_4}{24}\alpha^4 k_h^4 + \cdots$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{2}\alpha^2 k_h^2 + \frac{\mu_1\mu_2}{2}\alpha^3 k_h^3 \sqrt{-1} - \frac{\mu_2^2}{8}\alpha^4 k_h^4 + \cdots$$

$$- \frac{\mu_1^3}{3}\alpha^3 k_h^3 \sqrt{-1} - \frac{\mu_1\mu_3}{6}\alpha^4 k_h^4 + \cdots$$

$$+ \frac{\mu_1^2\mu_2}{2}\alpha^4 k_h^4 + \cdots$$

$$- \frac{\mu_1^4}{4}\alpha^4 k_h^4 + \cdots$$

$$= \mu_1 \alpha k_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\alpha^2 k_h^2 - (\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3)\frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\sqrt{-1}$$

$$+ (\mu_4 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4)\frac{\alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots$$

$$= \mu_1 \alpha k_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\alpha^2 k_h^2 - M_3 \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\sqrt{-1} + M_4 \frac{\alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots$$

Demzufolge hat man jetzt

$$\int \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon\, e^{\varepsilon k_h \alpha \sqrt{-1}} = e^{\mu_1 \alpha k_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\alpha^2 k_h^2 - M_3 \frac{\alpha^3 k_h^3}{6}\sqrt{-1} + M_4 \frac{\alpha^4 k_h^4}{24} + \cdots},$$

woraus

$$\Pi_h^n{}_1 \left\{ \int \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon\, e^{\varepsilon k_h \alpha \sqrt{-1}} \right\} = e^{\mu_1 \alpha \sqrt{-1}\, S k_h - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\alpha^2 S k_h^2 - M_3 \frac{\alpha^3}{6}\sqrt{-1}\, S k_h^3 + M_4 \frac{\alpha^4}{24} S k_h^4}$$

und

$$\Psi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-r\alpha\sqrt{-1}}\, e^{\mu_1 \alpha \sqrt{-1}\, S k_h - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\alpha^2 S k_h^2 - M_3 \frac{\alpha^3}{6}\sqrt{-1}\, S k_h^3 + M_4 \frac{\alpha^4}{24} S k_h^4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, e^{-(r - \mu_1 S k_h)\alpha\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}\alpha^2 S k_h^2} \left(1 - M_3 \frac{\alpha^3}{6}\sqrt{-1}\, S k_h^3 + M_4 \frac{\alpha^4}{24} S k_h^4\right)$$

sich ergibt.

An Stelle von r und α mögen nun die neuen Variablen ϱ und z auf Grund folgender Relationen eingeführt werden:

$$r - \mu_1 S k_h = \varrho\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}, \qquad dr = d\varrho\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)},$$

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}}, \qquad d\alpha = \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}};$$

dadurch wird

$$\Psi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}}\, e^{-2\varrho z\sqrt{-1}-z^2 S k_h^2}\, Q,$$

wenn man zur Abkürzung

$$Q = 1 - M_3\frac{\alpha^3}{6}\sqrt{-1}\, S k_h^3 + M_4\frac{\alpha^4}{24}\, S k_h^4$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\,\frac{M_3 z^3 S k_h^3}{\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)\right\}}^3} + \frac{1}{24}\,\frac{M_4 z^4 S k_h^4}{\frac{1}{4}(\mu_2-\mu_1^2)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\, N_3 z^3 + \frac{1}{24}\, N_4 z^4$$

schreibt.

Problem II. *Die Wahrscheinlichkeit p gegebener Grenzen des Fehlers r zu suchen.*

Lösung. Nach bekannten Begriffen ist

$$p = \int \Psi(r)\, dr$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d\varrho \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-2\varrho z\sqrt{-1}-z^2 S k_h^2}\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\, N_3 z^3 + \frac{1}{24} N_4 z^4\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d\varrho\, e^{-\frac{\varrho^2}{S k_h^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-S k_h^2\left[z+\frac{\varrho\sqrt{-1}}{S k_h^2}\right]^2}\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\, N_3 z^3 + \frac{1}{24} N_4 z^4\right),$$

das neu eintretende Integral zwischen den den verlangten Grenzen von r entsprechenden Grenzen von ϱ genommen. Setzt man nun

$$\frac{\varrho^2}{S k_h^2} = t^2, \qquad S k_h^2\left[z + \frac{\varrho\sqrt{-1}}{S k_h^2}\right]^2 = \beta^2,$$

so folgt

$$\varrho = t\sqrt{S k_h^2}, \qquad z = \frac{\beta - t\sqrt{-1}}{\sqrt{S k_h^2}};$$

bei der Darstellung des letzten Factors unter dem Integralzeichen als Function der neuen Variablen t und β wird man sich bei der Symmetrie der Integrationsgrenzen, welche sich auf β beziehen und wieder $\pm\infty$ sind, auf die geraden Potenzen der letztgenannten Variablen beschränken; dadurch

erhält man für $1 - \frac{1}{6}\sqrt{-1}\,N_3 z^3 + \frac{1}{24}N_4 z^4$ den abgekürzten Ausdruck

$$1 - \frac{1}{6}\left(\frac{3N_3}{(\sqrt{Sk_h^2})^3}\beta^2 t - \frac{N_3}{(\sqrt{Sk_h^2})^3}t^3\right)$$
$$+ \frac{1}{24}\left(\frac{N_4}{(\sqrt{Sk_h^2})^4}\beta^4 - \frac{6N_4}{(\sqrt{Sk_h^2})^4}\beta^2 t^2 + \frac{N_4}{(\sqrt{Sk_h^2})^4}t^4\right),$$

und mit Benützung der Substitutionen

$$\frac{3N_3}{(\sqrt{Sk_h^2})^3} = L_1\,, \qquad \frac{N_3}{(\sqrt{Sk_h^2})^3} = L_2\,,$$
$$\frac{N_4}{(\sqrt{Sk_h^2})^4} = G_1\,, \qquad \frac{6N_4}{(\sqrt{Sk_h^2})^4} = G_2$$

wird jetzt

$$p = \frac{1}{\pi}\int dte^{-t^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{-\beta^2}\left\{1 - \frac{1}{6}(L_1\beta^2 t - L_2 t^3) + \frac{1}{24}(G_1\beta^4 - G_2\beta^2 t^2 + G_1 t^4)\right\}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int dte^{-t^2}\left\{\sqrt{\pi} - \frac{1}{6}\left(L_1 t\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2 d\beta e^{-\beta^2} - L_2 t^3\int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{-\beta^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\left(G_1\int_{-\infty}^{\infty}\beta^4 d\beta e^{-\beta^2} - G_2 t^2\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2 d\beta e^{-\beta^2} + G_1 t^4\int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{-\beta^2}\right)\right\};$$

da nun

$$\int_{-\infty}^{\infty}\beta^{2i} d\beta e^{-\beta^2} = \frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi},$$

so ergibt sich schliesslich

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int dte^{-t^2}\left\{1 - \frac{1}{6}\left(L_1\frac{t}{2} - L_2 t^3\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}G_1 - G_2\frac{t^2}{2} + G_1 t^4\right)\right\}.$$

Entsprechen den Grenzen der ursprünglichen Variablen r die Grenzen $\pm\gamma$ der neuen Variablen t, so verschwinden bei Ausführung dieser Integration die Glieder mit ungeraden Potenzen von t und es wird

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma dt e^{-t^2} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2} G_1 - G_2 \frac{t^2}{2} + G_1 t^4 \right) \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma dt e^{-t^2} \left\{ 1 + \frac{1}{24} \frac{M_4}{\frac{1}{4}(\mu_2 - \mu_1^2)} \frac{Sk_h^4}{(Sk_h^2)^2} \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2} - 3t^2 + t^4 \right) \right\}.$$

Nun ist Sk_h^4 von der Ordnung n, $(Sk_h^2)^2$ von der Ordnung n^2, der Bruch $\frac{Sk_h^4}{(Sk_h^2)^2}$ daher eine Grösse von der Kleinheitsordnung $\frac{1}{n}$, welche bereits vernachlässigt werden soll; damit wird

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma dt e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass

$$-\gamma < t < \gamma,$$

oder, auf die ursprüngliche Variable r zurückgehend, dass

$$-\gamma < \frac{\varrho}{\sqrt{Sk_h^2}} < \gamma,$$

$$-\gamma \sqrt{Sk_h^2} < \varrho < \gamma \sqrt{Sk_h^2},$$

$$-\gamma \sqrt{Sk_h^2} < \frac{r - \mu_1 Sk_h}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}} < \gamma \sqrt{Sk_h^2},$$

oder endlich die Wahrscheinlichkeit, dass

$$\mu_1 Sk_h - \gamma \sqrt{Sk_h^2} \cdot \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r < \mu_1 Sk_h + \gamma \sqrt{Sk_h^2} \cdot \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Anmerkung I. 1) Bei constantem γ, also bei demselben p, fallen die Grenzen von r um so enger aus, je kleiner Sk_h^2, sie werden also für $Sk_h^2 = \text{min.}$ (d. i. für $k_h = \frac{a_h}{Sa_h^2}$, wie sogleich nachgewiesen werden soll,) am engsten.

2) Nachdem $\gamma = \frac{\varrho}{\sqrt{Sk_h^2}}$ (an der Grenze), so wird für $Sk_h^2 = \text{min.}$ die obere Integrationsgrenze γ und damit auch p ein Maximum; bei im Vorhinein angenommenen Grenzen wird daher die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der Unbekannten über dieselben nicht hinausfällt, am grössten, wenn man letztere nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt hat.

Anmerkung II. Es soll gezeigt werden, dass für das aus dem Princip der kleinsten Quadratsummen fliessende Factorensystem das Minimum von Sk_h^2 eintritt.

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert für x den Ausdruck

$$x = \frac{Sa_h \omega_h}{Sa_h^2} = S \frac{a_h}{Sa_h^2} \omega_h = SA_h \omega_h ,$$

während unser Verfahren den Ausdruck

$$x = Sk_h \omega_h$$

ergeben hat; die Behauptung geht also dahin, dass $k_h = A_h$ dem Minimum von Sk_h^2 entspricht.

Bekanntlich wurde bei der letzterwähnten Bestimmung von x

$$Sa_h k_h = 1$$

gesetzt; nun ist aber auch

$$Sa_h A_h = Sa_h \frac{a_h}{Sa_h^2} = \frac{Sa_h^2}{Sa_h^2} = 1 ;$$

zieht man die beiden Gleichungen von einander ab, so ergibt sich

$$Sa_h(k_h - A_h) = 0 ,$$

und nach Division durch Sa_h^2

$$S \frac{a_h}{Sa_h^2} (k_h - A_h) = SA_h(k_h - A_h) = S(A_h k_h - A_h^2) = 0 ,$$

woraus

$$SA_h k_h = SA_h^2$$

gefolgert wird. Aus dieser Gleichheit folgt aber die Richtigkeit der Gleichung

$$Sk_h^2 - 2SA_h k_h = Sk_h^2 - 2SA_h^2 ,$$

aus welcher

$$Sk_h^2 - 2SA_h k_h + SA_h^2 = Sk_h^2 - SA_h^2 ,$$

$$S(k_h - A_h)^2 = Sk_h^2 - SA_h^2$$

und schliesslich

$$Sk_h^2 = SA_h^2 + S(k_h - A_h)^2$$

sich ergibt; hieraus aber erkennt man sofort, dass $Sk_h^2 = \text{min.}$ wird für

$$k_h = A_h = \frac{a_h}{Sa_h^2} .$$

Da es bei der Bezeichnung von x nur auf Verhältnisszahlen ankommt, so kann auch $k_h = a_h$ gesetzt werden.

Anmerkung III. Für das vortheilhafteste System der Factoren k_h ist

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma dt e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit der Grenzen

$$\mu_1 \frac{S a_h}{S a_h^2} - \gamma \frac{1}{\sqrt{S a_h^2}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r < \mu_1 \frac{S a_h}{S a_h^2} + \gamma \frac{1}{\sqrt{S a_h^2}} \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}$$

des Fehlers r in der Bestimmung $x' = \frac{S a_h n_h}{S a_h^2}$.

Anmerkung IV. Ueber die Natur des Fehlergesetzes wurde bisher keinerlei Voraussetzung gemacht; nimmt man nun an, dass positive und negative Fehler von gleichem absoluten Betrage gleich wahrscheinlich sind, dann ist $\varphi(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$, mithin

$$\mu_1 = \int \varepsilon \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0,$$

und es stellt

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma dt e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit vor, dass der dem Werthe $x' = \frac{S a_h n_h}{S a_h^2}$ anhaftende Fehler r der Bedingung

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{S a_h^2}} \sqrt{2\mu_2} < r < \frac{\gamma}{\sqrt{S a_h^2}} \sqrt{2\mu_2}$$

folgt. Nun ist aber, wenn man sich bei sehr grossem n die Vertauschung der durch den Werth $x' = \frac{S a_h n_h}{S a_h^2}$ von x zurückgelassenen Fehler

$$\lambda_h = a_h \frac{S a_h n_h}{S a_h^2} - n_h$$

mit den wahren Fehlern

$$\varepsilon_h = a_h x - n_h$$

erlaubt,

$$\mu_2 = \frac{S \lambda_h^2}{n};$$

dadurch verwandelt sich obige Ungleichheit in

$$-\frac{\gamma}{\sqrt{n\,S a_h^2}}\sqrt{2 S \lambda_h^2} < r < \frac{\gamma}{\sqrt{n\,S a_h^2}}\sqrt{2 S \lambda_h^2}\,.$$

Anmerkung V. Für den einfachsten Fall $f(X) = X$ wird

$$a_h = 1,\ \alpha_h = 0,\ n_h = o_h - \alpha_h = o_h;$$

der vortheilhafteste Werth von x ist dann

$$x' = \frac{S o_h}{n},$$

seine Abweichung von der einzelnen Beobachtung

$$\lambda_h = \frac{S o_h}{n} - o_h;$$

in Folge dessen ist dann

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma dt e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler r der Bestimmung x' zwischen den Grenzen

$$-\frac{\gamma}{n}\sqrt{2 S\left(\frac{S o_h}{n} - o_h\right)^2} < r < \frac{\gamma}{n}\sqrt{2 S\left(\frac{S o_h}{n} - o_h\right)^2}$$

eingeschlossen bleibt.

2. Vermittelnde Beobachtungen mehrerer Unbekannten.

Die Function $f(X_1, X_2, \cdots X_i, \cdots X_m)$ der m Unbekannten X_i sei durch n Beobachtungen gegeben, welche die Resultate $o_1, o_2, \cdots o_h, \cdots o_n$ geliefert haben, deren Fehler mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_h, \cdots \varepsilon_n$ bezeichnet werden mögen. Kennt man sehr genäherte Werthe $X_{1,0}, X_{2,0}, \cdots X_{i,0}, \cdots X_{m,0}$ der Unbekannten, dann führt die Beobachtung o_h zu der Gleichung

$$o_h + \varepsilon_h = f_h(X_{1,0} + x_1,\ X_{2,0} + x_2, \cdots X_{i,0} + x_i, \cdots X_{m,0} + x_m)$$
$$= \alpha_h + a_{1,h}\, x_1 + a_{\,,h}\, x_2 + \cdots + a_{i,h}\, x_i + \cdots + a_{m,h}\, x_m,$$

in welcher $x_1, x_2, \cdots x_i, \cdots x_m$ die unbekannten Verbesserungen der Näherungswerthe bedeuten. Der erste Zeiger der Coefficienten bezieht sich auf die Unbekannte, mit welcher sie verbunden sind, der zweite auf die Gleichung, in welcher sie stehen. Setzt man

$$o_h - \alpha_h = n_h, \quad \varepsilon_h + n_h = \omega_h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

so schreibt sich obige Gleichung wie folgt:

$$\omega_h = a_{1,h}\, x_1 + a_{2,h}\, x_2 + \cdots + a_{i,h}\, x_i + \cdots + a_{m,h}\, x_m\,; \quad (2)$$

Gleichungen dieser Form gibt es n; man hat, um sie zu erhalten, $h = 1, 2, \cdots n$ zu nehmen.

Auflösung der Gleichungen (2). Wären die Beobachtungsfehler bekannt oder aber die Beobachtungen fehlerfrei, so würde es zur Auflösung der Gleichungen (2) genügen, m unter ihnen, welche von einander unabhängig sind, auszuwählen und in bekannter Weise zu behandeln. Nachdem dies aber nicht der Fall, wird man die linke Seite durch den bekannten Werth n_h (siehe Gleich. (1)) ersetzen, von den Fehlern also vorläufig Umgang nehmen müssen; dann aber empfiehlt es sich, alle n Gleichungen, deren Zahl sehr gross vorausgesetzt wird, in irgend einer Weise zu combiniren und an der Bestimmung der Unbekannten theilnehmen zu lassen, weil man dann erwarten darf, dass in der Vereinigung aller Gleichungen die Beobachtungsfehler sich gegenseitig aufheben werden.

Die einfachste Art der Verbindung der Bedingungsgleichungen besteht aber darin, dass man sie einzeln mit vorläufig unbestimmten Coefficienten multiplicirt, hierauf addirt und über die Coefficienten nachträglich so verfügt, dass die Summengleichung die gewünschte Unbekannte liefert.

1) Es handle sich um die Bestimmung von x_1. Man multiplicirt die Gleichungen (2), nachdem links an Stelle von ω_h der bekannte Werth n_h gesetzt worden, mit $k_{1,h}$, summirt und erhält

$$S n_h k_{1,h} = x_1 S a_{1,h} k_{1,h} + x_2 S a_{2,h} k_{1,h} + \cdots + x_m S a_{m,h} k_{1,h};$$

wählt man nun die Coefficienten derart, dass

$$\left.\begin{array}{l} S a_{1,h}\, k_{1,h} = 1 \\ S a_{2,h}\, k_{1,h} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ S a_{m,h}\, k_{1,h} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

wird, so ergibt sich

$$x_1 = S n_h k_{1,h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha')$$

2) In ähnlicher Weise wird man zum Zwecke der Be-

stimmung von x_2 das Gleichungssystem (2) mit Coefficienten $k_{2,h}$ multipliciren und erhält durch Summirung

$$Sn_h k_{2,h} = x_1 Sa_{1,h} k_{2,h} + x_2 Sa_{2,h} k_{2,h} + \cdots + x_m Sa_{m,h} k_{2,h},$$

woraus wieder, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} Sa_{1,h}\ k_{2,h} = 0 \\ Sa_{2,h}\ k_{2,h} = 1 \\ \dots\dots\dots \\ Sa_{m,h}\ k_{2,h} = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (\beta)$$

setzt,

$$x_2 = Sn_h k_{2,h}$$

folgt.

3) Durch den eben erörterten Vorgang erhält man allgemein

$$x_i = Sn_h k_{i,h}, \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

wenn man das Coefficientensystem $k_{i,h}$ den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} Sa_{1,h}\ k_{i,h} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ Sa_{i,h}\ k_{i,h} = 1 \\ \dots\dots\dots \\ Sa_{m,h}\ k_{i,h} = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

unterwirft.

Die m Gleichungen (3) $(i = 1, 2, \cdots m)$ liefern die Werthe der Unbekannten, ausgedrückt jedoch durch je n Coefficienten $k_{i,h}$ $(h = 1, 2, \cdots n)$; zur Ermittelung der letzteren sind m Gleichungssysteme (4) von je m Gleichungen vorhanden. Da also mn Factoren zu bestimmen, dazu aber nur m^2 Gleichungen gegeben sind, so bleiben $mn - m^2 = m(n - m)$ Coefficienten im Ganzen oder $n - m$ Coefficienten in jedem System von der Form (4) willkürlich. Gerade dieser Umstand bedingt, dass man durch entsprechende Wahl dahin wirken kann, die vortheilhaftesten Werthe der Unbekannten zu erzielen; hierin liegt aber auch der Grund, warum die ganze Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufällt.

Der Relation (1) zufolge ist $n_h = \omega_h - \varepsilon_h$, daher $Sn_h k_{i,h} = S\omega_h k_{i,h} - S\varepsilon_h k_{i,h}$; demnach begeht man bei der Vertauschung von $S\omega_h k_{i,h}$ mit $Sn_h k_{i,h}$ einen Fehler

$$r_i = S\varepsilon_h k_{i,h},$$

und dies ist auch der Fehler in der Bestimmung von x_i. In gleicher Weise sind

$$r_1 = S\varepsilon_h k_{1,h}\,,$$
$$r_2 = S\varepsilon_h k_{2,h}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

die Fehler der oben abgeleiteten Werthe für $x_1, x_2, \cdots$

Die Aufgabe lässt sich nun dahin präcisiren, die Coefficienten $k_{i,h}$ derart zu bestimmen, dass die Fehler r der Unbekannten x bei gegebener Wahrscheinlichkeit in die möglich engsten Grenzen eingeschlossen bleiben.

1. *Bestimmung von* $Q = \Psi(r_1, r_2, \cdots r_m)\, dr_1\, dr_2 \cdots dr_m$ *als Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler* $r_1, r_2, \cdots r_m$ *bei den Unbekannten* $x_1, x_2, \cdots x_m$.

a) *Ableitung eines Ausdruckes für die Function* Ψ.

In dem Producte

$$X = \int \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1\, v_1^{\varepsilon_1 k_{1,1}}\, v_2^{\varepsilon_1 k_{2,1}} \cdots v_m^{\varepsilon_1 k_{m,1}} \int \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2\, v_1^{\varepsilon_2 k_{1,2}}\, v_2^{\varepsilon_2 k_{2,2}} \cdots v_m^{\varepsilon_2 k_{m,2}}$$
$$\times \cdots \times \int \varphi(\varepsilon_n)\, d\varepsilon_n\, v_1^{\varepsilon_n k_{1,n}}\, v_2^{\varepsilon_n k_{2,n}} \cdots v_m^{\varepsilon_n k_{m,n}}$$
$$= \Sigma\, Q\, v_1^{u_1}\, v_2^{u_2} \cdots v_m^{u_m}$$

bedeutet der Coefficient Q des allgemeinen Gliedes die Wahrscheinlichkeit, dass die Summen

$$S\varepsilon_h k_{1,h},\ S\varepsilon_h k_{2,h},\ \cdots\ S\varepsilon_h k_{m,h},$$

also die Fehler der Unbekannten

$$x_1,\quad x_2,\quad \cdots\quad x_m$$

die besonderen Werthe

$$u_1,\quad u_2,\quad \cdots\quad u_m$$

annehmen; in Folge dessen kann Q durch $\Psi(u_1, u_2, \cdots u_m) \times du_1\, du_2 \cdots du_m$ ersetzt werden, wobei gleichzeitig das Summenzeichen in ein Integralzeichen umzuwandeln sein wird, so dass

$$X = \int_{(m)} \Psi(u_1, u_2, \cdots u_m)\, du_1\, du_2 \cdots du_m\, v_1^{u_1}\, v_2^{u_2} \cdots v_m^{u_m}$$

wird. Führt man an Stelle von $v_1, v_2, \cdots v_m$, welche Grössen in die Function Ψ nicht eintreten, die neuen Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ mit Hilfe der Gleichungen

$$v_1 = e^{\alpha_1 \sqrt{-1}},\quad v_2 = e^{\alpha_2 \sqrt{-1}},\quad \cdots\quad v_m = e^{\alpha_m \sqrt{-1}}$$

ein, so schreibt sich X wie folgt:

$$X = \int_{(m)} \Psi(u_1, u_2, \cdots u_m)\, du_1 du_2 \cdots du_m\, e^{(u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots + u_m\alpha_m)\sqrt{-1}}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit dem Ausdrucke

$$d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_m\, e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}$$

und nachmalige Integration in Bezug auf sämmtliche α innerhalb der Grenzen $\pm\infty$ wird

$$\int_{(m)-\infty}^{\infty} X d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}$$

$$= \int_{(m)-\infty}^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}$$

$$\times \int_{(m)} \Psi(u_1, u_2, \cdots u_m)\, du_1 du_2 \cdots du_m\, e^{(u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_m\alpha_m)\sqrt{-1}};$$

nachdem nun der Werth des rechtseitigen $2m$-fachen Integrals*) gleichkommt

$$(2\pi)^m \Psi(r_1, r_2, \cdots r_m),$$

so hat man, was eben vorläufig verlangt wurde,

$$\Psi(r_1, r_2, \cdots r_m) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{(m)-\infty}^{\infty} X d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}. \quad (5)$$

b) *Ableitung eines Ausdruckes für X.*

Dem Obigen zufolge ist

$$X = \Pi_h{}_1^n \left\{ \int \varphi(\varepsilon_h)\, d\varepsilon_h\, e^{\varepsilon_h\sqrt{-1}\,\Sigma_i{}_1^m \alpha_i k_{i,h}} \right\};$$

setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma_i{}_1^m \alpha_i k_{i,h} = S_h,$$

unterdrückt die nur zum besseren Verständniss bisher geführten Zeiger der ε und schreibt weiter noch

$$p_h = \int \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon\, e^{\varepsilon\sqrt{-1}\,S_h},$$

so wird

$$X = \Pi_h{}_1^n p_h = p_1 p_2 \cdots p_n \; \ldots\ldots\ldots \; (6)$$

Durch Entwickelung der Exponentiellen unter dem Inte-

*) Siehe Note V am Ende des Bandes.

gral ergibt sich

$$p_h = \int \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon \sqrt{-1}\, S_h - \frac{\varepsilon^2 S_h^2}{2} - \frac{\varepsilon^3 S_h^3 \sqrt{-1}}{6} + \frac{\varepsilon^4 S_h^4}{24} + \cdots \right\};$$

mit Benutzung der früher bereits eingeführten Abkürzung

$$\int \varepsilon^\beta \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \mu_\beta,$$

sowie mit Beachtung des Umstandes, dass $\int \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \mu_0 = 1$ ist, erhält man weiter

$$p_h = 1 + \mu_1 \sqrt{-1}\, S_h - \frac{\mu_2 S_h^2}{2} - \frac{\mu_3 S_h^3 \sqrt{-1}}{6} + \frac{\mu_4 S_h^4}{24} + \ldots = e^{\tau_h},$$

wobei

$$\tau_h = l.\left[1 + \mu_1 \sqrt{-1}\, S_h - \frac{\mu_2 S_h^2}{2} - \frac{\mu_3 S_h^3 \sqrt{-1}}{6} + \frac{\mu_4 S_h^4}{24} + \ldots\right]$$

$$= \mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2}{2} S_h^2 - \frac{\mu_3}{6} S_h^3 \sqrt{-1} + \frac{\mu_4}{24} S_h^4 + \ldots$$

$$+ \frac{\mu_1^2}{2} S_h^2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{2} S_h^3 \sqrt{-1} - \frac{\mu_2^2}{8} S_h^4 + \ldots$$

$$- \frac{\mu_1^3}{3} S_h^3 \sqrt{-1} - \frac{\mu_1 \mu_3}{6} S_h^4 + \ldots$$

$$+ \frac{\mu_1^2 \mu_2}{2} S_h^4 + \ldots$$

$$- \frac{\mu_1^4}{4} S_h^4 + \ldots$$

$$= \mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S_h^2 - \frac{M_3 \sqrt{-1}}{6} S_h^3 + \frac{M_4}{24} S_h^4 + \ldots,$$

wenn zur Abkürzung

$$M_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3,$$

$$M_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4$$

genommen und die Entwickelung mit der vierten Potenz von α geschlossen wird. Nach diesen Umformungen ist

$$p_h = e^{\tau_h} = e^{\mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} S_h^2 - \frac{M_3 \sqrt{-1}}{6} S_h^3 + \frac{M_4}{24} S_h^4 + \ldots}$$

und

$$X = \prod_1^n {}_h\, e^{\tau_h} = e^{\overset{n}{\underset{1}{S}} \tau_h}$$

$$= e^{\mu_1 \{ S(S_h) \} \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \{ S(S_h^2) \} - \frac{M_3 \sqrt{-1}}{6} \{ S(S_h^3) \} + \frac{M_4}{24} \{ S(S_h^4) \}}.$$

Mit den Substitutionen

$$T_1 = \mu_1 \{S(S_h)\}$$
$$= \mu_1 S(S\alpha_i k_{i,h})$$
$$= \mu_1 S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \ldots + \alpha_m k_{m,h})$$
$$= \mu_1 (\alpha_1 S k_{1,h} + \alpha_2 S k_{2,h} + \ldots + \alpha_m S k_{m,h})$$
$$= \mu_1 \sum_{1}^{m}{}_i (\alpha_i S k_{i,h}),$$
$$T_2 = (\mu_2 - \mu_1^2) \{S(S_h^2)\},$$
$$T_3 = M_3 \{S(S_h^3)\},$$
$$T_4 = M_4 \{S(S_h^4)\}$$

erhält man endlich

$$X = e^{T_1\sqrt{-1} - \frac{T_2}{2} - \frac{T_3\sqrt{-1}}{6} + \frac{T_4}{24} + \cdots}$$
$$= e^{T_1\sqrt{-1} - \frac{T_2}{2}}\left(1 - \frac{T_3\sqrt{-1}}{6} + \frac{T_4}{24} + \cdots - \frac{T_3^2}{72} + \cdots\right)$$
$$= e^{\mu_1\sqrt{-1}(\alpha_1 S k_{1,h} + \alpha_2 S k_{2,h} + \ldots + \alpha_m S k_{m,h}) - \frac{T_2}{2}}\left(1 - \frac{T_3\sqrt{-1}}{6} + \cdots\right);$$

wird dieser Ausdruck in die Gleichung (5) eingeführt, so ergibt sich

$$\Psi(r_1, r_2 \ldots r_m) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{(m)-\infty}^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}$$
$$\times e^{\mu_1\sqrt{-1}(\alpha_1 S k_{1,h} + \alpha_2 S k_{2,h} + \cdots + \alpha_m S k_{m,h}) - \frac{T_2}{2}}\left(1 - \frac{T_3\sqrt{-1}}{6} + \cdots\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{(m)-\infty}^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m e^{-\sqrt{-1}\sum_{1}^{m}{}_i \alpha_i (r_i - \mu_1 S k_{i,h}) - \frac{T_2}{2}}\left(1 - \frac{T_3\sqrt{-1}}{6} + \cdots\right) \quad (6)$$

2. *Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P, dass die Fehler $r_1, r_2, \ldots r_m$ innerhalb gegebener Grenzen sich befinden.*

Lässt man die Grenzen, innerhalb welcher die einzelnen r liegen sollen, vor der Hand unausgesprochen, so ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit zunächst der Ausdruck

$$P = \int_{(m)} \Psi(r_1, r_2, \ldots r_m)\, dr_1\, dr_2 \ldots dr_m$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{(m)} dr_1 dr_2 \ldots dr_m \int_{(m)-\infty}^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_m e^{-\sqrt{-1}\sum_1^m{}_i \alpha_i (r_i - \mu_1 S k_{i,h}) - \frac{T_2}{2}}$$

$$\times \left(1 - \frac{T_3 \sqrt{-1}}{6} + \cdots\right).$$

An Stelle der Veränderlichen r und α mögen nun neue Variable ϱ und z durch die Gleichungen

$$r_i - \mu_1 S k_{i,h} = \varrho_i \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}, \quad \alpha_i = \frac{z_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}}$$

eingeführt werden, aus welchen sich nach und nach

$$dr_i = d\varrho_i \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}, \quad d\alpha_i = \frac{dz_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

$$dr_i d\alpha_i = 2 d\varrho_i dz_i,$$

$$dr_1 \cdots dr_m \cdot d\alpha_1 \cdots d\alpha_m = 2^m d\varrho_1 \cdots d\varrho_m \cdot dz_1 \cdots dz_m,$$

$$\alpha_i (r_i - \mu_1 S k_{i,h}) = 2 \varrho_i z_i$$

ergibt; bezeichnet man noch die Ausdrücke, in welche $\frac{T_2}{2}$, T_3, ... durch die Substitution überführt werden, mit Z_2, Z_3, ..., so hat man jetzt

$$P = \frac{1}{\pi^m} \int_{(m)} d\varrho_1 d\varrho_2 \cdots d\varrho_m \int_{(m)-\infty}^{\infty} dz_1 dz_2 \cdots dz_m e^{-2\sqrt{-1}\sum_1^m \varrho_i z_i - Z_2} \left(1 - \frac{Z_3 \sqrt{-1}}{6} + \cdots\right) (7).$$

Die Entwickelung von $\frac{T_2}{2} = Z_2$ liefert

$$Z_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \left\{ S(S_h^2) \right\}$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \left\{ S(S\alpha_i k_{i,h})^2 \right\}$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \left\{ S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})^2 \right\}$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \Big\{ S\,[\alpha_1^2 k_{1,h}^2 + \alpha_2^2 k_{2,h}^2 + \cdots + \alpha_m^2 k_{m,h}^2$$
$$+ 2\alpha_1(\alpha_2 k_{1,h} k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{1,h} k_{m,h})$$
$$+ 2\alpha_2(\alpha_3 k_{2,h} k_{3,h} + \cdots + \alpha_m k_{2,h} k_{m,h})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 2\alpha_{m-1}\alpha_m k_{m-1,h} k_{m,h}] \Big\}$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2} \Big\{ \alpha_1^2 Sk_{1,h}^2 + \alpha_2^2 Sk_{2,h}^2 + \cdots + \alpha_m^2 Sk_{m,h}^2$$
$$+ 2\alpha_1(\alpha_2 Sk_{1,h}k_{2,h} + \cdots + \alpha_m Sk_{1,h}k_{m,h})$$
$$+ 2\alpha_2(\alpha_3 Sk_{2,h}k_{3,h} + \cdots + \alpha_m Sk_{2,h}k_{m,h})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 2\alpha_{m-1}\alpha_m Sk_{m-1,h}k_{m,h} \Big\};$$

bedient man sich dabei zur besseren Uebersicht der Symbole

$$b_{i,i'} = b_{i',i} = Sk_{i,h}k_{i',h},$$

welchen zufolge $Sk_{i,h}^2$ mit $b_{i,i}$ zu bezeichnen sein wird, so ist weiter, wenn man gleichzeitig α_i durch z_i ersetzt:

$$Z_2 = b_{1,1}z_1^2 + b_{2,2}z_2^2 + \cdots + b_{m,m}z_m^2$$
$$+ 2z_1(b_{1,2}z_2 + b_{1,3}z_3 + \cdots + b_{1,m}z_m)$$
$$+ 2z_2(b_{2,3}z_3 + b_{2,4}z_4 + \cdots + b_{2,m}z_m)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 2b_{m-1,m}z_{m-1}z_m$$

$$\left.\begin{aligned} = b_{1,1}z_1^2 + 2b_{1,2}z_1z_2 + 2b_{1,3}z_1z_3 + 2b_{1,4}z_1z_4 + \cdots \\ + b_{2,2}z_2^2 + 2b_{2,3}z_2z_3 + 2b_{2,4}z_2z_4 + \cdots \\ + b_{3,3}z_3^2 + 2b_{3,4}z_3z_4 + \cdots \\ + b_{4,4}z_4^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Bevor wir jedoch diesen Ausdruck in die Gleichung (7) eintragen, sollen zum Zwecke der Sonderung der Integrationen neue Variable β_i und t_i durch die folgenden, mit vorläufig unbestimmten Coefficienten behafteten Gleichungen eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= h_{1,1}z_1 + h_{1,2}z_2 + h_{1,3}z_3 + \cdots + h_{1,m}z_m + t_1\sqrt{-1}, \\ \beta_2 &= h_{2,2}z_2 + h_{2,3}z_3 + \cdots + h_{2,m}z_m + t_2\sqrt{-1}, \\ \beta_3 &= h_{3,3}z_3 + \cdots + h_{3,m}z_m + t_3\sqrt{-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_m &= h_{m,m}z_m + t_m\sqrt{-1}; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so folgt für die Summe

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2 + (t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2) = E'$$

der Ausdruck:

$$E' = 2h_{1,1}t_1 z_1\sqrt{-1} + 2(h_{1,2}t_1 + h_{2,2}t_2)z_2\sqrt{-1} + \cdots$$
$$+ 2(h_{1,m}t_1 + h_{2,m}t_2 + \cdots + h_{m,m}t_m)z_m\sqrt{-1}$$
$$+ h_{1,1}z_1^2 + 2h_{1,1}h_{1,2}z_1z_2 + 2h_{1,1}h_{1,3}z_1z_3 + 2h_{1,1}h_{1,4}z_1z_4 + \cdots$$
$$+ (h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2)z_2^2 + 2(h_{1,2}h_{1,3} + h_{2,2}h_{2,3})z_2z_3$$
$$+ 2(h_{1,2}h_{1,4} + h_{2,2}h_{2,4})z_2z_4 + \cdots$$
$$+ (h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2)z_3^2 + 2(h_{1,3}h_{1,4} + h_{2,3}h_{2,4} + h_{3,3}h_{3,4})z_3z_4 + \cdots$$
$$+ (h_{1,4}^2 + h_{2,4}^2 + h_{3,4}^2 + h_{4,4}^2)z_4^2 + \cdots;$$

identificirt man denselben mit dem Exponenten von e in Formel (7), welcher vom Zeichen abgesehen und mit Rücksicht auf (8)

$$E = 2\varrho_1 z_1\sqrt{-1} + 2\varrho_2 z_2\sqrt{-1} + \cdots + 2\varrho_m z_m\sqrt{-1}$$
$$+ b_{1,1}z_1^2 + 2b_{1,2}z_1z_2 + 2b_{1,3}z_1z_3 + 2b_{1,4}z_1z_4 + \cdots$$
$$+ b_{2,2}z_2^2 + 2b_{2,3}z_2z_3 + 2b_{2,4}z_2z_4 + \cdots$$
$$+ b_{3,3}z_3^2 + 2b_{3,4}z_3z_4 + \cdots$$
$$+ b_{4,4}z_4^2 + \cdots$$

lautet, so muss gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= h_{1,1}t_1, \\ \varrho_2 &= h_{1,2}t_1 + h_{2,2}t_2, \\ &\cdots\cdots \\ \varrho_m &= h_{1,m}t_1 + h_{2,m}t_2 + \cdots + h_{m,m}t_m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

$$\left.\begin{aligned} &b_{1,1} = h_{1,1}^2, && b_{1,2} = h_{1,1}h_{1,2}, \\ &b_{2,2} = h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2, && b_{2,3} = h_{1,2}h_{1,3} + h_{2,2}h_{2,3}, \\ &b_{3,3} = h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2, && b_{3,4} = h_{1,3}h_{1,4} + h_{2,3}h_{2,4} + h_{3,3}h_{3,4}, \\ &b_{4,4} = h_{1,4}^2 + h_{2,4}^2 + h_{3,4}^2 + h_{4,4}^2, && \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ &b_{1,3} = h_{1,1}h_{1,3}, && b_{1,4} = h_{1,1}h_{1,4} \\ &b_{2,4} = h_{1,2}h_{1,4} + h_{2,2}h_{2,4}, && \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots (11)$$

Man hat dann

$$e^{-2\sqrt{-1}\sum_1^m \varrho_i z_i - Z_2} = e^{-(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2 + t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2)}.$$

weiter ergibt sich, wenn man die Variablen mit übereinstimmenden Indices einander zuordnet, bei der Unabhängigkeit sämmtlicher Variablen auf Grund der Relationen (9) und (10)

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= h_{1,1}\, dz_1, & d\varrho_1 &= h_{1,1}\, dt_1, \\ d\beta_2 &= h_{2,2}\, dz_2, & d\varrho_2 &= h_{2,2}\, dt_2, \\ &\cdots & &\cdots \\ d\beta_m &= h_{m,m}\, dz_m, & d\varrho_m &= h_{m,m}\, dt_m, \end{aligned}$$

woraus wieder

$$d\varrho_1\, d\varrho_2 \cdots d\varrho_m \cdot dz_1\, dz_2 \cdots dz_m = dt_1\, dt_2 \cdots dt_m \cdot d\beta_1\, d\beta_2 \cdots d\beta_m$$

hergeleitet wird. Hieraus folgt dann

$$\left.\begin{aligned} P = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{(m)}^{\infty} & dt_1\, dt_2 \cdots dt_m\, e^{-(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2)} \\ \times \int\limits_{(m)\,-\infty}^{\infty} & d\beta_1\, d\beta_2 \cdots d\beta_m\, e^{-(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2)} \cdot R \end{aligned}\right\} \cdots (12)$$

Vor Ausführung der auf die β_i bezüglichen Integrationen wird es noch erforderlich sein, den Ausdruck

$$R = 1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} Z_3 + \frac{1}{24} Z_4 - \frac{1}{72} Z_3^2 + \cdots$$

als Function der β_i und t_i darzustellen. Zunächst ist

$$\begin{aligned} T_3 &= M_3 \{ S(S_h^3) \} \\ &= M_3 \{ S(\Sigma \alpha_i k_{i,h})^3 \} \\ &= M_3 \{ S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots \alpha_m k_{m,h})^3 \} \\ &= M_3 \{ \Sigma(\alpha_i^3 S k_{i,h}^3) + 3\Sigma(\alpha_i^2 \alpha_{i'} S k_{i,h}^2 k_{i',h}) \\ &\quad + 6\Sigma(\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h}) \}, \end{aligned}$$

wobei $i < i' < i''$ vorausgesetzt wird; daraus ergibt sich, wenn an Stelle der Variablen α_i jene z_i eingeführt werden,

$$\begin{aligned} Z_3 = \frac{M_3}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)\right]^3}} \{ & \Sigma(z_i^3 S k_{i,h}^3) + 3\Sigma(z_i^2 z_{i'} S k_{i,h}^2 k_{i',h}) \\ & + 6\Sigma(z_i z_{i'} z_{i''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h}) \}. \end{aligned}$$

Weiter hat man

$$\begin{aligned} T_4 &= M_4 \{ S(S_h^4) \} \\ &= M_4 \{ S(\Sigma \alpha_i k_{i,h})^4 \} \\ &= M_4 \{ S(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \cdots + \alpha_m k_{m,h})^4 \} \end{aligned}$$

$$T_4 = M_4 \{ \Sigma(\alpha_i^4 S k_{i,h}^4) + 4\Sigma(\alpha_i^3 \alpha_{i'} S k_{i,h}^3 k_{i',h}) + 6\Sigma(\alpha_i^2 \alpha_{i'}^2 S k_{i,h}^2 k_{i',h}^2) + 12\Sigma(\alpha_i^2 \alpha_{i'} \alpha_{i''} S k_{i,h}^2 k_{i',h} k_{i'',h}) + 24\Sigma(\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} \alpha_{i'''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} k_{i''',h}) \};$$

dabei wird $i < i' < i'' < i'''$ vorausgesetzt; nach Einführung der z_i erhält man

$$Z_4 = \frac{M_4}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)\right]^4}} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma(z_i^4 S k_{i,h}^4) + 4\Sigma(z_i^3 z_{i'} S k_{i,h}^3 k_{i',h}) + 6\Sigma(z_i^2 z_{i'}^2 S k_{i,h}^2 k_{i',h}^2) \\ \quad + 12\Sigma(z_i^2 z_{i'} z_{i''} S k_{i,h}^2 k_{i',h} k_{i'',h}) \\ \quad + 24\Sigma(z_i z_{i'} z_{i''} z_{i'''} S k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} k_{i''',h}) \end{array} \right\}.$$

Schliesslich sind die z_i auf Grund der Gleichungen (9) durch die Variablen β_i und t_i zu ersetzen.

Beachtet man nun, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, e^{-\beta^2} = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{2n} d\beta\, e^{-\beta^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^{2n-1} d\beta\, e^{-\beta^2} = 0$$

ist, so leuchtet vor allem andern ein, dass bei der Integration alle mit ungeraden Potenzen der β_i behafteten Glieder von R ausfallen werden, und es wird

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} d\beta_1 \cdots d\beta_m\, e^{-(\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2)} \quad \text{in} \quad (\sqrt{\pi})^m,$$

$$\sqrt{-1} \int_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} d\beta_1 \cdots d\beta_m\, e^{-(\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2)} Z_3 \quad \text{in} \quad B_3 (\sqrt{\pi})^m,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} d\beta_1 \cdots d\beta_m\, e^{-(\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2)} Z_4 \quad \text{in} \quad B_4 (\sqrt{\pi})^m,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)} d\beta_1 \cdots d\beta_m\, e^{-(\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2)} Z_3^2 \quad \text{in} \quad B_6 (\sqrt{\pi})^m,$$

übergehen, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty}\limits_{(m)} d\beta_1\, d\beta_2 \cdots d\beta_m\, e^{-(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_m^2)} \cdot R$$
$$= (\sqrt{\pi})^m \left(1 - \tfrac{1}{6} B_3 + \tfrac{1}{24} B_4 - \tfrac{1}{72} B_6\right)$$

sich ergibt; darin sind B_3, B_4, B_6 algebraische ganze Functionen der t_i, und zwar B_3 vom dritten Grade, enthaltend 1., 2., 3., Potenzen, B_4 vom vierten Grade, enthaltend 0., 1., $\cdots$ 4. Potenzen, B_6 vom sechsten Grade, enthaltend 0., 1., $\cdots$ 6. Potenzen der t_i. Durch Einsetzung des letzterhaltenen Ausdruckes in Gleichung (12) wird

$$\left.\begin{aligned} P = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int\limits_{(m)} dt_1\, dt_2 \cdots dt_m\, e^{-(t_1^2+t_2^2+\cdots+t_m^2)} \\ \times\left(1 - \tfrac{1}{6} B_3 + \tfrac{1}{24} B_4 - \tfrac{1}{72} B_6\right). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die endgiltige Bestimmung von P käme hiernach auf die Auswerthung von Integralen der Form

$$\int t^n\, dt\, e^{-t^2}$$

zurück, die ohne weiteres ausgeführt werden könnte, wenn man die Grenzen der Variablen t_i durch jene bereits ausgedrückt hätte, welche man den Variablen ϱ_i und in letzter Reihe den Fehlern r_i beilegen will. Zu diesem Zwecke wären die Gleichungen (10) zu verwenden.

Wir beschränken uns jedoch auf den Fall, den Werth von P unter der Bedingung zu ermitteln, dass der numerische Werth keiner der Grössen t_i einen bestimmten Betrag γ überschreite, eine Bedingung, welche offenbar identisch ist mit der Forderung

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2 < \gamma^2 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Bei der successiven Ausführung der in Nr. (13) vorgeschriebenen Integrationen, von der Variablen t_m gegen jene t_1 hin, wird dies, wenn man der eben gestellten Forderung genügen will, bei der Variablen t_i innerhalb der Grenzen

$$\pm c_i = \pm\sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{i-1}^2}$$

zu erfolgen haben, so dass die zuletzt übrig bleibende Integration nach t_1 innerhalb der Grenzen $\pm c_1 = \pm \gamma$ zu geschehen haben wird.

Unter solchen Umständen erfährt die Formel (13) eine

weitere Vereinfachung, indem bei der Symmetrie der Grenzen Glieder mit ungeraden Potenzen der t_i entfallen und nur jene mit den geraden Potenzen dieser Variablen zurückbleiben; dies hat weiter zur Folge, dass mit den ungeraden Potenzen der t_i, welche allein mit $\sqrt{-1}$ behaftet sind, auch die imaginären Glieder aus (13) verschwinden. Das Glied B_3 entfällt überhaupt gänzlich, weil es — ebenso wie im Falle einer Unbekannten — nur erste und dritte Potenzen der t_i enthält.

Ueber die Grössenordnung des eingeklammerten Functionsrestes kann man, ohne die Darstellung desselben in den Variablen t_i nöthig zu haben, zu einem Schlusse gelangen, wenn man auf den vorausgeschickten und in gleicher Weise behandelten Fall einer Unbekannten zurückblickt. Dort ergab sich für den algebraischen Antheil der Function unter dem Integral die Ordnung $\frac{1}{n}$; hier aber wird diese auch von der Zahl m der Unbekannten abhängen, also $\frac{m}{n}$ sein. Bevor man daher diesen Theil der integrirten Function vernachlässigt, muss man sich dessen versichern, dass das Product aus $\frac{m}{n}$ mit der höchsten Potenz der oberen Grenze γ, welche bei Durchführung der Integration eintreten kann, d. i. mit γ^6, eine Grösse von solcher Kleinheitsordnung ist, die zu vernachlässigen man sich bei Beginn der Rechnung vorgesetzt hat.

Angenommen, dass dem so sei, bleibt nur mehr die Behandlung der Näherungsformel

$$P = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int\limits_{(m)} dt_1\, dt_2 \cdots dt_m\, e^{-(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2)}$$

übrig.

Nachdem jede der m Integrationen zwischen numerisch gleichen und entgegengesetzt bezeichneten Grenzen zu geschehen haben wird, so kann offenbar jedes der Integrale verdoppelt und zwischen Null und dem positiven Werthe der Grenze genommen werden. Setzt man überdies zunächst allgemein

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 = u^2,$$

so folgt

$$t_m^2 = u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2,$$

$$dt_m = \frac{u\,du}{t_m},$$

$$t_m = \sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2},$$

und es kann der Ausdruck für P in der Gestalt

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma u\,du\,e^{-u^2} \int_{(m-1)} \frac{dt_1\,dt_2 \cdots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2}}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma u\,du\,e^{-u^2} . V$$

geschrieben werden, wenn man sich für den Augenblick der Abkürzung

$$V = \int_{(m-1)} \frac{dt_1\,dt_2 \cdots dt_{m-1}^2}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{u^2}} dt_1 \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2}} dt_2 \int_0^{\sqrt{u^2-t_1^2-t_2^2}} dt_3 \cdots \int_0^{\sqrt{u_1^2-t_1^2-t_2^2-\cdots t_{m-2}^2}} dt_{m-1} (u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{m-1}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

bedient. Sämmtliche Integrale, auf welche man bei Ausführung dieser Formel geführt wird, sind von der Form

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt (a - t^2)^{\frac{\delta}{2}};$$

nimmt man hier die Substitutionen

$$a - t^2 = ax, \quad t = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1 - x}, \quad dt = -\sqrt{a}\,\frac{dx}{2\sqrt{1 - x}}$$

vor, so erhält man

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\,(a - t^2)^{\frac{\delta}{2}} = \frac{a^{\frac{\delta+1}{2}}}{2} \int_0^1 x^{\frac{\delta}{2}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}} dx;$$

nachdem aber allgemein

$$\int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)},$$

ferner $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ist, so folgt wegen $p = \frac{\delta}{2} + 1$, $p = \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\,(a - t^2)^{\frac{\delta}{2}} = \frac{a^{\frac{\delta+1}{2}}}{2} \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta + 1}{2} + 1\right)}.$$

Durch $\overline{m-1}$ malige Anwendung dieser Formel, wobei der Reihe nach

t durch $\quad t_{m-1},\ t_{m-2},\ \cdots\ t_1$

und a durch $u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-2}^2,\ u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-3}^2, \cdots u^2$

und dementsprechend

$\sqrt{a}$ durch $\sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-2}^2},\ \sqrt{u^2 - t_1^2 - \cdots - t_{m-3}^2}, \cdots \sqrt{u^2}$

zu ersetzen sein wird, ergibt sich leicht

$$V = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} u^{m-2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^m \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} u^{m-2};$$

damit folgt schliesslich

$$P = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\gamma u^{m-1}\, du\, e^{-u^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der m Grössen t_i dem numerischen Werthe nach die Grenze γ überschreiten werde.

Die Ausführung dieser Formel wird zwei wesentlich verschiedene Resultate liefern, je nachdem nämlich m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Zunächst erhält man allgemein durch wiederholte Anwendung der theilweisen Integration

$$\int u^{m-1}\, du\, e^{-u^2} = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2} + \frac{m-2}{2} \int u^{m-3}\, du\, e^{-u^2},$$

$$\int u^{m-3}\, du\, e^{-u^2} = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-4} + \frac{m-4}{2} \int u^{m-5}\, du\, e^{-u^2},$$

$$\int u^{m-5}\, du\, e^{-u^2} = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-6} + \frac{m-6}{2} \int u^{m-7}\, du\, e^{-u^2},$$

. . . .

$$\int u^{m-2i-1}\, du\, e^{-u^2} = -\frac{1}{2} e^{-u^2} u^{m-2i-2} + \frac{m-2i-2}{2} \int u^{m-2i-3}\, du\, e^{-u^2};$$

multiplicirt man diese Gleichungen, von der zweiten angefangen, der Reihe nach mit

$$\frac{m-2}{2},\quad \frac{(m-2)(m-4)}{2^2},\quad \cdots\quad \frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i)}{2^i}$$

und bildet sodann ihre Summe, so folgt nach entsprechender Reduction

$$\int u^{m-1}\,du\,e^{-u^2} = -\frac{1}{2}e^{-u^2}\Big\{u^{m-2} + \frac{m-2}{2}u^{m-4}$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)}{2^2}u^{m-6} + \cdots + \frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i)}{2^i}u^{m-2i-2}\Big\}$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i-2)}{2^{i+1}}\int u^{m-2i-3}\,du\,e^{-u^2};$$

demnach ist

$$\int_0^\gamma u^{m-1}\,du\,e^{-u^2} = -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\Big\{\gamma^{m-2} + \frac{m-2}{2}\gamma^{m-4}$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)}{2^2}\gamma^{m-6} + \cdots + \frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i)}{2^i}\gamma^{m-2i-2}\Big\}$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)\cdots(m-2i-2)}{2^{i+1}}\int_0^\gamma u^{m-2i-3}\,du\,e^{-u^2}.$$

1) Für $m = 2g$ und $i = g - 2$ wird

$$m - 2i = 4,$$
$$m - 2i - 2 = 2,$$
$$m - 2i - 3 = 1;$$

daher schreibt sich in diesem Falle obige Formel, wenn man noch beachtet, dass

$$\int_0^\gamma u\,du\,e^{-u^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\gamma^2},$$

wie folgt:

$$\int_0^\gamma u^{2g-1}\,du\,e^{-u^2} = -\frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\Big\{\gamma^{2g-2} + \frac{2g-2}{2}\gamma^{2g-4}$$
$$+\frac{(2g-2)(2g-4)}{2^2}\gamma^{2g-6} + \cdots + \frac{(2g-2)(2g-4)\cdots 4}{2^{g-2}}\gamma^2\Big\}$$
$$+\frac{(2g-2)(2g-4)\cdots\cdot 4\cdot 2}{2^{g-1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\gamma^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right) - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)e^{-\gamma^2}$$
$$\times\left\{\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-6}}{\Gamma\left(\frac{2g-4}{2}\right)} + \cdots + \frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}\right\}.$$

2) Für $m = 2g - 1$ und $i = g - 2$ wird

$$m - 2i = 3,$$
$$m - 2i - 2 = 1,$$
$$m - 2i - 3 = 0;$$

man hat also in diesem Falle, von der bekannten Beziehung

$$\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right) = \frac{2g-3}{2} \cdot \frac{2g-5}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Gebrauch machend,

$$\int_0^\gamma u^{2g-2}\,du e^{-u^2} = -\frac{1}{2} e^{-\gamma^2}\left\{\gamma^{2g-3} + \frac{2g-3}{2}\gamma^{2g-5}\right.$$
$$\left. + \frac{(2g-3)(2g-5)}{2^2}\gamma^{2g-7} + \cdots + \frac{(2g-3)(2g-5)\cdots 3}{2^{g-2}}\gamma\right\}$$
$$+ \frac{(2g-3)(2g-5)\cdots 3 \cdot 1}{2^{g-1}}\int_0^\gamma e^{-u^2}\,du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)\int_0^\gamma e^{-u^2}\,du - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)e^{-\gamma^2}$$
$$\times\left\{\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-7}}{\Gamma\left(\frac{2\gamma-5}{2}\right)} + \cdots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right\}.$$

Bezeichnet man den Werth von P mit P_{2g} oder P_{2g-1}, je nachdem $m = 2g$ oder $m = 2g - 1$ ist, so ergeben sich durch Einsetzung der eben gefundenen Integralwerthe in Gleichung (15) die beiden Endformeln

$$P_{2g} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)}\int_0^\gamma u^{2g-1}\,du e^{-u^2}$$
$$= 1 - e^{-\gamma^2}\left\{\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)} + \cdots + \frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}\right\} \quad (A)$$
$$P_{2g-1} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)}\int_0^\gamma u^{2g-2}\,du e^{-u^2} \qquad (16)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-u^2}du - e^{-\gamma^2}\left\{\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)} + \cdots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right\} \quad (B)$$

Durch diese Formeln ist also die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, dass die Grössen t_i der Bedingung

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2 < \gamma^2$$

Folge leisten. Was die Ausrechnung betrifft, so sei bemerkt, dass man den ersten Theil der Formel (B) am vortheilhaftesten mit Hilfe der Tafel I. erledigen wird.

Nachdem bei gegebenem γ die negativen Antheile der rechten Seiten von (A) und (B) mit wachsender Zahl der Unbekannten zunehmen, so werden P_{2g} und P_{2g-1} gleichzeitig beständig kleiner; dies steht mit den an die Spitze der Theorie gestellten, auf die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestützten Erwägungen im Einklange.

3. Die nächste Frage wird nun dahin gerichtet sein, *dasjenige System der Coefficienten $k_{i,h}$ zu suchen, welches die an den Unbekannten haftenden Fehler mit gegebener Wahrscheinlichkeit in die engsten Grenzen einschliesst;* dieses System wird offenbar für die Bestimmung der Unbekannten oder für die Auflösung der Gleichungen (2) am vortheilhaftesten sein.

Der Lösung dieser Frage muss nothwendig die Ermittelung der der Bedingung

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2 < \gamma^2$$

entsprechenden Grenzen von r_i vorausgehen. Zunächst sei allgemein

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_m^2 = u;$$

dann soll auf Grund dieser Annahme der möglichst grösste Werth von

$$\varrho_i = h_{1,i}\, t_1 + h_{2,i}\, t_2 + \cdots + h_{i,i}\, t_i \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

abgeleitet werden.

Setzt man

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_i^2 = u - t_{i+1}^2 - t_{i+2}^2 - \cdots - t_m^2 = v, \quad \text{(b)}$$

betrachtet t_i als Function der ihm vorangehenden Variablen $t_1, t_2, \cdots t_{i'}, \cdots t_{i-1}$, wie dies der Natur der Relationen (10) entspricht, und sieht hierbei v als von diesen Variablen unabhängig an, so fordert das Minimum von ϱ_i der Gleichung (a) zufolge, dass

$$h_{i',i} + h_{i,i} \frac{\partial t_i}{\partial t_{i'}} = 0$$

werde; weiter folgt durch Differentiation von (b)

$$t_{i'} + t_i \frac{\partial t_i}{\partial t_{i'}} = 0;$$

aus der Vergleichung dieser beiden Beziehungen schliesst man

$$h_{i',i} + h_{i,i}\left(-\frac{t_{i'}}{t_i}\right) = 0,$$

woraus

$$\frac{t_{i'}}{t_i} = \frac{h_{i',i}}{h_{i,i}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

erhalten wird; d. h. das Maximum von ϱ_i verlangt die Proportionalität der Variablen $t_{i'}$ mit den zugeordneten Factoren $h_{i',i}$; setzt man, dieser Forderung Folge leistend,

$$t_{i'} = \varkappa h_{i',i}$$

und führt diese Substitution in der Gleichung (b) durch, so wird

$$\varkappa^2 (h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \cdots + h_{i,i}^2) = v,$$

oder, mit Berücksichtigung der Relationen (11),

$$\varkappa^2 b_{i,i} = v,$$

woraus der unbestimmte Factor

$$\varkappa = \sqrt{\frac{v}{b_{i,i}}}$$

gefunden wird. Das Maximum von ϱ_i ist sonach

$$\begin{aligned} \varrho_i &= h_{1,i} t_1 + h_{2,i} t_2 + \cdots + h_{i,i} t_i \\ &= \varkappa (h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \cdots + h_{i,i}^2) \\ &= \varkappa b_{i,i} = \sqrt{v b_{i,i}}, \end{aligned}$$

und da nach Gleichung (b) der höchste Werth von v gleich ist u, entsprechend nämlich dem Falle $t_{i+1} = t_{i+2} = \cdots = t_m = 0$, der höchste Werth von u aber wieder vermöge der an die Spitze gestellten Bedingung (14) gleichkommt γ^2, so sind für eine durch γ gekennzeichnete Wahrscheinlichkeit die Grenzen von ϱ_i die folgenden:

$$-\gamma \sqrt{b_{i,i}} < \varrho_i < \gamma \sqrt{b_{i,i}},$$

oder, nach Restitution des Werthes für $b_{i,i}$,

$$-\gamma \sqrt{S k_{i,h}^2} < \varrho_i < \gamma \sqrt{S k_{i,h}^2};$$

wird endlich ϱ_i durch ν_i ausgedrückt, so hat man

$$-\gamma \sqrt{Sk_{i,h}^2} < \frac{r_i - \mu_1 Sk_{i,h}}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}} < \gamma \sqrt{Sk_{i,h}^2}.$$

Die Formeln (16) drücken sonach die Wahrscheinlichkeit der Grenzen

$$\mu_1 Sk_{i,h} - \gamma \sqrt{Sk_{i,h}^2} \cdot \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)} < r_i < \mu_1 Sk_{i,h} + \gamma \sqrt{Sk_{i,h}^2} \cdot \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}$$

von r_i aus, welche Grenzen sich für den Fall, als constante Beobachtungsfehler ausgeschlossen sind, wo also $\varphi(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$ ist, wegen $\mu_1 = 0$ auf

$$-\gamma \sqrt{Sk_{i,h}^2 \cdot 2\mu_2} < r_i < \gamma \sqrt{Sk_{i,h}^2 \cdot 2\mu_2}$$

reduciren.

Aus der einen wie aus der andern Form der Grenzen geht hervor, dass sie am engsten ausfallen, wenn $Sk_{i,h}^2$ ein Minimum wird; das vortheilhafteste Factorensystem wird also der Bedingung

$$Sk_{i,h}^2 = \text{min.}$$

zu entsprechen haben.

Wir vergleichen die Factoren $k_{i,h}$ mit jenen, welche die Methode der kleinsten Quadrate an die Hand gibt und welche wir entsprechend mit $A_{i,h}$ bezeichnen wollen; die folgende Untersuchung wird den Nachweis liefern, dass obige Bedingung durch

$$k_{i,h} = A_{i,h}$$

erfüllt wird.

Von den Bedingungsgleichungen

$$a_{1,h} x_1 + a_{2,h} x_2 + \cdots + a_{i,h} x_i + \cdots = \omega_h$$

führt die Methode der kleinsten Quadrate zu den m Normalgleichungen

$$x_1 Sa_{1,h} a_{1,h} + x_2 Sa_{1,h} a_{2,h} + \cdots + x_i Sa_{1,h} a_{i,h} + \cdots = Sa_{1,h} \omega_h,$$
$$x_1 Sa_{2,h} a_{1,h} + x_2 Sa_{2,h} a_{2,h} + \cdots + x_i Sa_{2,h} a_{i,h} + \cdots = Sa_{2,h} \omega_h,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 Sa_{m,h} a_{1,h} + x_2 Sa_{m,h} a_{2,h} + \cdots + x_i Sa_{m,h} a_{i,h} + \cdots = Sa_{m,h} \omega_h;$$

um dieselben nach x_i aufzulösen, multiplicirt man die Gleichungen der Reihe nach mit vorläufig unbestimmten Coefficienten B_1, $B_2 \cdots B_m$, addirt sie und unterwirft diese Coefficienten sodann den nöthigen Bedingungen, um

$$x'_i = B_1 S a_{1,h}\omega_h + B_2 S a_{2,h}\omega_h + \cdots + B_m S a_{m,h}\omega_h$$
$$= \omega_1 \Sigma B_{i'} a_{i',1} + \omega_2 \Sigma B_{i'} a_{i',2} + \cdots + \omega_m \Sigma B_{i'} a_{i',m}$$

zu erhalten; setzt man nun

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_{i'}}} B_{i'} a_{i',h} = A_{i,h},$$

so erlangt x'_i die Form

$$x'_i = S\omega_h A_{i,h},$$

analog derjenigen, welche wir bei dem von uns durchgeführten Eliminationsverfahren erzielt haben, nämlich

$$x_i = S\omega_h k_{i,h}.$$

Vergleicht man ferner die Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{ll} S a_{1,h}\, k_{i,h} = 0, & S a_{1,h}\, A_{i,h} = 0, \\ S a_{2,h}\, k_{i,h} = 0, & S a_{2,h}\, A_{i,h} = 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ S a_{i,h}\, k_{i,h} = 1, & S a_{i,h}\, A_{i,h} = 1, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ S a_{m,h} k_{i,h} = 0, & S a_{m,h} A_{i,h} = 0, \end{array}$$

welchen die Coefficienten bei dem ersten und bei dem zweiten Verfahren unterworfen werden mussten, um zu x_i zu gelangen, zieht die correspondirenden, nachdem man der Reihe nach mit $B_1, B_2, \cdots B_i, \cdots B_m$ multiplicirt hat, von einander ab, und bildet die Summe der so entstandenen neuen Gleichungen, so wird man zu der Relation

$$S\left\{\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_{i'}}} B_{i'} a_{i',h}(k_{i,h} - A_{i,h})\right\} = 0$$

geführt, welche wegen $\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_{i'}}} B_{i'} a_{i',h} = A_{i,h}$ in

$$S\{A_{i,h}(k_{i,h} - A_{i,h})\} = 0$$

oder in

$$SA_{i,h}k_{i,h} = SA^2_{i,h}$$

sich umwandelt; folglich ist

$$Sk^2_{i,h} - 2SA_{i,h}k_{i,h} = Sk^2_{i,h} - 2SA^2_{i,h},$$
$$Sk^2_{i,h} - 2SA_{i,h}k_{i,h} + SA^2_{i,h} = Sk^2_{i,h} - SA^2_{i,h},$$

woraus schliesslich

$$Sk^2_{i,h} = SA^2_{i,h} + S(k_{i,h} - A_{i,h})^2$$

abgeleitet wird. Hieraus aber erkennt man sofort, dass

$$Sk^2_{i,h} = \min.$$

wird für

$$k_{i,h} = A_{i,h} .$$

Leitet man also die Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate ab, dann sind die Fehler r_i oder auch die Unbekannten x_i bei gegebener Wahrscheinlichkeit in die möglichst engsten Grenzen eingeschlossen.

Andererseits geht aus der Form der Grenzen von x_i hervor, dass, indem sie dieselben bleiben, γ um so beträchtlicher ausfällt, je kleiner $Sk_{i,h}^2$ ist; mit γ wächst aber auch die Wahrscheinlichkeit der Grenzen, wie man sich durch Betrachtung des nach γ genommenen, für positive Werthe von γ beständig positiven Differentialquotienten von P (Formel (15)),

$$\frac{dP}{d\gamma} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \gamma^{m-1} e^{-\gamma^2}$$

überzeugt.

Sind demnach die Grenzen gegeben, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler dieselben nicht verlässt, am grössten, wenn die Unbekannten der Bedingung $Sk_{i,h}^2 = \min.$ gemäss, d. i. dem Principe der kleinsten Quadratsummen entsprechend gerechnet wurden.

Was noch die Werthe μ_1 und μ_2 anlangt, so kann eine angenäherte Bestimmung derselben wieder in der Weise vorgenommen werden, dass man nach erfolgter Berechnung der Unbekannten die für dieselben erlangten Werthe in die Bedingungsgleichungen einführt; dadurch erhält man statt ε_i einen Werth λ_i; es kann dann mit um so grösserer Berechtigung, je beträchtlicher die Zahl n der Beobachtungen ist,

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2}{n}$$

gesetzt werden.

4. Schliesslich dürfte es von Interesse sein, die gewonnenen Formeln an einigen den Zusammenhang zwischen Fehlergrenzen und deren Wahrscheinlichkeit betreffenden Beispielen zu erklären.

1) *Fall einer Unbekannten.* Schon in der Einleitung wurde hervorgehoben, dass in diesem Falle die vorliegende

Theorie die bekannten Resultate anderer Geometer wiedergibt. In der That folgt für die Wahrscheinlichkeit der Fehlergrenzen

$$r = \mu_1 SA_h \pm \gamma \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2) SA_h^2}$$

aus Formel (15) der bekannte Ausdruck

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-u^2} du.$$

Für die wahrscheinliche Fehlergrenze, welche durch die Gleichung

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma_1} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}$$

definirt ist, ergibt sich der besondere Werth

$$\gamma_1 = 0{\cdot}4769 \cdots$$

2) *Fall zweier Unbekannten.* Hier ergibt Formel (A) für die Wahrscheinlichkeit der Fehlergrenzen

$$r_i = \mu_1 SA_{i,h} \pm \gamma \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2) SA_{i,h}^2}$$

den Ausdruck

$$P_2 = 1 - e^{-\gamma^2}.$$

Aus der Gleichung

$$P_2 = 1 - e^{-\gamma_2^2} = \frac{1}{2}$$

folgt dann für die wahrscheinlichen Grenzen

$$\gamma_2 = \sqrt{l \cdot 2} = 0{\cdot}83255461 \cdots,$$

so dass der Fehler jeder der beiden Unbekannten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwischen den Grenzen

$$r_i = \mu_1 SA_{i,h} \pm 0{\cdot}832554 \cdots \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2) SA_{i,h}^2}$$

eingeschlossen bleibt.

Will man die Fehler der beiden Unbekannten gesondert und als veränderlich betrachten, so hat man von den Beziehungen (10)

$$\varrho_1 = h_{1,1} t_1$$
$$\varrho_2 = h_{1,2} t_1 + h_{2,2} t_2$$

auszugehen; drückt man ϱ_1 und ϱ_2 durch r_1 und r_2, ferner

mit Hilfe der Relationen (11) $h_{1,1}$, $h_{1,2}$, $h_{2,2}$ durch die $b_{i,i'}$, diese wieder durch $Sk_{i,h}k_{i',h}$ aus und ersetzt in letzteren Summen die Coefficienten $k_{i,h}$ durch jene $A_{i,h}$, welche die Methode der kleinsten Quadrate liefert, so ergibt sich

$$r_1 = \mu_1 SA_{1,h} + t_1\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\, SA_{1,h}^2},$$

$$r_2 = \mu_1 SA_{2,h} + t_1\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\frac{(SA_{1,h}A_{2,h})^2}{SA_{1,h}^2}}$$

$$+ t_2\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\left(SA_{2,h}^2 - \frac{(SA_{1,h}A_{2,h})^2}{SA_{1,h}^2}\right)};$$

darin haben die Grössen t_1 und t_2, wenn $P_2 = \frac{1}{2}$ sein soll, der Bedingung

$$t_1^2 + t_2^2 < l \cdot 2 = 0{\cdot}693\,147\,18 \cdots$$

zu folgen*).

---

*) Um den Unterschied in dem Verlaufe von P_1 und P_2 zu kennzeichnen, stellen wir in der nachfolgenden Tabelle einige Werthe von

$$P_1^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{n\gamma_1} e^{-u^2}du$$

und

$$P_2^{(n)} = 1 - e^{-n\overline{\gamma}_2^2} = 1 - e^{-n^2 l\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2^{n^2}}$$

zusammen; offenbar sind $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeiten, dass bei einer, beziehungsweise zwei Unbekannten das Fehlerintervall den n-fachen Betrag des wahrscheinlichen Fehlerintervalls nicht überschreite.

n	$P_1^{(n)}$	$P_2^{(n)}$	Diff.	n	$P_1^{(n)}$	$P_2^{(n)}$	Diff.
0·0	0·00000	0·00000	0·00000	0·7	0·36317	0·28798	+ 0·07519
0·1	0·05378	0·00691	+ 0·04687	0.8	0·41052	0·35829	0·05223
0·2	0·10731	0·02735	0·07996	0·9	0·45618	0·42962	0·02656
0·3	0·16035	0·06048	0·09987	1.0	0·50000	0·50000	0·00000
0·4	0·21268	0·10498	0·10770	2·0	0·82266	0·93750	— 0·11487
0·5	0·26407	0·15910	0·10497	3·0	0·95698	0·99805	— 0·04104
0·6	0·31430	0·22084	0·09346	4·0	0·99302	0·99998	— 0·00696

An dem Gange der Differenzen erkennt man, dass bei engen Grenzen die Wahrscheinlichkeiten mehr von einander abweichen als bei weiten Grenzen; mit dem beständigen Wachsen der Grenzen nähert sich $P_1^{(n)}$ sowohl als $P_2^{(n)}$ der Einheit.

3) Nachstehend sind die den wahrscheinlichen Fehlergrenzen entsprechenden Werthe von γ_m für die Werthe 1 bis 8 von m zusammengestellt und zur besseren Uebersicht auf den Werth γ_1, welcher dem Fall einer Unbekannten entspricht, reducirt.

$$m = 1, \quad \gamma_1 = 0{\cdot}47693,$$
$$m = 2, \quad \gamma_2 = 0{\cdot}83255 = 1{\cdot}7456\,\gamma_1,$$
$$m = 3, \quad \gamma_3 = 1{\cdot}0876 \quad = 2{\cdot}2814\,\gamma_1,$$
$$m = 4, \quad \gamma_4 = 1{\cdot}29551 = 2{\cdot}7164\,\gamma_1,$$
$$m = 5, \quad \gamma_5 = 1{\cdot}4750 \quad = 3{\cdot}0927\,\gamma_1,$$
$$m = 6, \quad \gamma_6 = 1{\cdot}63525 = 3{\cdot}4287\,\gamma_1,$$
$$m = 7, \quad \gamma_7 = 1{\cdot}7812 \quad = 3{\cdot}7347\,\gamma_1,$$
$$m = 8, \quad \gamma_8 = 1{\cdot}91623 = 4{\cdot}0178\,\gamma_1.$$

III.

Ausdehnung des Bernoulli'schen Theorems auf Factoriellen von Binomen.

Aus der Factoriellentheorie ist die Beziehung

$$\frac{(a+b)^{\mu|-1}}{c^{\mu|-1}} = S\,\frac{\mu!}{m!\,n!}\,\frac{a^{m|-1}\,b^{n|-1}}{c^{\mu|-1}}$$

bekannt, in welcher $a + b = c$ und $m + n = \mu$ ist; das allgemeine Glied dieser Entwickelung,

$$T_n = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,\frac{a^{m|-1}\,b^{n|-1}}{c^{\mu|-1}},$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass aus einer Urne, welche unter $c = a + b$ Kugeln a weisse und b schwarze Kugeln enthält, in $\mu = m + n$ Ziehungen m weisse und n schwarze Kugeln gezogen werden, vorausgesetzt, dass man die jedesmal gezogene Kugel nicht wieder zurücklegt.

Dieser Formel zufolge sind die Wahrscheinlichkeiten, $m + l$ weisse und $n - l$ schwarze, dann $m - l$ weisse und $n + l$ schwarze Kugeln zu ziehen, beziehungsweise

$$T_{n-l} = \frac{\mu!}{(m+l)!(n-l)!} \frac{a^{m+l-1} b^{n-l-1}}{c^{\mu-1}},$$

$$T_{n+l} = \frac{\mu!}{(m-l)!(n+l)!} \frac{a^{m-l-1} b^{n+l-1}}{c^{\mu-1}};$$

ferner stellt die Summe

$$P = T_{n-l} + T_{n-l+1} + \cdots + T_{n-1} + T_n + T_{n+1} + \cdots + T_{n+l-1} + T_{n+l}$$

die Wahrscheinlichkeit vor, dass in μ Ziehungen höchstens $m + l$ und mindestens $m - l$ weisse Kugeln zum Vorschein kommen.

Bezeichnet man die besonderen Werthe von m und n, welche das Maximum von T_n herbeiführen, mit k und h, dieses Maximum von T_n mit M_n, die Glieder, welche diesem grössten Gliede um l Stellen vorausgehen und nachfolgen, mit M_{n-l} und M_{n+l}, so drückt

$$\left. \begin{array}{l} Q = M_{n-l} + M_{n-l+1} + \cdots + M_{n-1} + M_n + M_{n+1} \\ \quad + \cdots + M_{n+l-1} + M_{n+l} \end{array} \right\} \quad (1)$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass die Zahl der in μ Ziehungen erschienenen weissen Kugeln zwischen den Grenzen $k + l$ und $k - l$ verbleibt. Es handelt sich nun darum, einen Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung abzuleiten, dass a, b, c, m, n, l^2 sehr grosse Zahlen von gleicher Ordnung mit μ sind.

I. *Bestimmung von k, h und M_n.* Zu diesem Ende betrachten wir, ähnlich wie es beim Beweise des Bernoulli'schen Theorems geschah, die drei benachbarten Glieder

$$T_n = \frac{\mu!}{m!n!} \frac{a^{m-1} b^{n-1}}{c^{\mu-1}},$$

$$T_{n-1} = \frac{\mu!}{(m+1)!(n-1)!} \frac{a^{m+1-1} b^{n-1-1}}{c^{\mu-1}} = \frac{n}{m+1} \cdot \frac{a-m}{b-n+1} T_n,$$

$$T_{n+1} = \frac{\mu!}{(m-1)!(n+1)!} \frac{a^{m-1-1} b^{n+1-1}}{c^{\mu-1}} = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{b-n}{a-m+1} T_n;$$

die dem Maximum von T_n entsprechenden Werthe von m und n müssen dann den beiden Ungleichheiten

$$T_n > T_{n-1},$$
$$T_n > T_{n+1},$$

oder

$$1 > \frac{n}{m+1} \cdot \frac{a-m}{b-n+1}, \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$1 > \frac{m}{n+1} \cdot \frac{b-n}{a-m+1} \dots\dots\dots\dots (3)$$

Genüge leisten.

Ersetzt man in diesen zuerst m und a durch $\mu - n$ und $c - b$ und löst sie nach n auf, so ergibt sich

$$n > \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2} - 1,$$

$$n < \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2};$$

daher ist

$$n = \frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2} - \delta, \quad \delta < 1,$$

d. h. die grösste in $\frac{(\mu+1)(b+1)}{c+2}$ enthaltene *ganze* Zahl ist gleich dem gesuchten h.

Eliminirt man sodann aus den Ungleichheiten (2) und (3) n und b, so liefert die Auflösung nach m die Beziehungen

$$m > \frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2} - 1,$$

$$m < \frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2};$$

demnach ist

$$m = \frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2} - \delta', \quad \delta' < 1$$

zu setzen, d. h. die grösste in $\frac{(\mu+1)(a+1)}{c+2}$ enthaltene *ganze* Zahl ist das verlangte k.

Zwischen den dem Maximum von T_n entsprechenden Werthen von m und n bestehen demnach die folgenden Beziehungen:

$$\frac{b}{c+2} = \frac{n}{\mu+1} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta}{\mu+1},$$

$$\frac{a}{c+2} = \frac{m}{\mu+1} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta'}{\mu+1},$$

aus welchen weiter

$$\frac{b}{c} - \frac{2b}{c(c+2)} = \frac{n}{\mu} - \frac{n}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta}{\mu+1},$$

$$\frac{a}{c} - \frac{2a}{c(c+2)} = \frac{m}{\mu} - \frac{m}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{c+2} + \frac{\delta'}{\mu+1}$$

folgt; unter den über das Grössenverhältniss von a, b, c, m, n, μ gemachten Voraussetzungen kann bei Vernachlässigung von Gliedern der Grössenordnung $\frac{1}{\mu}$

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{\mu},$$

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{\mu}$$

geschrieben werden; *in dem maximalen Gliede der Entwickelung von* $\frac{(a+b)^{\mu|-1}}{c^{\mu|-1}}$ *stehen also die Wiederholungszahlen der beiden einfachen Ereignisse im Verhältniss der ursprünglichen Anzahlen der ihnen günstigen Fälle, und zwar mit einem um so höheren Grade der Annäherung, je grösser* μ *und die übrigen Zahlen gleicher Ordnung sind.*

Aus den beiden letztangeschriebenen Gleichungen leitet man leicht ab:

$$\frac{a-m}{c-\mu} = \frac{m}{\mu}, \qquad \frac{b-n}{c-\mu} = \frac{n}{\mu},$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m} = 1, \qquad \frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n} = 1, \\ &\frac{mn}{\mu^2} = \frac{ab}{c^2}, \quad (a-m)(b-n) = \frac{ab}{c^2}(c-\mu)^2, \\ &\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a-m}{c-\mu} = 1, \qquad \frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu} = 1. \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

Es handelt sich nun um die Bestimmung von M_n. Entwickelt man die einzelnen Theile des Gliedes

$$T_n = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,\frac{a^{m|-1}b^{n|-1}}{c^{\mu|-1}} = \frac{\mu!}{m!\,n!}\,\frac{a!}{(a-m)!}\,\frac{b!}{(b-n)!}\,\frac{(c-\mu)!}{c!}$$

mit Hilfe der Formel

$$x! = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x},$$

so wird

$$T_n = \left(\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a-m}{c-\mu}\right)^m \left(\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\right)^n \left(\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\right)^a \left(\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\right)^b$$

$$\times\sqrt{\frac{\mu a b (c-\mu)}{2\pi c m n (a-m)(b-n)}}; \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

für das Maximum M_n von T_n gelten aber die Beziehungen (a); daher ist

$$M_n = \sqrt{\frac{c^3}{2\pi\mu a b(c-\mu)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Aus Formel (4) ergibt sich nun

$$T_{n-l} = \left[\frac{\mu}{m+l}\cdot\frac{a-m-l}{c-\mu}\right]^{m+l}\left[\frac{\mu}{n-l}\cdot\frac{b-n+l}{c-\mu}\right]^{n-l}$$

$$\times\left[\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m-l}\right]^{a}\left[\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n+l}\right]^{b}\sqrt{\frac{\mu a b(c-\mu)}{2\pi c(m+l)(n-l)(a-m-l)(b-n+l)}}$$

$$= \left[\frac{\mu}{m}\cdot\frac{a-m}{c-\mu}\cdot\frac{1-\frac{l}{a-m}}{1+\frac{l}{m}}\right]^{m+l}\left[\frac{\mu}{n}\cdot\frac{b-n}{c-\mu}\cdot\frac{1+\frac{l}{b-n}}{1-\frac{l}{n}}\right]^{n-l}$$

$$\times\left[\frac{a}{c}\cdot\frac{c-\mu}{a-m}\cdot\frac{1}{1-\frac{l}{a-m}}\right]^{a}\left[\frac{b}{c}\cdot\frac{c-\mu}{b-n}\cdot\frac{1}{1+\frac{l}{b-n}}\right]^{b}$$

$$\times\sqrt{\frac{\mu a b(c-\mu)}{2\pi c m n(a-m)(b-n)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{l}{m}\right)\left(1-\frac{l}{n}\right)\left(1-\frac{l}{a-m}\right)\left(1+\frac{l}{b-n}\right)}}$$

bringt man hier die Beziehungen (a) zur Geltung, so verwandelt sich T_{n-l} in M_{n-l}; es ist demnach

$$M_{n-l} = \left[\frac{1-\frac{l}{a-m}}{1+\frac{l}{m}}\right]^{m+l}\left[\frac{1+\frac{l}{b-n}}{1-\frac{l}{n}}\right]^{n-l}\left[\frac{1}{1-\frac{l}{a-m}}\right]^{a}\left[\frac{1}{1+\frac{l}{b-n}}\right]^{b}$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{2\pi\mu a b(c-\mu)}}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{l}{m}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{l}{n}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{l}{a-m}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{l}{b-n}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left[1-\frac{l}{a-m}\right]^{m-a-\frac{1}{2}+l}\left[1+\frac{l}{b-n}\right]^{n-b-\frac{1}{2}-l}}{\left[1+\frac{l}{m}\right]^{m+\frac{1}{2}+l}\left[1-\frac{l}{n}\right]^{n+\frac{1}{2}-l}}\, M_n; \quad \ldots (6)$$

daraus fliesst durch blosse Vertauschung des Vorzeichens von l

$$M_{n+l} = \frac{\left[1+\frac{l}{a-m}\right]^{m-a-\frac{1}{2}-l}\left[1-\frac{l}{b-n}\right]^{n-b-\frac{1}{2}+l}}{\left[1-\frac{l}{m}\right]^{m+\frac{1}{2}-l}\left[1+\frac{l}{n}\right]^{n+\frac{1}{2}+l}}\, M_n \,.\,. (6')$$

Logarithmirt man die beiden Ausdrücke (6) und (6′), so ergibt sich

$$l\cdot M_{n-l}=(m-a-\tfrac{1}{2}+l)l\cdot\left\{1-\frac{l}{a-m}\right\}+(n-b-\tfrac{1}{2}-l)l\cdot\left\{1+\frac{l}{b-n}\right\}$$

$$-(m+\tfrac{1}{2}+l)l\cdot\left\{1+\frac{l}{m}\right\}-(n+\tfrac{1}{2}-l)l\cdot\left\{1-\frac{l}{n}\right\}$$

$$=-\frac{(m-a-\frac{1}{2})l+l^2}{a-m}-\frac{(m-a-\frac{1}{2})l^2+l^3}{2(a-m)^2}-\cdots+\frac{(n-b-\frac{1}{2})l-l^2}{b-n}$$

$$-\frac{(n-b-\frac{1}{2})l^2-l^3}{2(b-n)^2}+\cdots-\frac{(m+\frac{1}{2})l+l^2}{m}+\frac{(m+\frac{1}{2})l^2+l^3}{2m^2}-\cdots$$

$$+\frac{(n+\frac{1}{2})l-l^2}{n}+\frac{(n+\frac{1}{2})l^2-l^3}{2n^2}+\cdots+l\cdot M_n,$$

$$l\cdot M_{n+l}=-\frac{-(m-a-\frac{1}{2})\,l+l^2}{a-m}-\frac{(m-a-\frac{1}{2})\,l^2-l^3}{2\,(a-m)^2}-\cdots$$

$$+\frac{-(n-b-\frac{1}{2})\,l-l^2}{b-n}-\frac{(n-b-\frac{1}{2})\,l^2+l^3}{2\,(b-n)^2}+\cdots$$

$$-\frac{-(m+\frac{1}{2})\,l+l^2}{m}+\frac{(m+\frac{1}{2})\,l^2-l^3}{2\,m^2}-\cdots+\frac{(n+\frac{1}{2})\,l-l^2}{n}$$

$$+\frac{(n+\frac{1}{2})\,l^2+l^3}{2\,n^2}+\cdots+l\cdot M_n;$$

summirt man diese zwei Gleichungen, so heben sich die ungeraden Potenzen von l auf und man erhält nach einiger Reduction

$$l\cdot M_{n-l}+l\cdot M_{n+l}=2l\cdot M_n-\frac{l^2}{a-m}+\frac{l^2}{2(a-m)^2}+\cdots$$

$$-\frac{l^2}{b-n}+\frac{l^2}{2(b-n)^2}+\cdots-\frac{l^2}{m}+\frac{l^2}{2m^2}+\cdots-\frac{l^2}{n}+\frac{l^2}{2n^2}+\cdots;$$

die Glieder $\frac{l^2}{2(a-m)^2}$, $\frac{l^2}{2(b-n)^2}$, $\frac{l^2}{2m^2}$, $\frac{l^2}{2n^2}$ sind sämmtlich von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ und daher zu vernachlässigen; es verbleibt dann

$$l\cdot M_{n-l}+l\cdot M_{n+l}=2l\cdot M_n-\frac{l^2}{a-m}-\frac{l^2}{b-n}-\frac{l^2}{m}-\frac{l^2}{n},$$

woraus weiter mit Beachtung der hier geltenden Beziehungen (a)

$$l \cdot M_{n-l} + l \cdot M_{n+l} = 2l \cdot M_n - 2l^2 \left\{ \frac{c-\mu}{2(a-m)(b-n)} + \frac{\mu}{2mn} \right\}$$

$$= 2l \cdot M_n - 2\frac{l^2 c^3}{2ab\mu(c-\mu)} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

erhalten wird. Aus den Identitäten

$$M_{n-l} = M_n e^{l \cdot M_{n-l} - l \cdot M_n},$$

$$M_{n+l} = M_n e^{l \cdot M_{n+l} - l \cdot M_n},$$

folgt aber durch Entwickelung der Exponentiellen bei Beschränkung auf die erste Potenz des Exponenten

$$M_{n-l} = M_n \{1 + l \cdot M_{n-l} - l \cdot M_n\},$$

$$M_{n+l} = M_n \{1 + l \cdot M_{n+l} - l \cdot M_n\};$$

addirt man diese Gleichungen und macht von der Formel (7) Gebrauch, so wird schliesslich

$$M_{n-l} + M_{n+l} = M_n \{2 + l \cdot M_{n-l} + l \cdot M_{n+l} - 2l \cdot M_n\}$$

$$= 2M_n \left\{1 - \frac{l^2 c^3}{2ab\mu(c-\mu)}\right\} \quad .$$

$$= 2M_n e^{-\frac{l^2 c^3}{2ab\mu(c-\mu)}} \text{*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

II. *Bestimmung von Q.*

Schreibt man Gleichung (1) in der Form

$$Q = M_{n-l} + M_{n+l} + \overset{l-1}{\underset{0}{S}}(M_{n-l} + M_{n+l}) - M_n,$$

bemerkt ferner, dass $\overset{p}{\underset{0}{S}} y = \overset{p+1}{\underset{0}{\Sigma}} y$, so wird

$$Q = M_{n-l} + M_{n+l} + \overset{l}{\underset{0}{\Sigma}}(M_{n-l} + M_{n+l}) - M_n \quad . (9)$$

Bevor wir Gleichung (8) hier einführen, mag zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{c^3}{2ab\mu(c-\mu)}} = \sqrt{g}$$

*) Für eine vollständigere Entwickelung dieser Formel vergleiche man den folgenden Zusatz.

gesetzt werden; es ist dann, den Formeln (5) und (8) gemäss,

$$M_n = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}},$$

$$M_{n-l} + M_{n+l} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-gl^2} = \varphi(l),$$

woraus

$$\varphi(0) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} = 2\, M_n$$

abgeleitet wird; mit diesen Bezeichnungen schreibt sich Formel (9) wie folgt:

$$Q = \varphi(l) + \sum_0^l \varphi(l) - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Nach Euler's (Mac-Laurin's) Summenformel ist aber näherungsweise

$$\sum_0^l \varphi(l) = \int_0^l \varphi(l)\, dl - \frac{1}{2}[\varphi(l) - \varphi(0)];$$

wendet man dies auf den obigen Ausdruck an, so wird

$$Q = \varphi(l) + \int_0^l \varphi(l)\, dl - \frac{1}{2}\varphi(l)\, dl + \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2}\varphi(0)$$

$$= \int_0^l \varphi(l)\, dl + \frac{1}{2}\varphi(l) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Setzt man ferner

$$gl^2 = u^2, \quad l = \frac{u}{\sqrt{g}}, \quad dl = \frac{du}{\sqrt{g}},$$

so wird

$$\varphi(l) = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-gl^2} = \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

und

$$\varphi(l)\, dl = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} du;$$

mithin hat man schliesslich

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u du e^{-u^2} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u du\, e^{-u^2} + \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi \frac{ab\mu(c-\mu)}{c^3}}} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Dies also ist die Wahrscheinlichkeit, dass die in μ Versuchen, bei welchen die gezogene Kugel nicht wieder in die Urne zurückgelegt wird, erschienene Anzahl m weisser Kugeln zwischen $k \pm l$ oder zwischen

$$k \pm u \sqrt{\frac{2ab\mu\,(c-\mu)}{c^3}}$$

enthalten ist; dabei bedeutet k die grösste in $\frac{(\mu+1)\,(a+1)}{c+2}$ enthaltene ganze Zahl.

Beispiel. Es sei

$$a = 4775, \quad b = 3225, \quad c = a + b = 8000, \quad \mu = 1000;$$

man verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der in den 1000 Ziehungen erschienenen weissen Kugeln zwischen den Grenzen

$$k \pm 13$$

eingeschlossen sein wird.

Der Rechnungsgang ist im Allgemeinen mit dem in Nr. 54 übereinstimmend. Zunächst ergibt sich

$$k = 597;$$

ferner erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{2ab\mu\,(c-\mu)}{c^3}} = 20{\cdot}5201,$$

womit wieder, da

$$l = \frac{u}{\sqrt{g}} = 13$$

sein soll, für u der Werth

$$u = 0{\cdot}6335$$

gefunden wird. Nun können sofort die beiden Theile von Q gerechnet werden, der erste mit Benützung von Tafel I., der zweite auf logarithmischem Wege; und zwar ist

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u du e^{-u^2} = 0{\cdot}62969,$$

$$\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{2\pi \frac{ab\mu\,(c-\mu)}{c^3}}} = 0{\cdot}15775,$$

woraus durch Summirung

$$Q = 0{\cdot}78744$$

folgt. Man kann also nahe 26 gegen 7 wetten, dass in 1000 Ziehungen nicht weniger als 584 und nicht mehr als 610 weisse Kugeln zum Vorschein kommen.

Zusatz, betreffend die Entwickelung der Formel (8) bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$.

Die Entwickelung der einzelnen Factoren der Formel (6) kann auch in folgender Weise vorgenommen werden:

$$\left[1 - \frac{l}{a-m}\right]^{m-a-\frac{1}{2}+l} = e^{\left(m-a-\frac{1}{2}+l\right) l \cdot \left[1-\frac{l}{a-m}\right]}$$

$$= e^{\frac{\left(a-m-\frac{1}{2}\right) l - l^2}{a-m} + \frac{\left(a-m+\frac{1}{2}\right) l^2 - l^3}{2(a-m)^2} + \frac{\left(a-m+\frac{1}{2}\right) l^3 - l^4}{3(a-m)^3}},$$

$$\left[1 + \frac{l}{b-n}\right]^{n-b-\frac{1}{2}-l} = e^{\left(n-b-\frac{1}{2}-l\right) l \cdot \left[1+\frac{l}{b-n}\right]}$$

$$= e^{-\frac{\left(b-n+\frac{1}{2}\right) l + l^2}{b-n} + \frac{\left(b-n+\frac{1}{2}\right) l^2 + l^3}{2(b-n)^2} - \frac{\left(b-n+\frac{1}{2}\right) l^3 + l^4}{3(b-n)^3}},$$

$$\left[1 + \frac{l}{m}\right]^{-\left(m+\frac{1}{2}+l\right)} = e^{-\left(m+\frac{1}{2}+l\right) l \cdot \left[1+\frac{l}{m}\right]}$$

$$= e^{-\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right) l + l^2}{m} + \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right) l^2 + l^3}{2m^2} - \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right) l^3 + l^4}{3m^3}},$$

$$\left[1 - \frac{l}{n}\right]^{-\left(n+\frac{1}{2}-l\right)} = e^{-\left(n+\frac{1}{2}-l\right) l \cdot \left[1-\frac{l}{n}\right]}$$

$$= e^{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) l - l^2}{n} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) l^2 - l^3}{2n^2} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) l^3 - l^4}{3n^3}};$$

führt man diese Ausdrücke in der erwähnten Formel ein, so wird

$$M_{n-l} = M_n e^{\left\{\begin{array}{l} \frac{\left(a-m+\frac{1}{2}\right)l-l^2}{a-m} + \frac{\left(a-m+\frac{1}{2}\right)l^2-l^3}{2(a-m)^2} + \frac{\left(a-m+\frac{1}{2}\right)l^3-l^4}{3(a-m)^3} - \frac{\left(b-n+\frac{1}{2}\right)l+l^2}{b-n} \\ + \frac{\left(b-n+\frac{1}{2}\right)l^2+l^3}{2(b-n)^2} - \frac{\left(b-n+\frac{1}{2}\right)l^3+l^4}{3(b-n)^3} - \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)l+l^2}{m} + \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)l^2+l^3}{2m^2} \\ - \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)l^3+l^4}{3m^3} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)l-l^2}{n} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)l^2-l^3}{2n^2} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)l^3-l^4}{3n^3} \end{array}\right\}}$$

$$= M_n\Big[1 + \frac{(a-m+\frac{1}{2})l-l^2}{a-m} + \frac{(a-m+\frac{1}{2})l^2-l^3}{2(a-m)^2} + \frac{(a-m+\frac{1}{2})l^3-l^4}{3(a-m)^3}$$

$$- \frac{(b-n+\frac{1}{2})l+l^2}{b-n} + \frac{(b-n+\frac{1}{2})l^2+l^3}{2(b-n)^2} - \frac{(b-n+\frac{1}{2})l^3+l^4}{3(b-n)^3}$$

$$- \frac{(m+\frac{1}{2})l+l^2}{m} + \frac{(m+\frac{1}{2})l^2+l^3}{2m^2} + \frac{(m+\frac{1}{2})l^3+l^4}{3m^3}$$

$$+ \frac{(n+\frac{1}{2})l-l^2}{n} + \frac{(n+\frac{1}{2})l^2-l^3}{2n^2} + \frac{(n+\frac{1}{2})l^3-l^4}{3n^3}\Big].$$

Um M_{n+l} zu erhalten, hätte man nur in allen Gliedern das Vorzeichen von l zu ändern; der Erfolg ist aber klar, die Glieder mit geraden Potenzen bleiben unverändert, die mit ungeraden Potenzen wechseln ihr Zeichen, so dass bei der Summirung von M_{n-l} und M_{n+l} erstere sich verdoppeln, letztere ausfallen; man erhält sonach

$$M_{n-l} + M_{n+l} = 2M_n\Big[1 - \frac{l^2}{a-m} + \frac{l^2}{2(a-m)} + \frac{l^2}{4(a-m)^2}$$

$$- \frac{l^4}{3(a-m)^3} - \frac{l^2}{b-n} + \frac{l^2}{2(b-n)} + \frac{l^2}{4(b-n)^2} - \frac{l^4}{3(b-n)^3}$$

$$- \frac{l^2}{m} + \frac{l^2}{2m} + \frac{l^2}{4m^2} - \frac{l^4}{3m^3} - \frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{2n} + \frac{l^2}{4n^2} - \frac{l^4}{3n^3}\Big];$$

nach Fortlassung der Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ und entsprechender Reduction verbleibt

$$M_{n-l} + M_{n+l} = 2M_n\left\{1 - \frac{l^2}{2(a-m)} - \frac{l^2}{2(b-n)} - \frac{l^2}{2m} - \frac{l^2}{2n}\right\},$$

woraus zunächst

$$M_{n-l} + M_{n+l} = 2M_n\left[1 - l^2\left\{\frac{1}{2(a-m)} + \frac{1}{2(b-n)} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}\right\}\right]$$

$$= 2M_n\left[1 - l^2\left\{\frac{c-\mu}{2(a-m)(b-n)} + \frac{\mu}{2mn}\right\}\right]$$

und nach Anwendung der Relationen (a)

$$M_{n-l} + M_{n+l} = 2 M_n \left[1 - l^2 \left\{\frac{c^2}{2ab(c-\mu)} + \frac{c^2}{2ab\mu}\right\}\right]$$

$$= 2 M_n \left[1 - l^2 \frac{\mu c^2 + c^2 (c-\mu)}{2ab\mu (c-\mu)}\right]$$

$$= 2 M_n \left[1 - \frac{l^2 c^3}{2ab\mu (c-\mu)}\right]$$

erhalten wird. Daraus endlich ergibt sich, in Uebereinstimmung mit Formel (8),

$$M_{n-l} + M_{n+l} = 2 M_n e^{-\frac{l^2 c^3}{2ab\mu (c-\mu)}}.$$

Anmerkungen.

I.

(Zu pag. 46, 98, 185.)

Stirling'sche Formel. Diese Formel stellt die Facultät einer sehr grossen Zahl n als Function von n dar, und zwar ist mit um so höherem Grade der Annäherung, je grösser n,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Der Beweis hiefür findet sich in Anmerk. III, zweiter Fall, drittes Beispiel.

II.

(Zu pag. 90, 191.)

Reversionsformel von Lagrange. Die Function z der beiden unabhängigen Variabeln x und α sei implicite gegeben in der Form

$$z = x + \alpha f(z); \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

es soll die Function $F(z)$ von z durch eine nach Potenzen von α aufsteigende Reihe dargestellt werden.

Dem Mac-Laurin'schen Theorem zufolge ist, indem man $F(z)$ als Function von α auffasst,

$$F(z) = [F(z)]_{\alpha=0} + \frac{\alpha}{1}\left[\frac{dF(z)}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\left[\frac{d^2F(z)}{d\alpha^2}\right]_{\alpha=0} + \cdots$$

$$= S\frac{\alpha^i}{1\cdot 2\cdots i}\left[\frac{d^iF(z)}{d\alpha^i}\right]_{\alpha=0}, \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

die Summe von $i = 0$ an genommen.

Differentiirt man Gleichung (1) nach den beiden unabhängigen Variablen x und α, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \quad 1 + \alpha \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = f(z) + \alpha \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{d\alpha};$$

eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen α, was am bequemsten dadurch geschieht, dass man die erste mit $\frac{dz}{d\alpha}$, die zweite mit $\frac{dz}{dx}$ multiplicirt und hierauf beide subtrahirt, so ergibt sich

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{dz}{dx} f(z),$$

und durch Multiplication mit $\frac{dF(z)}{dz}$ weiter

$$\frac{dF(z)}{d\alpha} = \frac{dF(z)}{dx} f(z). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nun ist allgemein

$$\frac{d\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^n\right]}{d\alpha}$$

$$= \frac{d^2F(z)}{dx^2} \cdot \frac{dx}{d\alpha}\{f(z)\}^n + n \frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^{n-1} \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{d\alpha}$$

$$= \frac{d^2F(z)}{dx \cdot d\alpha}\{f(z)\}^n + n \frac{dF(z)}{d\alpha}\{f(z)\}^{n-1} \frac{df(z)}{dx}$$

$$= \frac{d\left[\frac{dF(z)}{d\alpha}\{f(z)\}^n\right]}{dx};$$

daher, wenn man von der Relation (3) Gebrauch macht,

$$\frac{d\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^n\right]}{d\alpha} = \frac{d\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^{n+1}\right]}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Unter steter Beachtung dieser Beziehung ergibt nun die wiederholte Differentiation von (3) nach α

$$\frac{d^2F(z)}{d\alpha^2} = \frac{d\left[\frac{dF(z)}{dx} f(z)\right]}{d\alpha} = \frac{d\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^2\right]}{dx},$$

$$\frac{d^3F(z)}{d\alpha^3} = \frac{d\left[\frac{d\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^2\right]}{d\alpha}\right]}{dx} = \frac{d^2\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^3\right]}{dx^2},$$

$$\frac{d^3 F(z)}{d\alpha^3} = \frac{d^2\left[\frac{d\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^3\right]}{d\alpha}\right]}{dx^2} = \frac{d^3\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(x)\}^4\right]}{dx^3},$$

. . . .

$$\frac{d^i F(z)}{d\alpha^i} = \frac{d^{i-1}\left[\frac{dF(z)}{dx}\{f(z)\}^i\right]}{dx^{i-1}};$$

daraus folgt schliesslich, wenn man bedenkt, dass zufolge der Gleichung (1) die Werthe $\alpha = 0$ und $z = x$ einander entsprechen,

$$\left[\frac{d^i F(z)}{d\alpha^i}\right]_{=0} = \frac{d^{i-1}[F'(x)\{f(x)\}^i]}{dx^{i-1}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die Gleichung (2), so ergibt sich

$$F(z) = S\frac{\alpha^i}{1\cdot 2\cdots i}\cdot\frac{d^{i-1}[F'(x)\{f(x)\}^i]}{dx^{i-1}}$$

$$= F(x) + \frac{\alpha}{1}F'(x)f(x) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d[F'(x)\{f(x)\}^2]}{dx}$$

$$+ \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2[F'(x)\{f(x)\}^3]}{dx^2} + \cdots \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

Zusatz. Für den besonderen Fall $F(z) = z$ ist $F(x) = x$ und $F'(x) = 1$, man hat also

$$z = S\frac{\alpha^i}{1\cdot 2\cdots i}\frac{d^{i-1}\{f(x)\}^i}{dx^{i-1}}$$

$$= x + \frac{\alpha}{1}f(x) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d\{f(x)\}^2}{dx} + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2\{f(x)\}^3}{dx^2} + \cdots \text{(II)}$$

III.

Laplace's Methode zur näherungsweisen Integration von Differentialausdrücken, welche Factoren mit sehr hohen Exponenten enthalten.

A. Einfache Integrale.

Die Integrale, um die es sich hier handelt, sind von der Form $\int_a^b y\,dx$; dabei ist y im Allgemeinen ein Product aus

Functionen der Variabeln x, von denen eine wenigstens zu einer sehr hohen Potenz erhoben ist. Man kann daher allgemein

$$y = \varphi(x) \{ f(x) \}^s \{ f_1(x) \}^{s_1} \cdots$$

setzen, wobei unter $s, s_1, \cdots$ sehr grosse Zahlen zu verstehen sind. Da jedoch die Function φ auf die Convergenz der Reihe, in welche das Integral verwandelt wird, keinen Einfluss üben soll, so setzen wir y einfach in der Form

$$y = \{ f(x) \}^s$$

voraus.

Erster Fall. $\frac{dy}{dx}$ *wird für keine der Integrationsgrenzen sehr klein, oder, was dasselbe besagt, die Integration erfolgt nicht in einem dem Maximum von y benachbarten Gebiete.*

Problem. Ist $y = \{ f(x) \}^s$, und s eine sehr grosse Zahl, so verwandle man

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

in eine convergente Reihe; vorausgesetzt wird, dass weder $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1}$ noch $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2}$ sehr klein sei.

Lösung. Bedeutet α einen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth, für welchen jedoch y nicht discontinuirlich wird, so ist

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{x_1}^{\alpha} y\,dx - \int_{x_2}^{\alpha} y\,dx.$$

In dem ersten dieser Integrale setzen wir

$$y = [f(x_1)]^s e^{-t} = y_1 e^{-t},$$

im zweiten

$$y = [f(x_2)]^s e^{-t} = y_2 e^{-t}.$$

Ist α insbesondere derjenige Werth von x, für welchen y Null wird, so entsprechen den Grenzen x_1 und α einerseits und x_2 und α andererseits jene 0 und ∞ der neuen Variablen t, und es wird

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt - y_2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dx}{dt}\,dt. \quad (1)$$

Für $\frac{dx}{dt}$, welches ebenso wie x eine Function der Variablen t ist, ergibt der Satz von Mac-Laurin die Reihe

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + t\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t=0} + \cdots;$$

führt man dies in Gleichung (1) ein, beachtend, dass im ersten Integrale rechts die Werthe $t = 0$ und $x = x_1$, im zweiten die Werthe $t = 0$ und $x = x_2$ einander entsprechen, so erhält man

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1 \int_0^\infty e^{-t}\,dt\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} + t\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_1} + \cdots\right\}$$

$$- y_2 \int_0^\infty e^{-t}\,dt\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_2} + t\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_2} + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_2} + \cdots\right\}.$$

Wird hier von der bekannten Formel

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-t}\,dt = 1\cdot 2\cdots\overline{\mu-1}$$

Gebrauch gemacht, so schreibt sich letztere Gleichung auch

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_1} + \cdots\right\}$$

$$- y_2\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_2} + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{x_2} + \cdots\right\}. \quad \text{(I)}$$

Nun gibt $y = y_1 e^{-t}$ oder $y = y_2 e^{-t}$, wenn man logarithmirt und hierauf differentiirt,

$$\frac{dy}{y} = -\,dt,$$

woraus weiter

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = v$$

folgt; daraus leitet sich durch fortgesetzte Differentiation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dv\,\frac{dv}{dx}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv\,\frac{dv}{dx}}{dx} = v\,\frac{dvdv}{dx^2}, \text{ u. s. w.}$$

ab. Setzt man diese Ausdrücke in die Formel (I) ein und hebt gleichzeitig den gemeinschaftlichen Factor v_{x_1}, beziehungsweise v_{x_2} heraus, so ergibt sich

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1 v_{x_1}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_1} + \left(\frac{v\,\frac{dv}{dx}}{dx}\right)_{x_1} + \cdots\right\}$$

$$- y_2 v_{x_2}\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} + \left(\frac{v\,\frac{dv}{dx}}{dx}\right)_{x_2} + \cdots\right\}, \quad \text{(I')}$$

oder, nach Einführung des Werthes für v:

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_2\left(\frac{y}{\frac{dy}{dx}}\right)_{x_2}\left\{1 - \left[\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]_{x_2} + \cdots\right\}$$

$$- y_1\left(\frac{y}{\frac{dy}{dx}}\right)_1\left\{1 - \left[\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]_{x_1} + \cdots\right\}, \quad \text{(I'')}$$

oder endlich, wenn $y = \{f(x)\}^s$ genommen wird:

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{\{f(x_2)\}^{s+1}}{s f'(x_2)}\left\{1 - \frac{\{f'(x_2)\}^2 - f(x_2) f''(x_2)}{s\{f(x_2)\}^2} + \cdots\right\}$$

$$- \frac{\{f(x_1)\}^{s+1}}{s f'(x_1)}\left\{1 - \frac{\{f'(x_1)\}^2 - f(x_1) f''(x_1)}{s\{f(x_1)\}^2} + \cdots\right\}. \quad \text{(I''')}$$

Es erübrigt noch zu zeigen, dass die abgeleiteten Reihen unter den im Problem gestellten Bedingungen convergiren. Wenn nämlich s eine sehr grosse Zahl ist, so wird

$$v = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{\{f(x)\}^s}{s\{f(x)\}^{s-1} f'(x)} = -\frac{1}{s\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

als von der Ordnung $\frac{1}{s}$ sehr klein; $\frac{dv}{dx}$, $\frac{v\frac{dv}{dx}}{dx}$, $\cdots$ sind, wie man sich leicht überzeugt, beziehungsweise von der Ordnung $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$, $\cdots$; die Reihen convergiren also sehr rasch.

Diese Betrachtung gilt aber nur insolange, als $\frac{dy}{dx}$ oder $f'(x)$ für $x = x_1$ oder $x = x_2$ nicht sehr klein ausfällt, weil

sonst der Nenner von v als Product aus einer sehr grossen und einer sehr kleinen Zahl so klein werden könnte, dass die Reihen aufhören würden convergent zu sein.

Beispiel I. Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)^{r-1}dx$$

unter der Voraussetzung eines sehr hohen Werthes von r zu entwickeln.

Wir wollen hier von der Formel (I) Gebrauch machen. Nachdem

$$y = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)^{r-1}$$

für $x = x_2 = \infty$ verschwindet, also $y_2 = 0$ ist, so kommt nur der erste Theil der rechten Seite dieser Formel zur Anwendung. Weil ferner

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)^{r-2}\left(p(1+s)e^{-\frac{s}{r}x}+(1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right)$$

für $x = x_1 = 0$ den endlichen Werth

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = -\left(1+ps+\frac{s}{r}(1-p)\right)$$

annimmt, so ist den Bedingungen, unter welchen die entwickelte Methode Anwendung finden darf, entsprochen.

Man hat daher, indem

$$y = y_1 e^{-t} = e^{-t}$$

gesetzt wird, — für $x = x_1 = 0$ wird nämlich $y = y_1 = 1$, —

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = y_1\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1}+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1}+\cdots\right\}. \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Aus

$$e^{-t} = e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}}+1-p\right)^{r-1}$$

folgt nun

$$t = \frac{r+s}{r}x-(r-1)l\cdot\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)$$

und hieraus

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{s}{r} + (r-1)\frac{pe^{-\frac{s}{r}x}\cdot\frac{s}{r}}{pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p}$$

$$= \frac{p(1+s)e^{-\frac{s}{r}x} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)}{pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p},$$

somit

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p}{p(1+s)e^{-\frac{s}{r}x} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)}$$

und

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_1} = \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}}.$$

Ferner ergibt sich

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{p(1-p)(r-1)\frac{s^2}{r^2}e^{-\frac{s}{r}x}}{\left[p(1+s)e^{-\frac{s}{r}x} + (1-p)\left(1+\frac{s}{r}\right)\right]^2}$$

und daraus

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_1} = \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}}\cdot\frac{p(1-p)(r-1)\frac{s^2}{r^2}}{\left[1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right]^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Formel (α) ein, so wird

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r+s}{r}x}\left(pe^{-\frac{s}{r}x}+1-p\right)^{r-1}dx$$

$$= \frac{1}{1+ps+(1-p)\frac{s}{r}}\left\{1+\frac{p(1-p)s^2\left(1-\frac{1}{r}\right)}{r\left[1+ps+(1-p)\frac{s}{r}\right]^2}+\cdots\right\}.$$

Mit wachsendem r nähert sich dieser Werth der Grenze $\frac{1}{1+ps}$. (Vergl. Nr. 65, pag. 158.)

Beispiel II. Das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q \, dx$$

unter der Voraussetzung, dass p und q sehr grosse Zahlen sind, in eine convergente Reihe zu entwickeln.

Nachdem für $x = x_1 = 0$ wieder $y = y_1 = 0$ wird, so entfällt der erste Theil der rechten Seite in der Formel (I'), von welcher wir Gebrauch machen wollen. Ferner wird für $x = x_2 = \frac{1}{2}$

$$y = y_2 = \frac{1}{2^{q+p}},$$

und aus

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1} \{p - (p-q)x\}$$

folgt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_2} = \frac{p-q}{2^{p+q-1}};$$

es hängt nun von dem Grössenverhältniss der Zahlen p und q ab, ob dieser Werth von Null so weit abliegt, dass der Gebrauch der citirten Formel gestattet wäre. Vorausgesetzt, dass dies der Fall ist, hat man allgemein

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = - y_2 v_{x_2} \left\{ 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} + \cdots \right\}.$$

Nun folgt aus

$$y = y_2 e^{-t} = \frac{1}{2^{p+q}} e^{-t} = x^p (1-x)^q$$

zunächst

$$t = l \cdot \frac{1}{2^{p+q}} - pl \cdot x - ql \cdot (1-x)$$

und

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{p-(p+q)x}{x(1-x)},$$

woraus weiter allgemein

$$v = \frac{dx}{dt} = - \frac{x(1-x)}{p-(p+q)x},$$

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{p(1-2x) + (p+q)x^2}{[p-(p+q)x]^2},$$

und für den besonderen Werth $x = x_2 = \frac{1}{2}$

$$v_{x_2} = -\frac{1}{2(p-q)},$$
$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_2} = -\frac{p+q}{(p-q)^2}$$

folgt. Durch Einführung dieser Werthe erhält man

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{1}{2^{p+q+1}(p-q)} \left\{1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \cdots\right\}.$$

(Vergl. Nr. 78, pag. 188.)

Zweiter Fall. $\frac{dy}{dx}$ *wird für eine (oder beide) der Integrationsgrenzen sehr klein, oder, y liegt für eine (oder beide) dieser Grenzen dem Maximum nahe.*

Problem. Ist y eine Function von der im Eingange erwähnten Form, so entwickle man das Integral

$$\int_\alpha^\beta y \, dx$$

in eine convergente Reihe; dabei wird vorausgesetzt, dass $\frac{dy}{dx}$ für $x = \alpha$ und $x = \beta$ sehr klein (oder Null) wird.

Lösung. Es sei x_1 der aus $\frac{dy}{dx} = 0$ abgeleitete, also dem Maximum y_1 von y entsprechende Werth von x. Setzt man

$$x = x_1 + (x - x_1)$$

und entwickelt y mit Hilfe der Taylor'schen Reihe nach Potenzen der innerhalb der Integrationsgrenzen sehr klein bleibenden Differenz $x - x_1$, so wird

$$y = y_1 + (x - x_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} + \frac{(x-x_1)^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_1} + \cdots,$$

oder, weil das zweite Glied wegen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = 0$ verschwindet,

$$y = y_1 + \frac{(x-x_1)^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_1} + \cdots$$
$$= y_1 \left\{1 + \frac{(x-x_1)^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_1} \frac{1}{y_1} + \cdots\right\};$$

hieraus leitet sich

$$l \cdot y - l \cdot y_1 = l \cdot \left\{1 + \frac{(x-x_1)^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_1}\frac{1}{y_1} + \cdots\right\}$$

$$= (x-x_1)^2\left\{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_1}\frac{1}{2y_1} + \cdots\right\}$$

ab, und setzt man diesen Ausdruck gleich $-t^2$, so gelangt man zu der Substitution

$$y = y_1 e^{-t^2},$$

aus welcher

$$t = \sqrt{l \cdot y_1 - l \cdot y}$$

folgt.

Nachdem der Ausdruck für t^2 mit dem Factor $x - x_1$ behaftet ist, wird man

$$t = \frac{x - x_1}{v}$$

setzen können, woraus

$$v = \frac{x - x_1}{t} = \frac{x - x_1}{\sqrt{l \cdot y_1 - l \cdot y}}$$

einerseits und $x = x_1 + tv$ andererseits gefunden wird. Entwickelt man x mit Hilfe der Formel von Lagrange nach Potenzen von t, so wird

$$x = x_1 + t v_{x_1} + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_{x_1} + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} + \cdots.$$

und hieraus

$$\frac{dx}{dt} = v_{x_1} + t\left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_{x_1} + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} + \cdots$$

Entsprechen nun den Integrationsgrenzen α und β von x jene T und T' von t, so ist

$$\int_\alpha^\beta y\,dx = y_1 \int_T^{T'} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= y_1 \int_T^{T'} e^{-t^2}dt\left\{v_{x_1} + t\left(\frac{d \cdot v^2}{dx}\right)_{x_1} + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} + \cdots\right\}. \quad \text{(A)}$$

Sind insbesondere a und b jene Werthe von x, welche y auf Null bringen und auch sonst den Bedingungen des Problems entsprechen, so hat man ihnen die Werthe $-\infty$ und $+\infty$ der Variablen t zuzuordnen und erhält

$$\int_a^b y\,dx$$

$$= y_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \left\{ v_{x_1} + t\left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_{x_1} + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2\cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} + \cdots \right\}$$

$$= y_1 \left\{ v_{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \left(\frac{d\cdot v^2}{dx}\right)_{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2\cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt + \cdots \right\}$$

$$= y_1 \left\{ v_{x_1}\sqrt{\pi} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2\cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4\cdot v^5}{dx^4}\right)_{x_1} \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\sqrt{\pi} + \cdots \right\}$$

$$= y_1 \sqrt{\pi} \left\{ v_{x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\cdot v^3}{1\cdot 2\, dx^2}\right)_{x_1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\left(\frac{d^4\cdot v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\, dx^4}\right)_{x_1} + \cdots \right\} \cdot \cdot \text{(B)}$$

Zusatz I. Zur Entwickelung von v_{x_1}, $\left(\frac{d^2\cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1}$, $\cdots$ kann das folgende bequeme Verfahren Anwendung finden.

Nachdem, wie oben gezeigt worden, der Ausdruck für t mit dem Factor $x - x_1$ behaftet ist, so kann

$$t^2 = l\cdot y_1 - l\cdot y = (x - x_1)^2 \left\{ A + B(x - x_1) + C(x - x_1)^2 + \cdots \right\}$$

geschrieben werden. Durch wiederholte Differentiation dieser Gleichung ergibt sich leicht

$$-\left(\frac{dl\cdot y}{dx}\right)_{x_1} = 0, \qquad -\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2 l\cdot y}{dx^2}\right)_{x_1} = A,$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3 l\cdot y}{dx^3}\right)_{x_1} = B, \quad -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4 l\cdot y}{dx^4}\right)_{x_1} = C, \cdots.$$

Aus

$$v = \frac{x - x_1}{\sqrt{l\cdot y_1 - l\cdot y}} = \left\{ A + B(x - x_1) + C(x - x_1)^2 + \cdots \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

folgt nun

$$v_{x_1} = A^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l\cdot y}{dx^2}\right)_{x_1}}},$$

ferner

$$v^3 = \{A + B(x-x_1) + C(x-x_1)^2 + \cdots\}^{-\frac{3}{2}}$$
$$= A^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}B(x-x_1)$$
$$+\left(-\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}C + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right)(x-x_1)^2 + \cdots;$$

zweimalige Differentiation dieser Gleichung liefert zunächst

$$\frac{d^2\cdot v^3}{dx^2} = 1\cdot 2\left(-\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}C + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right) + (x-x_1)\{\cdots\},$$

woraus dann

$$\left(\frac{d^2\cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} = 1\cdot 2\left(-\frac{3}{2}A^{-\frac{5}{2}}C + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}A^{-\frac{7}{2}}B^2\right)$$

gefolgert wird.

Zusatz II. Durch die Bemerkung, dass

$$\frac{d^2 l\cdot y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{y\,dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ist, gelangt man zu einem neuen Ausdrucke für v_{x_1}, nämlich

$$v_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l\cdot y}{dx^2}\right)_{x_1}}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 y}{y\,dx^2}\right)_{x_1}}} = \frac{\sqrt{2y_1}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_1}}}.$$

Macht man hiervon Gebrauch und beschränkt sich bei der Formel (B) bloss auf das erste Glied, so wird

$$\int_a^b y\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,y_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x_1}}} \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

Beispiel I. Das Integral

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx,$$

in welchem p und q sehr gross vorausgesetzt werden, soll in eine convergente Reihe entwickelt werden.

Zunächst geht aus dem Verschwinden von

$$\frac{dy}{dx} = x^{p-1}(1-x)^{q-1}(p-(p+q)x)$$

an den beiden Integrationsgrenzen hervor, dass man es hier mit dem zweiten Falle zu thun hat. Da ferner auch $y = x^p(1-x)^q$

an den Integrationsgrenzen Null wird, so hat man Formel (B) oder (C) anzuwenden.

Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ fliesst der Werth

$$x_1 = \frac{p}{p+q}$$

und mit diesem übergeht y in sein Maximum

$$y_1 = \left(\frac{p}{p+q}\right)^p \left(\frac{q}{p+q}\right)^q.$$

Nun handelt es sich um v_{x_1} und $\left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1}$. Aus

$$l \cdot y = pl \cdot x + ql \cdot (1-x)$$

folgt

$$\frac{dl \cdot y}{dx} = \frac{p}{x} - \frac{q}{1-x},$$

$$\frac{d^2 l \cdot y}{dx^2} = -\left(\frac{p}{x^2} + \frac{q}{(1-x)^2}\right); \quad \ldots \quad (\alpha)$$

daher ist

$$A = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l \cdot y}{dx^2}\right)_{x_1} = \frac{(p+q)^3}{2pq}$$

und

$$v_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 l \cdot y}{dx^2}\right)_{x_1}}} = \sqrt{\frac{2pq}{(p+q)^3}}.$$

Ferner liefert die weitere Differentiation von (α)

$$\frac{d^3 l \cdot y}{dx^3} = \frac{2p}{x^3} - \frac{2q}{(1-x)^3},$$

$$\frac{d^4 l \cdot y}{dx^4} = -\left(\frac{2 \cdot 3p}{x^4} + \frac{2 \cdot 3q}{(1-x)^4}\right),$$

woraus wieder

$$B = -\frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3 l \cdot y}{dx^3}\right)_{x_1} = \frac{(p+q)^4 (p-q)}{3p^2q^2},$$

$$C = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{d^4 l \cdot y}{dx^4}\right)_{x_1} = \frac{(p+q)^5 (p^2 - pq + q^2)}{4p^3q^3}$$

abgeleitet wird. Mit Benützung der Werthe für A, B, C ergibt sich nach einiger Rechnung

$$\left(\frac{d^2 \cdot v^3}{dx^2}\right)_{x_1} = 1 \cdot 2\left(\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\frac{B^2}{A^{\frac{7}{2}}} - \frac{3}{2}\frac{C}{A^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{pq(p+q)^5}}(p^2 - 11pq + q^2).$$

Endlich gibt Formel (B), wenn man sich auf die zwei ersten Glieder beschränkt,

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{p^{p+\frac{1}{2}} q^{q+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq(p+q)}\right).$$

(Vergl. Nr. 79, pag. 190.)

Beispiel II. Das Integral

$$\int_0^\infty x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x} \, dx$$

unter der Bedingung zu entwickeln, dass rn eine sehr grosse Zahl ist.

Aus

$$y = x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}\left(\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1\right)$$

$$= y\left(\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1\right), \quad \ldots \quad (\alpha)$$

und da dieses sowohl für $x = 0$ als für $x = \infty$ verschwindet, so ist die Anwendbarkeit der Formeln des zweiten Falles dargethan. Da überdies auch y für $x = 0$ und $x = \infty$ zur Nulle wird, so kommt Formel (B) oder (C) zur Benutzung, je nach dem Grade der geforderten Annäherung. Wir begnügen uns mit der Formel (C). Setzt man $\frac{dy}{dx}$ der Nulle gleich, so liefert die Gleichung

$$\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1 = 0$$

den dem Maximum entsprechenden Werth

$$x_1 = \frac{rn+r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(rn-r)^2 + 4rn}$$

$$= \frac{rn+r}{2} + \frac{rn}{2}\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{4}{rn}}$$

$$= \frac{rn+r}{2} + \frac{rn}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{4}{rn} + \cdots\right\}$$

$$= rn + \frac{n}{n-1},$$

wenn man bei Entwickelung der Wurzel mit Rücksicht auf den hohen Werth von rn beim zweiten Gliede stehen bleibt. Damit erhält man zunächst, wenn wieder bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{rn}$ gegangen und im Exponenten von e neben dem sehr grossen rn der Bruch $\frac{n}{n-1}$ fortgelassen wird,

$$y_1 = (rn)^{rn}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n e^{-rn}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Durch weitere Differentiation von (α) ergibt sich ferner

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{rn-n}{x} + \frac{n}{x-r} - 1\right) - y\left(\frac{rn-n}{x^2} + \frac{n}{(x-r)^2}\right);$$

wird hier der Werth $x_1 = rn + \frac{n}{n-1}$ für x eingeführt, so verschwindet das erste Glied wegen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = 0$ und man erhält, immer bei demselben Grade der Approximation,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_1} = -y_1\left\{\frac{rn-n}{\left(rn+\frac{n}{n-1}\right)^2} + \frac{n}{\left(rn+\frac{n}{n-1}-r\right)^2}\right\}$$

$$= -\frac{y_1}{rn}\left\{1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right\}$$

$$= -\frac{y_1}{r\cdot rn\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\left\{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + 1\right\}.$$

Führt man diesen Werth in die Formel (C) ein, so wird zunächst

$$\int_0^\infty x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}dx = \frac{\sqrt{2\pi}\, y_1 \sqrt{r\cdot rn}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}$$

und nach Einsetzung des Werthes für y_1 endlich

$$\int_0^\infty x^{rn-n}(x-r)^n e^{-x}dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,(rn)^{rn+\frac{1}{2}}\, e^{-rn}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\sqrt{r}}{\sqrt{(r-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1}}.$$

(Vergl. Nr. 49, pag. 96.)

Beispiel III. Das Integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = \Gamma(n+1) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$$

für sehr hohe Werthe von n zu entwickeln.

Auch hier kommt, da sowohl $\frac{dy}{dx}$ als auch y für beide Grenzen verschwindet, Formel (B) oder (C) des zweiten Falles zur Geltung; wir bleiben wieder bei letzterer Formel.

Aus

$$y = x^n e^{-x}$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = x^n e^{-x}\left(\frac{n}{x} - 1\right) = y\left(\frac{n}{x} - 1\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{n}{x} - 1\right) - y\frac{n}{x^2};$$

setzt man den ersten Differentialquotienten der Nulle gleich, so gelangt man zu dem Werthe

$$x_1 = n$$

und mit diesem zu

$$y_1 = n^n e^{-n},$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_1} = -\frac{y_1}{n}.$$

Nach Einführung dieser Werthe in die erwähnte Formel wird

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = y_1\sqrt{2\pi n} = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,.$$

B. Doppelintegrale.

Es handelt sich wieder um die Entwickelung des Integrals

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta u\,dx\,dy$$

in eine convergente Reihe, unter der Voraussetzung, dass die Function u der Veränderlichen x und y Factoren enthält, welche zu sehr hohen Potenzen erhoben sind. Der Einfachheit halber kann u in der Form

$$u = \{f(x,y)\}^s$$

angenommen werden, wobei s eine sehr grosse Zahl bedeutet.

Man hätte hier ähnliche Fälle zu unterscheiden wie bei einfachen Integralen; doch wollen wir uns auf die Behandlung desjenigen Falles beschränken, für welchen die Grenzen a, b und α, β von x und y die Function u auf Null bringen, so dass

$$u_{a,\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad u_{b,\beta} = 0$$

wird.

Zu diesem Ende setzen wir

$$\frac{du}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dy} = 0$$

und bestimmen auf diese Weise die Werthe x_1, y_1 von x, y, welche das Maximum u_1 von u herbeiführen; indem dann

$$u = u_1 e^{-t^2 - v^2}, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

$$x = x_1 + \theta, \qquad y = y_1 + \eta$$

gesetzt wird, erhält man durch Entwickelung von u nach der Taylor'schen Reihe

$$u = u_1 + \left(\frac{du}{dx}\right)_1 \theta + \left(\frac{du}{dy}\right)_1 \eta$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_1 \theta^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_1 \theta\eta + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_1 \eta^2\right) + \cdots$$

$$= u_1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_1 \theta^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_1 \theta\eta + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_1 \eta^2\right) + \frac{1}{2\cdot 3}(\cdot\cdot\cdot)$$

$$= u_1 \left\{1 + \frac{1}{2u_1}(\cdot\cdot\cdot) + \frac{1}{2\cdot 3u_1}(\cdot\cdot\cdot) + \cdots\right\}$$

$$= u_1\{1 + z\}, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

wenn

$$z = \frac{1}{2u_1}\left(\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_1 \theta^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_1 \theta\eta + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_1 \eta^2\right)$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 3u_1}\left(\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_1 \theta^3 + \cdots\right) + \cdots \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2')$$

genommen wird. Logarithmirt man (2) in Bezug auf die Basis e und beschränkt sich bei der Reihenentwickelung von $l \cdot (1+z)$ auf das erste Glied, so wird

$$l \cdot u = l \cdot u_1 + l \cdot (1+z) = l \cdot u_1 + z;$$

daraus folgt im Hinblick auf (1)

$$l \cdot \frac{u_1}{u} = t^2 + v^2 = -z = A\theta^2 + 2B\theta\eta + C\eta^2,$$

wenn man nämlich in (2') rechter Hand zuerst jene Glieder zusammenzieht, welche den Factor θ^2, sodann von den übrigbleibenden jene, welche den Factor $\theta\eta$ enthalten, so dass schliesslich nur Glieder übrig bleiben, aus welchen sich der Factor η^2 herausheben lässt. Hiernach sind A, B, C im Allgemeinen Functionen von θ und η.

Bringt man die letztgeschriebene Gleichung auf die Form

$$t^2 + v^2 = A\left(\theta + \frac{B}{A}\eta\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\eta^2,$$

so wird ihr durch die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} t &= \sqrt{A}\left(\theta + \frac{B}{A}\eta\right), \\ v &= \eta\sqrt{C - \frac{B^2}{A}} \end{aligned}\right\} \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \quad (3)$$

Genüge geleistet.

Nachdem nun

$$u = u_1 e^{-t^2 - v^2}$$

gesetzt worden und da u für die Werthe a, α und b, β von x und y verschwindet, so entsprechen diesen Grenzen jene $-\infty$ und $+\infty$ von t und v und man hat

$$\int_a^b\!\!\int_\alpha^\beta u\,dx\,dy = \int_{a'}^{b'}\!\!\int_{\alpha'}^{\beta'} u\,d\theta\,d\eta = u_1\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2} K\,dt\,dv \cdot \cdot \; (4)$$

Jetzt handelt es sich noch um die Ermittelung von K. Durch Differentiation der Gleichungen (3) ergibt sich allgemein

$$dt = \frac{dt}{d\theta}\,d\theta + \frac{dt}{d\eta}\,d\eta,$$

$$dv = \frac{dv}{d\theta}\,d\theta + \frac{dv}{d\eta}\,d\eta.$$

Bei der Integration nach θ in dem zweiten Integral von (4) ist $d\theta$ in dem Producte $d\theta d\eta$ so zu nehmen, als ob η constant wäre; dies führt zu der Beziehung

$$dt = \frac{dt}{d\theta}\,d\theta$$

für dt bei der Integration nach t im dritten Integral dieser Gleichung; bei der darauffolgenden Integration nach v wird dann dv in dem Producte $dtdv$ so zu nehmen sein, als ob t constant wäre; dadurch wird man zu den Beziehungen

$$0 = \frac{dt}{d\theta} d\theta + \frac{dt}{d\eta} d\eta,$$

$$dv = \frac{dv}{d\theta} d\theta + \frac{dv}{d\eta} d\eta$$

geführt. Aus denselben folgt

$$dv = \frac{\frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{dv}{d\eta} - \frac{dt}{d\eta} \cdot \frac{dv}{d\theta}}{\frac{dt}{d\theta}} \cdot d\eta;$$

multiplicirt man dies mit der vorangegangenen Gleichung $dt = \frac{dt}{d\theta} d\theta$, so wird

$$dt\, dv = \left(\frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{dv}{d\eta} - \frac{dt}{d\eta} \cdot \frac{dv}{d\theta}\right) d\theta d\eta,$$

mithin

$$d\theta d\eta = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{dv}{d\eta} - \frac{dt}{d\eta} \cdot \frac{dv}{d\theta}}\, dt dv = K dt dv.$$

Hieraus geht also hervor, dass K eine Function der Variablen θ und η ist, welche mit Hilfe der Gleichungen (1) auf eine Function von t und v zurückgeführt werden kann. In Folge dessen reducirt sich das letzte Doppelintegral in (4) auf eine Reihe von Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^m v^n e^{-t^2 - v^2} dt\, dv,$$

welche verschwinden, sobald eine oder beide der Zahlen m und n ungrad sind. Sind dagegen beide Zahlen gerad, z. B. $m = 2i$, $n = 2k$, so hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2i} v^{2k} e^{-t^2 - v^2} dt\, dv = \frac{1 \cdot 3 \cdots \overline{2i-1}}{2^i} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots \overline{2k-1}}{2^k} \cdot \pi.$$

Ist der Exponent von $u = \{f(x,y)\}^s$ sehr gross, so dass man sich bei der eingangs durchgeführten Entwickelung dieser Function auf die zweiten Differentialquotienten beschränken, für (2′) also abgekürzt

$$z = \frac{1}{2u_1} \left(\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_1 \theta^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_1 \theta\eta + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_1 \eta^2 \right)$$

schreiben kann, so ergeben sich für A, B, C die von θ und η unabhängigen Werthe

$$A = -\frac{1}{2u_1}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_1,$$

$$B = -\frac{1}{2u_1}\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_1,$$

$$C = -\frac{1}{2u_1}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_1;$$

die Differentiation von (3) liefert demnach

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{A}, \qquad \frac{dt}{d\eta} = \frac{B}{\sqrt{A}},$$

$$\frac{dv}{d\theta} = 0, \qquad \frac{dv}{d\eta} = \sqrt{C - \frac{B^2}{A}},$$

und es wird

$$K = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}\frac{dv}{d\eta} - \frac{dt}{d\eta}\frac{dv}{d\theta}} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}}$$

$$= \frac{2u_1}{\sqrt{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_1\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_1 - \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_1^2}}.$$

Unter diesen Verhältnissen hat man also

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta u\,dx\,dy = Ku_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-v^2}\,dt\,dv$$

$$= \frac{2u_1^2\pi}{\sqrt{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_1\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_1 - \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_1^2}}.$$

IV.

(Zu pag. 172.)

Die Formeln (A) und (B) von Nr. 71 erfordern einige Bemerkungen. Es handelt sich dort um die näherungsweise Entwickelung des Integrals $\int_\alpha^\beta y\,dx$ mit Hilfe der Substitution

$$y = y_m e^{-t^2},$$

bei welcher y_m das Maximum von y und m denjenigen Werth der Variablen x bedeutet, welcher dieses Maximum herbeiführt. Aus der Substitutionsgleichung folgt

$$t = \sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y},$$

so dass den den früheren Grenzen β und α jetzt die neuen

$$\gamma = \sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y_\beta},$$
$$\gamma' = \sqrt{l \cdot y_m - l \cdot y_\alpha}$$

entsprechen. Nun wurde aber in Nr. 71 gezeigt, dass γ und γ' numerisch gleich sind; sie können sich also, da sie überhaupt verschieden sein müssen, nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Es kam dies dort dadurch zum Ausdruck, dass man γ' mit dem Vorzeichen — versah.

Wird nun

$$x - m = ut$$

gesetzt, woraus

$$dx = u\,dt + t\,du$$

folgt, so kann bei dem Umstande, dass innerhalb der Integrationsgrenzen x nur wenig von m, also y nur wenig von y_m und u von u_m abweichen soll, weshalb auch $t = \frac{x - m}{u}$ sehr klein ausfallen wird,

$$dx = u_m\,dt$$

genommen werden; man hat dann

$$\int_\alpha^\beta y\,dx = \int_{-\gamma'}^{\gamma} y_m u_m e^{-t^2} dt = y_m u_m \int_{-\gamma'}^{\gamma} e^{-t^2} dt \cdot \cdot \cdot \quad (A)$$

Sind ferner a, b diejenigen Werthe von x, welche y auf Null bringen, so entsprechen ihnen die Werthe $-\infty$ und $+\infty$ von t, und es wird

$$\int_a^b y\,dx = y_m u_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = y_m u_m \sqrt{\pi} \cdot \cdot \cdot \quad (B)$$

Uebrigens wäre man zu diesen Formeln bei der vorausgesetzten Form von y, nämlich $y = \{f(x)\}^s$, und bei der weiter getroffenen Annahme, dass x nur wenig von m abweichen soll, durch Anwendung des zweiten Falles der Anmerkung III, Formeln (A) und (B), gelangt, wenn man sich jeweilen auf das erste Glied beschränkt hätte.

V.

(Zu pag. 476 u. 488.)

1) Aus der Theorie der Fourier'schen Integrale ist *bekannt*, dass die Gleichung

$$\Psi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int \Psi(u) \cos(u-r)\alpha \cdot du \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

für alle zwischen den Grenzen des zweiten Integrals liegenden Werthe von r Giltigkeit hat.

Integrirt man den Differentialausdruck

$$\Psi(u)\, e^{(u-r)\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha\, du$$

$$= \Psi(u)\left\{\cos(u-r)\alpha + \sqrt{-1}\sin(u-r)\alpha\right\} d\alpha\, du$$

in Bezug auf α und u innerhalb der in (1) auftretenden Grenzen, so wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha \int \Psi(u)\, e^{u\alpha\sqrt{-1}}\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int \Psi(u) \cos(u-r)\alpha \cdot du$$

$$+ \sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int \Psi(u) \sin(u-r)\alpha \cdot du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int \Psi(u) \cos(u-r)\alpha \cdot du, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

weil

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int \Psi(u) \sin(u-r)\alpha \cdot du$$

$$= \int_{0}^{\infty} d\alpha \int \Psi(u) \sin(u-r)\alpha \cdot du$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} d\alpha \int \Psi(u) \sin(u-r)\alpha \cdot du$$

$$= \int_{0}^{\infty} d\alpha \int \Psi(u) \sin(u-r)\alpha \cdot du$$

$$+ \int_{\infty}^{0} d\alpha \int \Psi(u) \sin(u-r)\alpha \cdot du$$

$$= 0,$$

wenn man in dem zweiten Integrale rechts α durch $-\alpha$ ersetzt. Bringt man nun in (2) die Gleichung (1) zur Geltung, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\alpha\sqrt{-1}}\,d\alpha \int \Psi(u)\, e^{u\alpha\sqrt{-1}}\,du = 2\pi\,\Psi(r) \quad \cdot \quad \cdot \quad (I)$$

2) Die Ausdehnung dieser Formel auf eine Function beliebig vieler Variablen ist nun leicht durchzuführen. Betrachtet man vorläufig eine Function $\Psi(r_1, r_2)$ von zwei Veränderlichen und sieht darin r_2 als constant an, so ist zufolge (I)

$$\Psi(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_1\alpha_1\sqrt{-1}}\,d\alpha_1 \int \Psi(u_1, r_2)\, e^{u_1\alpha_1\sqrt{-1}}\,du_1;$$

wird dagegen in der Function $\Psi(u_1, r_2)$ u_1 als constant angesehen, so liefert dieselbe Formel

$$\Psi(u_1, r_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r_2\alpha_2\sqrt{-1}}\,d\alpha_2 \int \Psi(u_1, u_2)\, e^{-u_2\alpha_2\sqrt{-1}}\,du_2;$$

durch Substitution der zweiten Gleichung in die erste wird

$$\Psi(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2)\sqrt{-1}}\,d\alpha_1\,d\alpha_2$$
$$\times \int\int \Psi(u_1, u_2)\, e^{(u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2)\sqrt{-1}}\,du_1\,du_2.$$

Auf ähnlichem Wege erhält man allgemein für eine Function von m Variabeln die Gleichung

$$\Psi(r_1, r_2, \cdots r_m)$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty}{}_{m} e^{-(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_m\alpha_m)\sqrt{-1}}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 \cdots d\alpha_m$$
$$\times \int_m \Psi(u_1, u_2, \cdots u_m)\, e^{(u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots + u_m\alpha_m)\sqrt{-1}}\,du_1\,du_2 \cdots du_m. \quad (II)$$

I.

Tafel des Integrals $\Phi(\gamma) = \int_0^\gamma \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt.$

γ	$\Phi(\gamma)$	$\Delta\Phi$	$\Delta^2\Phi$
0·00	0·000 0000	11 2833	0
0·01	011 2833	11 2811	22
0·02	022 5644	11 2766	45
0·03	033 8410	11 2699	67
0·04	045 1109	11 2609	90
0·05	056 3718	11 2497	112
0·06	067 6215	11 2362	135
0·07	078 8577	11 2204	158
0·08	090 0781	11 2025	179
0·09	101 2806	11 1824	201
0·10	0·112 4630	11 1600	224
0·11	123 6230	11 1354	246
0·12	134 7584	11 1087	267
0·13	145 8671	11 0799	288
0·14	156 9470	11 0489	310
0·15	167 9959	11 0158	331
0·16	179 0117	10 9806	352
0·17	189 9923	10 9434	372
0·18	200 9357	10 9041	393
0·19	211 8398	10 8627	414
0·20	0·222 7025	10 8193	434
0·21	233 5218	10 7740	453
0·22	244 2958	10 7267	473
0·23	255 0225	10 6775	492
0·24	265 7000	10 6263	512
0·25	276 3263	10 5734	529
0·26	286 8997		549

γ	$\Phi(\gamma)$	$\Delta\Phi$	$\Delta^2\Phi$
0·26	0·286 8997	10 5185	549
0·27	297 4182	10 4618	567
0·28	307 8800	10 4034	584
0·29	318 2834	10 3433	601
0·30	0·328 6267	10 2814	619
0·31	338 9081	10 2178	636
0·32	349 1259	10 1526	652
0·33	359 2785	10 0859	667
0·34	369 3644	10 0175	684
0·35	379 3819	9 9477	698
0·36	389 3296	9 8763	714
0·37	399 2059	9 8034	729
0·38	409 0093	9 7292	742
0·39	418 7385	9 6537	755
0·40	0·428 3922	9 5768	769
0·41	437 9690	9 4986	782
0·42	447 4676	9 4191	795
0·43	456 8867	9 3384	807
0·44	466 2251	9 2567	817
0·45	475 4818	9 1737	830
0·46	484 6555	9 0897	840
0·47	493 7452	9 0046	851
0·48	502 7498	8 9185	861
0·49	511 6683	8 8316	869
0·50	0·520 4999		878

γ	Φ(γ)	ΔΦ	Δ²Φ
0·50	0·520 4999	8 7438	878
0·51	529 2437	8 6550	888
0·52	537 8987	8 5654	896
0·53	546 4641	8 4751	903
0·54	554 9392	8 3841	910
0·55	563 3233	8 2924	917
0·56	571 6157	8 2001	923
0·57	579 8158	8 1071	930
0·58	587 9229	8 0136	935
0·59	595 9365	7 9196	940
0·60	0·603 8561	7 8251	945
0·61	611 6812	7 7302	949
0·62	619 4114	7 6349	953
0·63	627 0463	7 5394	955
0·64	634 5857	7 4435	959
0·65	642 0292	7 3473	962
0·66	649 3765	7 2510	963
0·67	656 6275	7 1545	965
0·68	663 7820	7 0579	966
0·69	670 8399	6 9611	968
0·70	0·677 8010	6 8644	967
0·71	684 6654	6 7676	968
0·72	691 4330	6 6708	968
0·73	698 1038	6 5742	966
0·74	704 6780	6 4776	966
0·75	711 1556	6 3811	965
0·76	717 5367	6 2849	962
0·77	723 8216	6 1888	961
0·78	730 0104	6 0931	957
0·79	736 1035	5 9975	956
0·80	0·742 1010	5 9023	952
0·81	748 0033	5 8075	948
0·82	753 8108	5 7130	945
0·83	759 5238	5 6189	941
0·84	765 1427	5 5253	936
0·85	770 6680	5 4322	931
0·86	776 1002	5 3396	926
0·87	781 4398		921

γ	Φ(γ)	ΔΦ	Δ²Φ
0·87	0·781 4398	5 2475	921
0·88	786 6873	5 1559	916
0·89	791 8432	5 0650	909
0·90	0·796 9082	4 9746	904
0·91	801 8828	4 8849	897
0·92	806 7677	4 7958	891
0·93	811 5635	4 7075	883
0·94	816 2710	4 6198	877
0·95	820 8908	4 5328	870
0·96	825 4236	4 4467	861
0·97	829 8703	4 3612	855
0·98	834 2315	4 2766	846
0·99	838 5081	4 1927	839
1·00	0·842 7008	4 1097	830
1·01	846 8105	4 0275	822
1·02	850 8380	3 9462	813
1·03	854 7842	3 8657	805
1·04	858 6499	3 7861	796
1·05	862 4360	3 7075	786
1·06	866 1435	3 6297	778
1·07	869 7732	3 5529	768
1·08	873 3261	3 4769	760
1·09	876 8030	3 4020	749
1·10	0·880 2050	3 3280	740
1·11	883 5330	3 2549	731
1·12	886 7879	3 1828	721
1·13	889 9707	3 1116	712
1·14	893 0823	3 0415	701
1·15	896 1238	2 9724	691
1·16	899 0962	2 9042	682
1·17	902 0004	2 8370	672
1·18	904 8374	2 7709	661
1·19	907 6083	2 7057	652
1·20	0·910 3140	2 6415	642
1·21	912 9555	2 5784	631
1·22	915 5339		622

γ	Φ(γ)	ΔΦ	Δ²Φ
1·22	0·915 5339	2 5162	622
1·23	918 0501	2 4551	611
1·24	920 5052	2 3949	602
1·25	922 9001	2 3358	591
1·26	925 2359	2 2777	581
1·27	927 5136	2 2206	571
1·28	929 7342	2 1645	561
1·29	931 8987	2 1093	552
1·30	0·934 0080	2 0552	541
1·31	936 0632	2 0020	532
1·32	938 0652	1 9498	522
1·33	940 0150	1 8987	511
1·34	941 9137	1 8485	502
1·35	943 7622	1 7992	493
1·36	945 5614	1 7510	482
1·37	947 3124	1 7036	474
1·38	949 0160	1 6573	463
1·39	950 6733	1 6118	455
1·40	0·952 2851	1 5673	445
1·41	953 8524	1 5238	435
1·42	955 3762	1 4811	427
1·43	956 8573	1 4393	418
1·44	958 2966	1 3984	409
1·45	959 6950	1 3585	399
1·46	961 0535	1 3194	391
1·47	962 3729	1 2812	382
1·48	963 6541	1 2438	374
1·49	964 8979	1 2073	365
1·50	0·966 1052	1 1716	357
1·51	967 2768	1 1367	349
1·52	968 4135	1 1027	340
1·53	969 5162	1 0695	332
1·54	970 5857	1 0370	325
1·55	971 6227	1 0054	316
1·56	972 6281	9745	309
1·57	973 6026	9444	301
1·58	974 5470		294

γ	Φ(γ)	ΔΦ	Δ²Φ
1·58	0·974 5470	9150	294
1·59	975 4620	8864	286
1·60	0·976 3484	8585	279
1·61	977 2069	8312	273
1·62	978 0381	8048	264
1·63	978 8429	7789	259
1·64	979 6218	7538	251
1·65	980 3756	7293	245
1·66	981 1049	7055	238
1·67	981 8104	6824	231
1·68	982 4928	6598	226
1·69	983 1526	6378	220
1·70	0·983 7904	6166	212
1·71	984 4070	5958	208
1·72	985 0028	5757	201
1·73	985 5785	5561	196
1·74	986 1346	5371	190
1·75	986 6717	5186	185
1·76	987 1903	5007	179
1·77	987 6910	4832	175
1·78	988 1742	4664	168
1·79	988 6406	4499	165
1·80	0·989 0905	4340	159
1·81	989 5245	4186	154
1·82	989 9431	4036	150
1·83	990 3467	3892	144
1·84	990 7359	3751	141
1·85	991 1110	3615	136
1·86	991 4725	3482	133
1·87	991 8207	3355	127
1·88	992 1562	3231	124
1·89	992 4793	3111	120
1·90	0 992 7904	2995	116
1·91	993 0899	2883	112
1·92	993 3782	2775	108
1·93	993 6557		106

γ	Φ(γ)	ΔΦ	Δ²Φ	γ	Φ(γ)	ΔΦ	Δ²Φ
1·93	0·993 6557	2669	106	2·30	0·998 8568	556	26
1·94	993 9226	2568	101	2·31	998 9124	531	25
1·95	994 1794	2469	99	2·32	998 9655	507	24
1·96	994 4263	2374	95	2·33	999 0162	484	23
1·97	994 6637	2383	91	2·34	999 0646	461	23
1·98	994 8920	2194	89	2·35	999 1107	441	20
1·99	995 1114	2109	85	2·36	999 1548	420	21
2·00	0·995 3223	2025	84	2·37	999 1968	401	19
2·01	995 5248	1946	79	2·38	999 2369	382	19
2·02	995 7194	1870	76	2·39	999 2751	364	18
2·03	995 9064	1795	75	2·40	0·999 3115	347	17
2·04	996 0859	1721	74	2·41	999 3462	331	16
2·05	996 2580	1655	66	2·42	999 3793	315	16
2·06	996 4235	1586	69	2·43	999 4108	300	15
2·07	996 5821	1523	63	2·44	999 4408	286	14
2·08	996 7344	1461	62	2·45	999 4694	272	14
2·09	996 8805	1401	60	2·46	999 4966	260	12
2·10	0·997 0206	1342	59	2·47	999 5226	246	11
2·11	997 1548	1288	54	2·48	999 5472	235	11
2·12	997 2836	1234	54	2·49	999 5707	224	11
2·13	997 4070	1183	51	2·50	0·999 5931	212	12
2·14	997 5253	1133	50	2·51	999 6143	202	10
2·15	997 6386	1085	48	2·52	999 6345	192	10
2·16	997 7471	1040	45	2·53	999 6537	183	9
2·17	997 8511	996	44	2·54	999 6720	173	10
2·18	997 9507	952	44	2·55	999 6893	165	8
2·19	998 0459	912	40	2·56	999 7058	157	8
2·20	0·998 1371	873	39	2·57	999 7215	149	8
2·21	998 2214	835	38	2·58	999 7364	141	8
2·22	998 3079	799	36	2·59	999 7505	135	6
2·23	998 3878	764	35	2·60	0·999 7640	127	8
2·24	998 4642	731	33	2·61	999 7767	121	6
2·25	998 5373	698	33	2.62	999 7888	115	6
2·26	998 6071	668	30	2·63	999 8003	109	6
2·27	998 6739	636	32	2·64	999 8112	103	6
2·28	998 7375	611	25	2·65	999 8215	98	5
2·29	998 7986	582	29	2·66	999 8313	93	5
2·30	0·998 8568		26	2·67	999 8406		5

γ	$\Phi(\gamma)$	$\Delta\Phi$	$\Delta^2\Phi$	γ	$\Phi(\gamma)$	$\Delta\Phi$	$\Delta^2\Phi$
2·67	0·999 8406	88	5	2·83	0·999 9373	36	—
2·68	999 8494	84	4	2·84	999 9409	34	—
2·69	999 8578	79	5	2·85	999 9443	33	—
2·70	0·999 8657	75	4	2·86	999 9476	31	—
2·71	999 8732	71	4	2·87	999 9507	29	—
2·72	999 8803	67	4	2·88	999 9536	27	—
2·73	999 8870	64	3	2·89	999 9563	26	—
2·74	999 8934	60	4	2·90	0·999 9589	24	—
2·75	999 8994	57	3	2·91	999 9613	24	—
2·76	999 9051	54	3	2·92	999 9637	21	—
2·77	999 9105	51	3	2·93	999 9658	21	—
2·78	999 9156	48	3	2·94	999 9679	19	—
2·79	999 9204	46	2	2·95	999 9698	18	—
2·80	0·999 9250	43	—	2·96	999 9716	17	—
2·81	999 9293	41	—	2·97	999 9733	17	—
2·82	999 9334	39	—	2·98	999 9750	15	—
2·83	999 9373		—	2·99	999 9765	14	—
				3·00	0·999 9779		—

II.

Heym's Sterblichkeitstafel

für Belgien.

Alter m	Lebende A_m	Verstorbene B_{m+1}	Alter m	Lebende A_m	Verstorbene B_{m+1}
0	10000	1493	30	5783	61
1	8507	579	31	5722	60
2	7928	297	32	5662	61
3	7631	188	33	5601	60
4	7443	130	34	5541	62
5	7313	117	35	5479	61
6	7196	87	36	5418	63
7	7109	63	37	5355	63
8	7046	55	38	5292	66
9	6991	50	39	5226	67
10	6941	52	40	5159	71
11	6889	47	41	5088	72
12	6842	45	42	5016	73
13	6797	47	43	4943	71
14	6750	49	44	4872	70
15	6701	54	45	4802	66
16	6647	55	46	4736	68
17	6592	57	47	4668	68
18	6535	59	48	4600	73
19	6476	61	49	4527	77
20	6415	63	50	4450	82
21	6352	64	51	4368	87
22	6288	65	52	4281	90
23	6223	65	53	4191	95
24	6158	64	54	4096	94
25	6094	63	55	4002	99
26	6031	63	56	3903	103
27	5968	62	57	3800	106
28	5906	62	58	3694	110
29	5844	61	59	3684	114

Alter m	Lebende A_m	Verstorbene B_{m+1}	Alter m	Lebende A_m	Verstorbene B_{m+1}
60	3470	118	80	545	87
61	3352	118	81	458	74
62	3230	127	82	384	64
63	3103	130	83	320	56
64	2973	134	84	264	49
65	2839	137	85	215	44
66	2702	140	86	171	37
67	2562	145	87	134	32
68	2417	155	88	102	26
69	2262	161	89	76	20
70	2101	172	90	56	15
71	1929	175	91	41	11
72	1754	175	92	30	9
73	1579	172	93	21	7
74	1407	166	94	14	5
75	1241	163	95	9	3
76	1078	154	96	6	2
77	924	144	97	4	2
78	780	126	98	2	1
79	654	109	99	1	1
			100	0	0

III.

Quetelet's neue Sterblichkeitstafeln.

(Für beide Geschlechter.)

Alter	Norwegen	Schweden	England	Frankreich	Belgien	Niederlande	Bayern	Schweiz
0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1	895	848	851	813	850	804	697	784
2	852	816	797	765	788	747	651	756
3	840	794	769	739	758	719	629	742
4	823	779	750	722	739	701	611	733
5	811	768	737	710	725	689	596	726
6	802	760	727	702	716	680	587	720
7	794	752	719	695	707	672	580	716
8	789	746	713	690	700	666	575	712
9	784	741	707	685	694	661	571	709
10	780	737	703	681	689	656	568	706
11	776	734	698	677	683	653	565	703
12	772	730	695	674	678	649	563	701
13	768	727	691	671	673	645	559	698
14	764	724	688	667	668	642	557	695
15	761	721	685	664	663	639	554	692
16	758	717	681	660	657	635	550	690
17	755	714	677	656	652	632	547	686
18	751	710	673	652	647	627	543	683
19	746	707	668	647	641	623	540	680
20	742	703	663	642	635	618	536	676
21	737	700	657	636	629	613	532	672
22	732	695	651	630	623	608	527	667
23	726	690	646	623	616	602	522	663
24	722	686	640	617	610	596	517	658
25	717	681	634	611	604	591	512	653
26	712	676	628	605	597	585	507	649
27	707	671	622	600	591	580	502	643
28	702	666	616	594	585	573	496	639
29	697	661	610	589	579	567	491	634

Alter	Norwegen	Schweden	England	Frankreich	Belgien	Niederlande	Bayern	Schweiz
30	691	656	604	584	573	561	485	629
31	686	651	597	579	567	555	480	624
32	681	645	591	573	561	549	475	619
33	675	640	585	569	555	542	469	614
34	669	633	578	564	549	535	464	609
35	663	627	572	559	543	528	458	603
36	657	620	565	554	537	522	453	597
37	654	614	559	549	530	516	448	592
38	647	607	552	543	524	509	442	585
39	641	600	545	538	518	502	437	580
40	635	593	539	533	511	494	431	573
41	629	585	532	527	504	487	426	567
42	623	578	525	522	497	480	420	561
43	616	570	517	516	490	472	414	553
44	609	562	510	510	483	466	408	545
45	603	554	503	504	476	459	402	538
46	595	545	495	498	469	451	396	532
47	590	537	488	492	462	444	389	525
48	584	529	480	486	455	437	383	517
49	577	520	472	480	448	430	376	509
50	570	511	464	473	440	423	368	501
51	563	502	456	467	432	415	361	492
52	556	492	448	460	424	406	353	483
53	549	482	439	452	415	397	345	474
54	539	471	430	445	406	388	337	465
55	532	460	421	436	397	378	328	455
56	524	449	412	428	387	368	319	445
57	514	438	402	419	377	358	310	434
58	505	426	391	410	367	348	300	422
59	496	414	381	400	356	337	290	411
60	486	401	370	389	345	327	280	399
61	476	388	358	378	334	317	270	386
62	465	375	347	366	322	305	260	372
63	454	361	335	354	310	294	247	358
64	441	347	322	340	297	281	235	341
65	428	332	309	326	284	269	223	323
66	413	316	296	312	271	254	210	302
67	400	299	282	297	258	240	197	282

Alter	Norwegen	Schweden	England	Frankreich	Belgien	Niederlande	Bayern	Schweiz
68	384	281	268	281	244	226	184	261
69	366	264	253	265	230	211	172	242
70	349	246	238	249	216	197	159	225
71	329	228	223	232	201	182	146	206
72	308	210	207	216	186	168	133	188
73	289	192	192	199	170	154	120	170
74	269	174	176	182	154	139	107	152
75	250	157	161	165	139	126	95	134
76	231	140	146	149	125	112	83	120
77	211	124	131	133	112	99	72	104
78	193	108	117	118	99	86	62	85
79	175	92	103	103	87	74	53	72
80	157	78	90	89	75	64	45	57
81	139	66	78	77	65	54	38	49
82	122	54	67	65	55	43	31	40
83	105	44	56	55	46	35	26	33
84	89	35	47	45	38	28	21	27
85	75	26	39	37	31	22	18	20
86	62	19	31	30	25	17	15	15
87	55	14	25	24	20	13	12	12
88	42	10	20	18	16	10	10	8
89	35	7	15	14	12	7	9	6
90	26	4	12	11	9	5	7	3
91	20	3	9	8	7	3	6	2
92	16	2	6	6	5	2	5	1
93	12	1	4	4	4	2	4	1
94	9	1	3	3	3	1	3	1
95	7	1	2	2	3	1	2	—
96	5	1	2	1	2	1	2	—
97	4	—	1	1	1	—	1	—
98	3	—	1	1	1	—	1	—
99	2	—	—	—	—	—	—	—
100	1	—	—	—	—	—	—	—
101	1	—	—	—	—	—	—	—



